AGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

IX. ÉVFOLYAM, A. SOROZAT, 1—2. FÜZET
1964

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ IX, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 1—2
1964

★

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME IX, SERIES A, FASC. 1—2
1964

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST
1964

INDEX СОДЕРЖАНИЕ

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

IX. ÉVFOLYAM, A. SOROZAT, 1—2. FÜZET

1964

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ IX, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 1—2

1964

★

PUBLICATIONS

OF THE

MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME IX, SERIES A, FASC. 1—2

1964

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1964

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ: RÉNYI ALFRÉD

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. A közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft. *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусках серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюмами на языках отличающих от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR IN CHIEF: ALFRÉD RÉNYI

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers and papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft ($ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

65.61013 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

IX. ÉVFOLYAM

1964

*

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ IX,

1964

*

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME IX,

1964

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1965

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ: RÉNYI ALFRÉD

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50, — Ft. *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15. ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результат-научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусках серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюмами на языках отличающих от языка статьи. Работы предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15. HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematic. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.) in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft ($ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

ON SOME PROBLEMS OF APPROXIMATIONS[1]

by
GÁBOR SZEGŐ[2]

To Paul Erdős on his 50th birthday

§ 1. Introduction

The problems dealt with in the present Note are connected with the classical inequalities of A. MARKOV and S. BERNSTEIN (cf. [3]). We formulate them as follows. Let $f(x)$ be a polynomial of degree n satisfying the condition $|f(x)| \leqq 1$ in the finite real interval $a \leqq x \leqq b$. We have then in the same interval

$$(1.1) \qquad \begin{cases} |f'(x)| \leqq \dfrac{2}{b-a} \cdot n^2 , \\ |f'(x)| \leqq [(x-a)(b-x)]^{-1/2} \cdot n . \end{cases}$$

Both bounds are sharp as it can be shown by the example $f(x) = T_n\left(2\,\dfrac{x-a}{b-a} - 1\right)$ where T_n is Chebyshev's polynomial.

We shall deal with the following four problems.

Problem 1: *Let us consider all polynomials $f(x)$ of a fixed degree n not vanishing identically. Introducing the norm*

$$(1.2) \qquad ||f|| = \max e^{-x} |f(x)| , \qquad x \geqq 0 ,$$

we seek the maximum M_n of the ratio $||f'|| : ||f||$.

Problem 2: *Let x_0 be a fixed constant, $x_0 \geqq 0$. Considering the same class of polynomials and the same norm as in Problem 1, we seek the maximum $M_n(x_0)$ of the ratio $|f'(x_0)| : ||f||$.*

Problem 3: *Again we consider the set of all polynomials $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ and the same norm $||f||$ as in the previous Problems. We seek the maximum G_n of the ratio $|a_n| : ||f||$.*

Problem 4: *Let us consider all polynomials $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ of the fixed degree n satisfying the condition $|f(x)| \leqq 1$ in the interval $-1 \leqq x \leqq 1$. We seek the maximum H_n of*

$$(1.3) \qquad \max \left| \sum_{\nu=0}^{n} \log(\nu+1)\, a_\nu x^\nu \right| , \qquad -1 \leqq x \leqq 1 .$$

[1] This research was sponsored by the National Science Foundation.

[2] Stanford University, California, USA.

In this Note we derive upper and lower bounds for the maxima defined in these Problems; especially in the cases 1, 2, 4 we determine the correct order of magnitude as $n \to \infty$. The explicit evaluation of these maxima seems to be rather difficult. Our results can be formulated as follows:

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \text{Problem } 1\text{: } M_n \sim n. \\ \text{Problem } 2\text{: } M_n(0) \sim n\,,\ M_n(x_0) \sim n^{1/2} \text{ if } x_0 > 0. \\ \text{Problem } 3\text{: } An^{1/3} < 2^{-n}\, n!,\ G_n < B\, n^{1/2}. \\ \text{Problem } 4\text{: } H_n \sim \log n\,. \end{cases}$$

Here A and B are positive constants independent of n. The symbol $a_n \sim b_n$ means always that the ratio $| a_n/b_n |$ is bounded away from 0 and ∞. Occasionally, we use the symbol $a_n \simeq b_n$ if the ratio a_n/b_n tends to 1 as $n \to \infty$.

These Problems (except 3) arose in conversations with Professor PAUL TURÁN during his stay at Stanford University in the first half of the year 1963. I owe him also some simplifications and other valuable comments to the proofs. Problem 4 has originated in the joint research of S. KNAPOWSKI—P. TURÁN on primes in certain arithmetic progressions [2].

Problem 3 is slightly different in character from the inequalities (1.1); it is the analog of the famous problem of CHEBYSHEV characterizing the Chebyshev polynomials $T_n(x)$.

§ 2. Upper bounds

1. *Problems* 1 *and* 2. We use the familiar inequality $e^{-x} > (1 - x/n)^n$ valid for $0 < x < n$. Thus assuming $||f|| = 1$, we have $| (1 - x/n)^n f(x) | \leqq 1$ in the interval $0 \leqq x \leqq n$. Applying to the polynomial $(1 - x/n)^n f(x)$ of degree $2n$ the first inequality (1.1), we find $(a = 0,\ b = n)$

$$|-(1 - x/n)^{n-1} f(x) + (1 - x/n)^n f'(x)| < \frac{2}{n}(2\,n)^2 = 8\,n\,.$$

In particular for $x = 0$ we find

$$|-f(0) + f'(0)| \leqq 8\,n\,,$$

and since $|f(0) \leqq 1$, we have $|f'(0)| \leqq 8n + 1$, i.e., $M_n(0) \leqq 8n + 1$. Hence, if $f(x)$ is *any* polynomial of degree n not vanishing identically, we have

$$(2.1)\qquad M_n(0) \leqq (8\,n + 1)\,||f||.$$

Let $x_0 > 0$; we assume again that $f(x)$ is not vanishing identically, i.e., $||f|| > 0$. We apply (2.1) to the polynomial $f(x + x_0)$. Since $||f(x + x_0)|| \leqq$ $\leqq e^{x_0}\,||f||$, we obtain $|f'(x_0)| \leqq e^{x_0}\,||f||\cdot(8n + 1)$. This being the case for every $x_0 > 0$, we have $||f'|| \leqq (8n + 1)\ ||f||$ so that

$$(2.2)\qquad M_n \leqq 8\,n + 1 \text{ and } M_n(x_0) \leqq e^{x_0}\,(8\,n + 1)\,.$$

A better bound for $M_n(x_0), x_0 > 0$ (as a matter of fact the best one so far as the order of magnitude is concerned) can be obtained with the aid of the second inequality (1.1):

$$|-(1 - x_0/n)^{n-1} f(x_0) + (1 - x_0/n)^n f'(x_0)| \leqq 2n\,(x_0(n - x_0))^{-1/2}.\ ||f||\,,$$

$$(1 - x_0/n)^n\,|f'(x_0)| \leqq (1 - x_0/n)^{n-1}\,|f(x_0)| + 2n\,(x_0(n - x_0))^{-1/2}.\ ||f||.$$

We have $|f(x_0)| \leq e^{x_0} \|f\|$. Hence for a fixed x_0, as $n \to \infty$, we have $M_n(x_0) < < A\, n^{1/2}$, $A > 0$.

2. *Problem* 3. Let ε be positive. We have

$$\|f\|^2 = \max e^{-x} \left| f\left(\frac{x}{2}\right) \right|^2 \geqq \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \cdot e^{-x} \left| f\left(\frac{x}{2}\right) \right|^2 dx . \tag{2.3}$$

Now

$$\int_0^\infty e^{-(1+\varepsilon)x} \left| f\left(\frac{x}{2}\right) \right|^2 dx = (1+\varepsilon)^{-1} \int_0^\infty e^{-x} \left| f\left(\frac{x}{2(1+\varepsilon)}\right) \right|^2 dx .$$

We set

$$f\left(\frac{x}{2(1+\varepsilon)}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu L_\nu(x) \tag{2.4}$$

where $L_\nu(x)$ denotes the Laguerre polynomials (cf. [4], p. 100, (5.1.6)). Consequently,

$$\frac{a_n}{2^n(1+\varepsilon)^n} = (-1)^n \frac{c_n}{n!} \tag{2.5}$$

so that ([4], p. 99, (5.1.1))

$$\|f\|^2 \geqq \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^2 \geqq \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} |c_n|^2 =$$

$$= \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} (n!)^2\, 2^{-2n} (1+\varepsilon)^{-2n} \cdot |a_n|^2 .$$

This yields the following inequality:

$$2^{-n}\, n! \cdot \frac{|a_n|}{\|f\|} \leqq (1+\varepsilon)^{n+1/2}\, \varepsilon^{-1/2} . \tag{2.6}$$

Writing $\varepsilon = 1/n$, the right-hand expression will be $\sim n^{1/2}$.

3. *Problem* 4. We use the formula

$$\log m = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-mt}}{t}\, dt , \qquad m > 0 , \tag{2.7}$$

(cf. [1], p. 17, (18)), as it can be verified by differentiation with respect to m. (The formula is obvious for $m = 1$.) Hence we have the identity

$$\sum_{\nu=0}^{n} \log(\nu+1)\, a_\nu x^\nu = \int_0^\infty e^{-t}\, \frac{f(x) - f(e^{-t}x)}{t}\, dt . \tag{2.8}$$

Let ε and ω be positive numbers, $\varepsilon < \omega$. We divide the integral in (2.8) in three parts: I, II, III corresponding to the intervals $[0, \varepsilon]$, $[\varepsilon, \omega]$, $[\omega, \infty]$. In the first part we use the mean-value theorem combined with the first inequality (1.1); in the second and third part we use only the bound $|f(x)| \leqq 1$. Then we find

$$|\mathrm{I}| \leqq \int_0^\varepsilon e^{-t} \frac{x - e^{-t} x}{t} n^2 \, dt \leqq n^2 \int_0^\varepsilon \frac{1 - e^{-t}}{t} \, dt \leqq n^2 \varepsilon$$

since $e^{-t} \geqq 1 - t$. Further

$$|\mathrm{II}| < \int_\varepsilon^\omega e^{-t} \frac{2}{t} \, dt < \int_\varepsilon^\omega \frac{2\,dt}{t} = 2 \log \frac{\omega}{\varepsilon},$$

$$|\mathrm{III}| < \int_\omega^\infty e^{-t} \frac{2}{t} \, dt < \frac{2}{\omega} \int_\omega^\infty e^{-t} \, dt = \frac{2}{\omega} e^{-\omega}.$$

We choose $\varepsilon = 1/n^2$ and $\omega = n$ so that for $-1 \leqq x \leqq 1$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \log (\nu + 1) \, a_\nu x^\nu \right| < 1 + 6 \log n + \frac{2}{n} e^{-n} < 2 + 6 \log n. \tag{2.9}$$

It is easy to prove that $\limsup H_n/\log n \leqq 4$ as $n \to \infty$.

A similar argument leads to an upper estimate for $\left| \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu a_\nu x^\nu \right|$ provided that $|f(x)| = \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \right| \leqq 1$. Here we assume that the constants λ_ν are the moments of a positive distribution,

$$\lambda_\nu = \int_a^b t^\nu \, d\,\alpha(t), \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.10}$$

or else that the sequence $\{\lambda_\nu\}$ is the difference of two sequences of the form (2.10).

§ 3. Lower bounds

In order to obtain lower bounds for the quantities M_n, $M_n(x_0)$, G_n, H_n defined above, we have to exhibit certain special polynomials $f(x)$. We denote by $L_n^{(\alpha)}(x)$ and by $L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$ the Laguerre polynomials (cf. [4], p. 100, (5.1.6)).

1. The polynomial $L_n(x)$ satisfies the inequality ([4], p. 162, (7.21.3))

$$e^{-x/2} |L_n(x)| \leqq 1, \qquad x \geqq 0, \tag{3.1}$$

with the equality sign for $x = 0$. Hence the function $f(x) = L_n(2x)$ has the norm $\|f\| = 1$. Now ([4], p. 101, (5.1.13) and (5.1.14))

$$\frac{d}{dx} L_n(x) = -L_{n-1}^{(1)}(x) = -L_0(x) - L_1(x) - \ldots - L_{n-1}(x)$$

so that $| e^{-x/2} L_n'(x) | \leq n$ with equality for $x = 0$; with other words $\| L_n'(2x) \| = n$. Hence $M_n \geqq n$, $M_n(O) \geqq n$ so that $M_n \sim n$, $M_n(O) \sim n$.

2. In order to obtain a lower bound for $M_n(x_0)$, $x_0 > 0$, we use ([4], p.239, (8.91.7)) where we write $\lambda = 0$ and we choose $\alpha \geqq -1/6$. Thus

$$\max e^{-x/2} \,|\, L_n^{(\alpha)}(x) \,|\, \sim n^{\alpha/2-1/4}, \qquad x \geqq a, \tag{3.2}$$

where $a > 0$ is arbitrary and fixed. Now let $c = c(n, \alpha, x_0) = c_n$ be a positive constant to be determined later; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ will exist and it will be finite and positive. We write

$$f(x) = n^{1/4-\alpha/2} L_n^{(\alpha)}(2\,x + 2\,c_n)\,, \qquad 2c_n \geqq a\,, \tag{3.3}$$

so that $\|f\|$ depends on n and $\|f\| \sim 1$ as $n \to \infty$. Hence (see above)

$$\frac{1}{2} f'(x_0) = - n^{1/4-\alpha/2} L_{n-1}^{(\alpha+1)}(2\,x_0 + 2\,c_n) \sim n^{1/4-\alpha/2} \cdot n^{\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{4}} = n^{1/2}.$$

Here we used FEJÉR's classical asymptotic formula for the Laguerre polynomials (cf. [4], p. 196, (8.22.1)); the oscillatory part of the main term is

$$\cos\left\{2(n-1)^{1/2}(2\,x_0 + 2\,c_n)^{1/2} - \frac{(\alpha+1)\,\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} = \cos x'\,.$$

We determine c_n in such a way that x' satisfies the condition $x' \equiv 0 \pmod{\pi}$. For this purpose we set

$$2(n-1)^{1/2}(2x_0 + 2c_n)^{1/2} - \frac{(\alpha+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = [2(n-1)^{1/2}\,(3\,x_0)^{1/2} \cdot \pi^{-1}]\;\pi = k\,\pi$$

where $[y]$ is the greatest integer $\leq y$; k is an integer. Hence $\lim\limits_{n\to\infty} (2x_0 + 2c_n)^{1/2} = (3x_0)^{1/2}$ so that $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = x_0/2$. Fejér's formula holds uniformly in every fixed positive interval.

3. Formula (3.2) is based on rather complicated considerations. A simpler approach to the same result $M_n(x_0) \sim n^{1/2}$, $x_0 > 0$, is the following. Let c be again a positive constant to be determined later. We choose

$$f(x) = T_n\left(\frac{x+c}{n} - 1\right) = (-1)^n\, T_n\left(1 - \frac{x+c}{n}\right),$$

so that $e^{-x} |f(x)| \leq 1$ in the interval $0 \leq x \leq 2n - c$. Now we write $1 - \dfrac{x_0 + c}{n} = \cos\varphi = 1 - \dfrac{\varphi^2}{2} + \ldots$ so that $\varphi \simeq \left(\dfrac{2(x_0+c)}{n}\right)^{1/2}$ and $T_n(\cos\varphi) = \cos n\,\varphi = \cos\big(2n(x_0 + c)\big)^{1/2}$. We determine $c = c(n, x_0) = c_n$ in such a way that $\big(2n(x_0 + c_n)\big)^{1/2} = (k + 1/4)\pi$, k an appropriate integer. For this purpose we may follow a similar procedure as above; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ will exist and it will be again finite and positive. Hence $e^{-x_0} |f(x_0)| \sim 1$.

We discuss now the values $y = \dfrac{x+c}{n} - 1 \geqq 1$ so that we can write $y = \operatorname{ch} \alpha$, $\alpha \geqq 0$. We have then $f(x) = \operatorname{ch} n\alpha$ and

$$e^{-x} f(x) = e^{c-n(\operatorname{ch}\alpha+1)} \cdot \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2}.$$

In order to prove $\|f\| \sim 1$ it remains to show that $\max(-\operatorname{ch}\alpha - 1 + \alpha) < 0$, $\alpha \geqq 0$. This is indeed so, since $-\operatorname{ch}\alpha \leqq -1 - \dfrac{\alpha^2}{2} < 1 - \alpha$.

Now we consider

$$f'(x_0) = \frac{1}{n} T_n'\left(\frac{x_0+c}{n} - 1\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} T_n'\left(1 - \frac{x_0+c}{n}\right).$$

We write again $1 - \dfrac{x_0+c}{n} = \cos\varphi$ so that $\varphi \cong \left(\dfrac{2(x_0+c)}{n}\right)^{1/2}$. But

$$n^{-1} T_n'(\cos\varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \cong \left(\frac{n}{2(x_0+c)}\right)^{1/2} \sin\left(2n(x_0+c)\right)^{1/2}.$$

Since $(2n(x_0+c))^{1/2} = (k+1/4)\pi$ we have $\sin(2n(x_0+c))^{1/2} = \pm \sin\dfrac{\pi}{4}$.

This proves the assertion.

4. We seek a lower bound for G_n. For the function (3.3) we have $\|f\| \sim 1$ and

$$|a_n| = n^{1/4-\alpha/2} \cdot \frac{2^n}{n!}.$$

Choosing $\alpha = -1/6$ the lower bound $A \cdot 2^n (n!)^{-1} \cdot n^{1/3}$ follows.

5. Finally we seek a lower bound for H_n. In (2.8) we choose $f(x) = T_n(x)$ and we write $x = 1$. We obtain

$$\int_0^\infty e^{-t} \frac{1 - T_n(e^{-t})}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \frac{1 - \cos n\varphi}{\log \dfrac{1}{\cos\varphi}} d\varphi \geqq \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \frac{1 - \cos n\varphi}{1 - \cos\varphi} d\varphi$$

where the inequality $\log x \leqq x - 1$, $x \geqq 1$, was used. Now

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos n\varphi}{\varphi} d\varphi = \int_0^{n\pi/4} \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

and the last integral is $\sim \log n$.

This establishes the proof of (1.4).

(Received September 17, 1963)

BIBLIOGRAPHY

[1] Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions, vol. 1, 1953.
[2] KNAPOWSKI, S.—TURÁN, P.: "On an assertion of Chebyshev". To appear in *Journal d'Analyse Mathématique*.
[3] SCHAEFFER, A. C.: "Inequalities of A. Markoff and S. Bernstein for polynomials and related functions." *Bulletin of the American Mathematical Society* **47** (1941) pp. 565—579.
[4] SZEGŐ, G.: *Orthogonal Polynomials*, revised edition, 1959.

О НЕСКОЛЬКИХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ПРОБЛЕМАХ

G. SZEGŐ

Резюме

В настоящей работе рассматриваются четыре задачи приближения, в каждой из которых участвуют полиномы с заданной степенью n. Три первые задачи аналогичны определенным проблемам приближения, в которых вместо конечных интервалов, употребляющихся в классических случаях, участвует бесконечный интервал $x \geqq 0$. В работе приводятся два результата.

1) Определим для произвольного полинома $f(x)$ «норму» следующим образом:

$$\|f\| = \max e^{-x} |f(x)|, x \geqq 0 . \text{ Тогда } \|f'\| \leqq A_n \|f\| ,$$

где A_n — постоянная, зависящая только от степени n. A_n имеет порядок n.

2) Пусть $\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \right| \leqq 1$ в интервале $a - 1 \leqq x \leqq 1$. Тогда

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \log(\nu + 1) a_\nu x^\nu \right| \leqq k \log n ,$$

где k посто янное.

Работа посвящается P. ERDŐS в честь пятидесятилетия со дня рождения.

ON THE REPETITION-FREE REALIZATION OF TRUTH FUNCTIONS BY TWO-TERMINAL GRAPHS I

by
ANDRÁS ÁDÁM

Introduction

The investigations described in the present paper join to a theorem of B. TRACHTENBROT ([8], Theorem 1). This theorem serves the purpose of determining a 2-graph if the truth function realized by it is known, and it solves the problem completely from theoretical point of view. However, in applying this theorem, there arises a so high number of tests which means a grave disadvantage in practical application. Our investigations are devoted to improving TRACHTENBROT's idea into a more determined method which seems to be able for being performed by an electronic computer or by a machine built for this special aim.

§ 1 gives a survey on the situation of researches in the investigated field. §§ 2—4 contain the description of the proposed algorithm.[1] The problems (arisen in boundaries of graph theory and logic) are investigated by terms of combinatorial set theory.

At the end of § 4 the questions of machine realization are touched (without the endeavour to perfectness).

The paper terminates with four appendices. App. 1 presents a proposition which has an auxiliary rôle in the algorithm. App. 2 considers a part of the main problem which requires to be treated separately. The two final appendices touch the immediate further questions of the theory, namely they give such mathematical formulations of the problems which will prove, it can be hoped, to be profitable in the future research.

§ 1. The notion of repetition-free realization. Preliminary theorems

It is supposed that the most important initial concepts (truth function, monotonic dependence, prime implicant, repetition-free superposition of truth functions; strongly connected two-terminal graph, canonical decomposition of such graphs, path) are already known to the reader. Concerning these notions we refer to the papers [1], [2], [3], [7], [8].

Let $e_1, \ldots, e_n$ denote (all) the edges of a 2-graph (i.e. strongly connected two-terminal graph) $\mathfrak{G}$; let us assign the truth variables $x_1, \ldots, x_n$ to these edges, respectively. Let that truth function $f(x_1, \ldots, x_n)$ be considered which has the value $\uparrow$ (on a place of its definition domain) if and only if there exists a path of $\mathfrak{G}$ whose every edge corresponds to a truth variable having the value

[1] The reader who is interested only in performing our procedure can omit the proofs of propositions of § 3. The ending of each proof is denoted by Q. E. D.

$\uparrow$. Then, usually, it is said that the graph $\mathfrak{G}$ *realizes the function f without repetition.* There are well-known the following fundamental facts:

f depends effectively and monotonic increasingly on its each variable,

a set of edges of $\mathfrak{G}$ is a path if and only if the conjunction of the variables corresponding to these edges is a prime implicant of f,

$\mathfrak{G}$ can be decomposed canonically if and only if f can be decomposed by repetition-free superposition[2] (KUZNECOV [7], Theorem on p. 197),

if the realizable function f cannot be decomposed by superposition, then f has essentially only one realization (i.e. any two 2-graphs realizing f can be connected by an isomorphism which maps the terminals of one of the graphs to the terminals of the other graph) (TRACHTENBROT [8], Theorem 2, p. 237).

The first fact exposed just now gives a necessary condition in order that a truth function should be realizable; however, this condition is not sufficient at all. So there arises the p r o b l e m o f r e a l i z a b i l i t y: let be stated for a function in order a necessary and sufficient condition for a function to be realizable (without repetition). Further, starting by a given truth function f, it is desirable to find a possibly simple procedure in order to construct the graph realizing f in the case when f has been found to have a realization.

We shall now consider these problems in the particular case when f is assumed to have no decomposition by (repetition-free) superposition.[3] A remarkable way in order to attempt our problems is shown by a theorem of B. TRACHTENBROT ([8], Theorem 1, p. 236) which will be recapitulated here in a somewhat different formulation. The correspondence between the paths of a 2-graph $\mathfrak{G}$ and the prime implicants of the function f realized by $\mathfrak{G}$ implies that, if we are searching the graph $\mathfrak{G}$, the paths of $\mathfrak{G}$ (as sets of edges, regardless to the ordering) can be given easily, therefore it remains to be determined how these edges are incident to the vertices. The set of (all) edges incident to an inner vertex is called an *inner star*. The theorem of Trachtenbrot states that *a set $\mathfrak{H}$ of edges of $\mathfrak{G}$ is an inner star if and only if $\mathfrak{H}$ satisfies each of the following three requirements:*

A) *any edge beside $\mathfrak{H}$ is contained in some path which contains no edge of $\mathfrak{H}$,*

B) *for any path, the number of the common edges of $\mathfrak{H}$ and this path is either* 0 *or* 2,

C) *to each pair of edges of $\mathfrak{H}$ there exists a path containing both of these edges.*[4]

For any set of edges of $\mathfrak{G}$ it can be controlled whether these conditions A), B), C) are fulfilled or not. So, theoretically, the theorem of Trachtenbrot gives a procedure for solving our construction problem.[5] However, the producere got by direct, "rough" application of this theorem is not satisfactory from two points of view either. Firstly, it does not give an elegant solution for the problem of realizability. Namely, if we apply this procedure for a non-realizable function f, then there are two possibilities: either it arises an obvious irregularity already

[2] Naturally, under the presupposition that f admits a (repetition-free) realization.

[3] The particular case of the problem of realizability was formulated as Problem 2 in [4] (p. 36). — Concerning the relation of the general problem to this particular case, we refer — beside the mentioned theorem of KUZNECOV — to § 2 of [7] and to [4].

[4] Our assumption on the indecomposability of f is essential in order that this theorem should be true. In the contrary case, the notion of inner star must be replaced by a more special and complicated notion.

[5] For the sake of completeness, one has to determine finally the edges incident to the one and the other terminal. Concerning this simple task see [8].

in the course of applying the procedure (but, in general, not at the beginning), or we reach regularly a 2-graph which realizes a truth function different from the function f given previously. Secondly, even in the case of realizability, the procedure requires a great number (2^n, where n is the number of the edges) of tests each of which decides whether a special subset satisfies the conditions or not. Consequently, it is desirable to seek a more definite algorithm in the sense that it has a reduced number of steps in comparation to the direct method which consists of testing all sets of edges concerning they fulfil A), B), C) or not. The main parts of the present paper are devoted to improve TRACHTENBROT's theorem into a more constructive (therefore more mechanizable) procedure which serves the purpose of determining the inner stars concerning a function, indecomposable by superposition, supposed to be realizable.[6]

The first imperfectness exposed above makes justifiable to look for a solution of the problem of realizability consisting of a possibly explicit criterion which can be applied for a truth function f still before constructing the graph realizing f (if such a graph exists). This difficult problem will be touched in Appendix 3.

§ 2. Formulation of the problem in terms of combinatorial set theory

If a truth function f is given which depends monotonic increasingly on its each variable, then the prime implicants can be regarded as certain subsets of the set E consisting of the variables of f. Also the properties A), B), C) occurring in TRACHTENBROT's theorem can be expressed in terms of combinatoral set theory. Using this idea, the questions can be raised as transformed followingly.[7]

Let a finite set E be given, further a collection $\mathscr{P}$ of subsets of E such that $\mathscr{P}$ satisfies the following condition: if $P_1 \in \mathscr{P}$, $P_2 \in \mathscr{P}$ and $P_1 \neq P_2$, then neither $P_1 \supset P_2$ nor $P_1 \subset P_2$ holds.

A subset F of E is called a W-*set* if it satisfies all the three statements (I), (II), (III):

(I) To any element x of $E-F$ there exists a set $P(\in \mathscr{P})$ such that $x \in P \subseteq$ $\subseteq E - F$.

(II) If an intersection $P \cap F$ is not empty, then $\overline{\overline{P \cap F}} = 2$ (for the members P of $\mathscr{P}$).

(III) To any pair x, y of elements of F there exists a set $P(\in \mathscr{P})$ satisfying $P \supseteq \{x, y\}$.

Let us fix two elements a, b (chosen arbitrarily) of E. Our aim is in §§ 3–4 to determine those W-sets with at least four elements which are supersets of $\{a, b\}$; especially, to decide whether a such W-set exists or not. During these investigations a W-set F which fulfils $F \supseteq \{a, b\}$ and $\overline{\overline{F}} \geqq 4$ will be called a *desired* W-*set*.

Some of the propositions stated in the course of our investigations give sufficient conditions in order that no desired W-set exists. After proving a proposition of this character, it will be supposed that the condition is not fulfilled (even if this supposition is not formulated explicitly).

[6] Although the procedure proposed here is more definite in the mentioned sense, it has a more complicated description than the "rough method".

[7] If the elements of a set $\mathfrak{A}$ are sets themselves, then we shall say that $\mathfrak{A}$ is the *collection* of its *members*.

§ 3. Foundation of the algorithm

Proposition 1. *If one of the following statements α), β), γ) is true, then there exists no desired* W*-set:*

α) $a \in P$, $b \in P$ *holds for no member of* $\mathcal{P}$,

β) $a \in P$, $b \notin P$ *holds for no member of* $\mathcal{P}$,

γ) $a \notin P$, $b \in P$ *holds for no member of* $\mathcal{P}$.

Proof. If α) is true, then no superset of $\{a, b\}$ can fulfil (III). If e.g. β) holds and $c(\neq a, b)$ is an element of an arbitrary superset F of $\{a, b\}$, then $\mathcal{P}$ cannot have a member P satisfying $P \cap F = \{a, c\}$, hence F does not fulfil (III). Q. E. D.

Now we define four collections $\mathcal{P}_{ab}^{(0)}$, $\mathcal{P}_a^{(0)}$, $\mathcal{P}_b^{(0)}$, $\mathcal{P}_0^{(0)}$ of subsets of E by the following rules:

$\mathcal{P}_{ab}^{(0)}$ consists of the sets of form $P - \{a, b\}$ where P runs through the members of $\mathcal{P}$ containing both of a and b.

$\mathcal{P}_a^{(0)}$ consists of the sets of form $P - \{a\}$ where P runs through the members of $\mathcal{P}$ satisfying $a \in P$ and $b \notin P$.

$\mathcal{P}_b^{(0)}$ consists of the sets of form $P - \{b\}$ where P runs through the members of $\mathcal{P}$ satisfying $b \in P$ and $a \notin P$.

$\mathcal{P}_0^{(0)}$ consists of those members of $\mathcal{P}$ which contain neither a nor b.

We form further collections[8] of subsets of E. Each of $\mathcal{P}_a^{(1)}$, $\mathcal{P}_b^{(1)}$, $\mathcal{P}_0^{(1)}$ consists of the (distinct) sets of form $P - H_{ab}^{(0)}$ where P runs through the members of $\mathcal{P}_a^{(0)}$, $\mathcal{P}_b^{(0)}$ $\mathcal{P}_0^{(0)}$, respectively, and $H_{ab}^{(0)}$ is the union of the members of $\mathcal{P}_{ab}^{(0)}$. Let $H_a^{(1)}$, $H_b^{(1)}$, $H_0^{(1)}$ denote the unions of the members of $\mathcal{P}_a^{(1)}$, $\mathcal{P}_b^{(1)}$, $\mathcal{P}_0^{(1)}$, respectively.

Proposition 2. *If*

$$(H_a^{(1)} \cup H_b^{(1)}) - H_0^{(1)} \tag{1}$$

is not empty, then there exists no desired W*-set.*

Proof. We verify the proposition indirectly. Firstly, we show that any desired W-set F is a superset of the difference (1). In the contrary case, since (I) assures that any element of $E - F$ occurs in some member of $\mathcal{P}_0^{(0)}$, any element of the difference outside F would be contained in some member of $\mathcal{P}_0^{(1)}$. — In the further proof we separate two cases.

Case 1: the difference (1) contains two or more elements. Let x, y be distinct elements of (1). By (III) there exists a member P of $\mathcal{P}$ containing both x and y, but this P must contain one of a, b too, what contradicts to (II).

Case 2: the difference consists of one element x. If F is a desired W-set, then it contains a, b, x; let a further element of F be denoted by y. By (III) there is a $P(\in \mathcal{P})$ such that $P \cap F = \{x, y\}$. The fact that P contains neither a nor b contradicts to the definition of x. Q. E. D.

So we can suppose $H_a^{(1)} \subseteq H_0^{(1)}$ and $H_b^{(1)} \subseteq H_0^{(1)}$. Let $\mathcal{P}_a^{(2)}$, $\mathcal{P}_b^{(2)}$, $\mathcal{P}_0^{(2)}$ be defined as the collections of sets of form $Q \cap H_a^{(1)} \cap H_b^{(1)}$ where Q runs through the members of $\mathcal{P}_a^{(1)}$, $\mathcal{P}_b^{(1)}$, $\mathcal{P}_0^{(1)}$, respectively. Similarly, let $\mathcal{P}_a^{(3)}$, $\mathcal{P}_b^{(3)}$, $\mathcal{P}_0^{(3)}$, be defined as the collections of sets of form $Q - R$ where Q runs through the members of $\mathcal{P}_a^{(2)}$, $\mathcal{P}_b^{(2)}$, $\mathcal{P}_0^{(2)}$, respectively, and R is defined by the following induction. Let R_1 be the union of those members of $\mathcal{P}_0^{(2)}$ each of which consists of (exactly) one element. If R_{i-1} is already defined and there exists a set of

[8] It is allowed that the empty set occurs as a member of the collections to be defined.

form $P - R_{i-1}$ ($P \in \mathscr{P}_0^{(2)}$) consisting of one element, then let R_i be the union of R_{i-1} and the one-element sets of form $P - R_i$ ($P \in \mathscr{P}_0^{(2)}$). Let R denote the last R_i.

Let $H_a^{(2)}$, $H_b^{(2)}$, $H_0^{(2)}$, $H_a^{(3)}$, $H_b^{(3)}$, $H_0^{(3)}$ denote the union of the members of $\mathscr{P}_a^{(2)}$, $\mathscr{P}_b^{(2)}$, $\mathscr{P}_0^{(2)}$, $\mathscr{P}_a^{(3)}$, $\mathscr{P}_b^{(3)}$, $\mathscr{P}_0^{(3)}$ respectively.

The next proposition follows immediately from the above definitions.

Proposition 3. *There hold the equalities* $H_a^{(2)} = H_b^{(2)} = H_0^{(2)}$ *and* $H_a^{(3)} = H_b^{(3)} = H_0^{(3)}$.

Proposition 4. *Each desired* W*-set is a subset of* $H_0^{(3)} \cup \{a, b\}$.

Proof. Let x be an arbitrary element $\neq a, b$ of a desired W-set. (II) certifies that x cannot occur in some member of $\mathscr{P}_{ab}^{(0)}$, so x occurs in a member of one of $\mathscr{P}_a^{(1)}$, $\mathscr{P}_b^{(1)}$, $\mathscr{P}_0^{(1)}$. By our agreement after proving Proposition 2, x is an element of some member of $\mathscr{P}_0^{(1)}$. If no member of $\mathscr{P}_a^{(1)}$ contained x, then $\{a, x\}$ would not occur as a subset of some P ($\in \mathscr{P}$), this contradicts to (III). Therefore x must belong to $H_a^{(1)}$, and, by a similar inference, also to $H_b^{(1)}$. This implies that $x \in H_0^{(2)}$.

We have to prove finally that each element $\neq a, b$ of a desired W-set is contained in $H_0^{(3)}$. This is implied obviously by the following statement: if y is an element of some set R_i, then y cannot occur in any desired W-set. In proving this statement, we can assume that the similar statement was already verified for the elements of R_{i-1}. There exists a member P of $\mathscr{P}_0^{(2)}$ such that $P - R_{i-1} = \{y\}$. If y were contained in a desired W-set F, then $P \cap F = \{y\}$ would be true, what contradicts to (II). Q. E. D.

Proposition 5. *If one of* $\mathscr{P}_a^{(3)}$ *and* $\mathscr{P}_b^{(3)}$ *contains the empty set, then there exists no desired* W*-set.*

Proof. Let be assumed that $\emptyset$ occurs as a member of e.g. $\mathscr{P}_a^{(3)}$. This means that a suitable member P of $\mathscr{P}$ has an empty intersection with $H_a^{(3)}$ ($= H_0^{(3)}$). If F were a desired W-set, then $P \cap F$ would be equal to $\{a\}$ this contradicts (II). Q. E. D.

Proposition 6. *A subset* $F(\supset \{a, b\})$ *of* E *is a desired* W*-set if and only if all the following seven conditions are fulfilled* (F' denotes the set $F - \{a, b\}$):

(O′) $F' \subseteq H_0^{(3)}$, $\overline{\overline{F'}} \geq 2$.

(I′) (= (I)) *To any element* x *of* $E - F$ *there exists a set* $P(\in \mathscr{P})$ *such that* $x \in P \subseteq E - F$.

(II_1') *Each member of* $\mathscr{P}_a^{(3)}$ *and* $\mathscr{P}_b^{(3)}$ *has a non-empty intersection with* F'.

(II_2') *No proper subset of* F' *fulfils the property* (II_1').

(II_3') *Every intersection mentioned in* (II_1') *consists of exactly one element.*

(II_4') *If an intersection* $P \cap F'$ *is non empty (where* $P \in \mathscr{P}_0^{(3)}$*), then* $\overline{\overline{P \cap F}} = 2$.

(III′) *To any pair* x, y *of elements of* F' *there exists a member of* $\mathscr{P}_0^{(3)}$ *containing both* x *and* y.

Proof. Let us remember that the desired W-sets are characterized by the requirements (I), (II), (III), $\overline{\overline{F}} \geq 4$, $F \supset \{a, b\}$. Firstly we shall prove that any desired W-set satisfies the properties exposed in Proposition 6. (O′) was stated already in Proposition 4. (I′) is trivially satisfied. Owing (O′), (II) implies (II_1') and (II_3'); one can see easily that (II_2') follows from (O′), (II_1') and (II_3') (see also Proposition 3).[9] (II_4') and (III′) are immediate consequences of (II) and (III), respectively.

Conversely, let a subset F of E possess the properties enumerated in Proposition 6. (I) is satisfied by F trivially. Let $P \cap F \neq \emptyset$ be assumed for an arbitrary $P(\in \mathcal{P})$, in this case there are three possibilities:

if both of a, b is contained in $P \cap F$, then (O′) assures $P \cap F = \{a, b\}$ ($H_0^{(3)}$ is disjoint, by its definition, to any member of $\mathcal{P}$ containing a, b),

if exactly one of a, b belongs to $P \cap F$, then (O′) and (II_3') imply $\overline{\overline{P \cap F}} = 2$,

if neither a nor b is contained in $P \cap F$, then $\overline{\overline{P \cap F}} = 2$ follows from (O′) and (II_4');

so (II) is satisfied by F in each possible case.

We are now going to show that F fulfils (III). Let a pair x, y of elements of F be considered. If $x = a$ and $y = b$, then (III) holds since the assumption of Proposition 1 is supposed to be false. If exactly one of a, b occurs in the pair x, y, then (III) is implied by (O′) and (II_1') (indeed, if e.g. x differs from a and b, then (O′) and Proposition 3 assure that x occurs in some member of $\mathcal{P}_a^{(3)}$ and in some member of $\mathcal{P}_b^{(3)}$). Finally, if a and b do not occur in the investigated pair, then (III) is a consequence of (III′). Q. E. D.

§ 4. Oversight of an algorithm for determining the W-sets

Owing the results of the preceding paragraph and Appendices 1, 2, we can propose an algorithm which determines the W-sets if the set E and the members of $\mathcal{P}$, belonging to a realizable truth function f indecomposable by superposition, are given. Before all, we determine the three-element W-sets (see App. 2). Afterwards we consider the pairs of elements of E (in arbitrary order), and we apply the following procedure for each of these pairs. Firstly, we look at whether the considered pair a, b occurs in a W-set, determined sooner, or not. If it does occur, then the investigation of the pair a, b is finished, there exists no other W-set which is a superset of $\{a, b\}$; we consider the next pair.[10] In the other case (i.e. if there was got no W-set sooner, containing both a and b) we form the sets according with the definitions of § 3. In the corresponding stages we control the fulfilment of the supposition of Proposition 1, 2, 5 respectively. (If one of these suppositions is fulfilled, then the investigation of the pair a, b is finished.) In the case when it is possible that $\{a, b\}$ is a subset of some W-set, it remains to decide which subset of $H_0^{(3)}$ satisfies (I′) — (III′). Proposition 7 (in App. 1) gives a method for determining the subsets satisfying (II_1') and (II_2') explicitly, we must choose the set from these sets (if it exists) which fulfils also (I′), (II_3'), (II_4'), (III′). This can be executed by tests.

The procedure presented just now seems to be convenient for being realized by a machine whose activities are, in great lines, similar to an electronic digital computer. Instead of arithmetical operations, it need perform some set-theoretical operations. The storage of the machine contains the subsets of E which occur in the procedure. The members of $\mathcal{P}$ are stored during the whole

---

[9] The reader can observe that the properties enumerated in Proposition 6 do not form an independent system, namely, we could get an equivalent system by omitting (II_2'). However, the admission of this property in our proposition will prove to be advantageous from the view point of our further aims.

[10] This test is made justified by the fact that the intersection of two distinct W-sets cannot have two or more elements since f is indecomposable and realizable. — If we omitted this step, then a W-set having m elements would appear in $\binom{m}{2}$ exemplars.

procedure. It seems to be a convenient method that each set is stored in one memory cell. The length of the cells (i.e. the number of digits in any cell) is greater or equal to the number of elements of E ($\overline{\overline{E}}$ digits correspond one-one to the elements of E). The value of the digits can be $+1$, -1 or 0. $+1$ denotes that the corresponding element of E occurs in the stored subset, -1 denotes that the corresponding element does not occur in the subset, and 0 is the value of the digits to whom no element of E is assigned. We must store also the W-sets constantly when they had been produced. The sets occurring only in investigating a fixed pair can be cancelled after the transition to an other pair. The members of e.g. $\mathscr{P}_0^{(3)}$ are stored similarly as the members of $\mathscr{P}$, but now also those digits have the value O which correspond to the elements of $E - H_0^{(3)}$; we must provide that no member of $\mathscr{P}_0^{(3)}$ should be stored in two exemplars. Furthermore, it is necessary to have a special unit which serves for executing the method justified by Proposition 7.

Appendices

1

In the present section a proposition of combinatorial set-theoretical nature is proved. The idea of this proposition is not essentially new, a thought of related character arises already in [5] and [6].[11] However, I believe that the equivalence stated here has not yet been formulated in such an explicit manner.

Let $M = \{r_1, r_2, \ldots, r_\alpha\}$ be a finite set, let a collection of its certain subsets $N_1, N_2, \ldots, N_\beta$ be given. We can suppose $\bigcup\limits_{\gamma=1}^{\beta} N_\gamma = M$. Let the truth variables $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\alpha$ be assigned to $r_1, r_2, \ldots, r_\alpha$, respectively. Let us form for each N_γ ($\gamma = 1, \ldots, \beta$) the disjunction $\mathfrak{N}_\gamma$ of those (unnegated) variables which correspond to the elements of N_γ.

Proposition 7. *The following two statements are equivalent for a subset M' of M:*

(i) *M' has a non-empty intersection with each of $N_1, N_2, \ldots, N_\beta$ and for any proper subset M'' of M' there exists a set N_γ ($1 \leq \gamma \leq \beta$) which satisfies $M'' \cap N_\gamma = \emptyset$.*

(ii) *The conjunction of the variables which correspond to the elements of M' is a prime implicant of the (monotonic increasing) truth function*

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\alpha) = \mathfrak{N}_1 \,\&\, \mathfrak{N}_2 \,\&\ldots\&\, \mathfrak{N}_\beta .$$

Proof. Under a *full elementary conjunction* of $\mathfrak{f}$ we understand, usually, a conjunction in which each of $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\alpha$ exactly once occurs and which contains only these variables (the unique occurrence of a variable can be unnegated or negated). These conjunctions can be identified with the places of the definition domain of $\mathfrak{f}$ in the customary manner. Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be full elementary conjunctions; $\mathfrak{A}$ is said to be *greater* as $\mathfrak{B}$ if there is no variable which occurs negated in $\mathfrak{A}$ and unnegated in $\mathfrak{B}$.

Let us assign to any subset M' of M a full elementary conjunction by what follows: the conjunction contains $\mathfrak{r}_\delta$ ($1 \leq \delta \leq \alpha$) unnegated if and only if $\mathfrak{r}_\delta$ occurs in the set M'. One can see that $M' \supseteq M''$ holds if and only if a greater conjunction is assigned to M' than to M''. The value of $\mathfrak{f}$ on the place

[11] Cf. Theorem on p. 337 and Footnote[2] in [6].

corresponding to M' shows whether M' has a non-empty intersection with each of $N_1, \ldots, N_\beta$ or not.

M' has the property (i) if and only if the full elementary conjunction $\mathfrak{A}$ (assigned to M') satisfies the following to statements: $\mathfrak{f}(\mathfrak{A}) = \uparrow$, and $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$ imply $\mathfrak{f}(\mathfrak{B})$ where $\mathfrak{B}$ is an arbitrary full elementary conjunction of $\mathfrak{f}$. Let $\mathfrak{A}'$ be the conjunction which results from $\mathfrak{A}$ by cancelling the variables which occur in $\mathfrak{A}$ negated. Since $\mathfrak{f}$ is monotonic increasing, $\mathfrak{A}$ fulfils the above statement if and only if $\mathfrak{A}'$ is a prime implicant of $\mathfrak{f}$. Q. E. D.

2

The presented procedure is able to determine those W-sets only which consist of at least four elements. It remains the task of determining the three-element W-sets. This can be performed as it follows.

Let a, b be fixed elements of E. The next proposition can be verified similarly to Proposition 1.

Proposition 8. *If one of the statements α), β), γ) occurring in Proposition 1 is true, then there exists no three-element* W*-set containing both a and b.*

Let the sets D_1, D_2 be defined by

$$D_1 = \bigcup_{\substack{P \ni a \\ P \ni b}} P, \qquad D_2 = \bigcup_{\substack{P \not\ni a \\ P \not\ni b}} P,$$

and let D_3, C be defined by $D_3 = \bigcup P$, $C = \bigcap P$ where P runs through those members of $\mathcal{P}$ which contain exactly one of a, b.

Proposition 9. *If either the set $C - (D_1 \cup D_2)$ is empty or it contains at least two elements, then there exists no three-element* W*-set containing a and b.*

Assume that $C - (D_1 \cup D_2)$ consists of one element c, in this case there are two possibilities:

(i) *$\{a, b, c\}$ is a* W*-set, there exists no other three-element* W*-set containing a and b, and $(D_1 \cup D_3) - \{a, b, c\} \subseteq D_2$,*

(ii) *there exists no three-element* W*-set containing a and b, and $\big((D_1 \cup D_3) - - \{a, b, c\}\big) - D_2$ is not empty.*

Proof. One can see easily that $\{a, b, c\}$ fulfils (II) and (III) if and only if $c \in C - (D_1 \cup D_2)$. If $c'(\neq c)$ is an arbitrary other element of $C - (D_1 \cup D_2)$, then (I) cannot be fulfilled by $\{a, b, c\}$. If $C - (D_1 \cup D_2) = \{c\}$, then $\big((D_1 \cup D_3) - - \{a, b, c\}\big) - D_2 = \emptyset$ is the necessary and sufficient condition in order that $\{a, b, c\}$ should fulfil (I). Q. E. D.

3

Let f be a truth function as at beginning § 2. We have there formulated what the properties due to TRACHTENBROT mean in terms of combinatorial set theory. The exposed correspondence makes possible that also other properties of f should be expressed set-theoretically.

Namely, let the finite set E and the collection $\mathcal{P}$ be given as in § 2. $\mathcal{P}$ is called *indecomposable by superposition* if to any non empty subset $F (\subset E)$ there exist two members P_1, P_2 of $\mathcal{P}$ such that $(P_1 \cap F) \neq \emptyset$, $P_2 \cap F \neq \emptyset$, and the union $(P_1 \cap F) \cup (P_2 - F)$ is not a member of $\mathcal{P}$.[12]

[12] Concerning the equivalence of this property and the original definition of indecomposability, see Theorem 2 in [2] (p. 51) and Corollary in [4] (p. 36).

The collection $\mathscr{P}$ is called *realizable by a 2-graph* if there exist such subsets V_P, V_Q, $V_1, V_2, \ldots, V_k$ of E such that

α) any element of E occurs in exactly two of V_P, V_Q, $V_1, \ldots, V_k$ and

β) the following two properties are equivalent for a subset F of E:

1°) $F \in \mathscr{P}$

2°) each of the intersections $F \cap V_P$ and $F \cap V_Q$ consists of one element, and each of the intersections $F \cap V_1, \ldots, F \cap V_k$ consists of 0 or 2 elements, and no proper subset of F satisfies the statements exposed above in 2°).

Now TRACHTENBROT's theorem can be expressed in the following manner; if $\mathscr{P}$ is indecomposable by superposition and realizable by a 2-graph, then the sets $V_1, V_2, \ldots, V_k$ (are determined uniquely and) coincide with the W-sets.

4

We say that the truth function

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_{n+r})$$

originates by *r-fold distribution* from the function

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

if there exists a partition of the set $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n+r}\}$ such that

the number of the classes in n, and

in that case when we start with g and we put the variables equal to each other in any class, then the resulting function g' coincides with f essentially (i.e. there exists a one-to-one mapping of the set of the variables of g' onto the set of the variables of f such that the equality of all pairs of corresponding variables implies the equality of the values of g' and f).

For the sake of simplicity, we shall consider only such truth functions which depend monotonic increasingly from all the variables, and only such realizations in which always non-negated variables correspond to the edges of the of the realizing graphs.[13]

Let us consider a truth function f. The question of determining an optimal realization of f (by a 2-graph) can be expressed in the following manner: let us find a truth function g such that

g admits a repetition-free realization, and

g originates by r-fold distribution from f where the number r has the property that all the functions originating by 0-fold, 1-fold, ..., $(r-1)$-fold distribution from f are non-realizable (in the repetition-free sense).

(Received October 2, 1961)

REFERENCES

[1] ÁDÁM, A.: "Kétpólusú elektromos hálózatokról, III." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **3** (1958), 207—218.

[2] ÁDÁM, A.: „Zur Theorie der Wahrheitsfunktionen." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **21** (1960) 47—52.

[13] Our idea could be explained also without these restrictions, but its formulation would be more complicated in the full generality.

[3] Ádám, A.: "On graphs in which two vertices are distinguished." *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) 377—397.
[4] Ádám, A.: "Über die monotone Superposition der Wahrheitsfunktionen." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **23** (1962) 18—37.
[5] McCluskey, E. J.: "Minimization of Boolean functions." *Bell System Technical Journal* **35** (1956) 1417—1444.
[6] Rohleder, H.: »Ein Verfahren zum Aufstellen optimaler Normalformen bei gegebenen Primimplikanden." *Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Math.* **5** (1959) 334—339.
[7] Кузнецов, А. В.: «О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики.» *Труды Мат. Института им. В. А. Стеклова* **51** (1958) 186—225.
[8] Трахтенброт, Б. А.: «К теории бесповторных контактных схем.» *Труды Мат. Института им. В. А. Стеклова* **51** (1958) 226—269.

О БЕСПОВТОРНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ИСТИННОСТИ СПОСОБОМ ДВУХПОЛЮСНЫХ ГРАФОВ, I

A. ÁDÁM

Разработан алгорифм, пригодный для машинного выполнения, для определения внутренних звезд на основе теоремы 1 цитированной работы Трахтенброта, исходя из реализуемой функции, которая неразложима относительно суперпозиций.

ÜBER DAS ALGEBRAISCHE INTEGRAL DER MIKUSIŃSKISCHEN OPERATOREN

von

TAMÁS FÉNYES und PÁL KOSIK

Einführung

Die Verfasser beschäftigen sich in dieser Arbeit mit dem sogenannten algebraischen Integral der Mikusińskischen Operatoren. Sie setzten die Kenntnis der in [1] nidergelegten Grundlagen der Mikusińskischen Operatorenrechnung sowie der dort gebrauchten Bezeichnungen voraus; so werden hier diese nicht geschildert.

Wie bekannt, ist die MIKUSIŃSKIsche Definition der algebraischen Ableitung die folgende (Siehe [1]):

Ist $a = \{a(t)\} \in L$, so ist

$$Da = D\{a(t)\} = \{-ta(t)\} \tag{1}$$

und für beliebige Operatoren $x = \dfrac{\{b\}}{\{c\}}$, $b, c \in L$, $c \neq 0$

$$Dx = \frac{c\,D\,b - b\,D\,c}{c^2}, \tag{2}$$

hierbei bedeutet L die Menge der im Intervall $<0, \infty)$ lokal integrierbaren Funktionen. Es ist leicht ersichtlich, dass diese Definition korrekt ist, da einerseits die algebraische Ableitung des Operators x von seiner Herstellung $\dfrac{\{b\}}{\{c\}}$ unabhängig ist, andererseits, falls $x \in L$, so folgt aus (2) $Dx = \{-tx(t)\}$.

Die folgenden Eigenschaften der algebraischen Ableitungen sind leicht beweisbar:

Bezüglich der Operatoren x, y und der Zahlenoperatoren C_1, C_2 gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$D(c_1x + c_2y) = c_1Dx + c_2Dy, \quad Dxy = yDx + xDy,$$

$$D\frac{x}{y} = \frac{yDx - xDy}{y^2}, \qquad y \neq 0$$

MIKUSIŃSKI hat weiterhin in [1] gezeigt, dass die algebraische Ableitung eines beliebigen rationalen Ausdruckes von der Form

$$\frac{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_m s^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \ldots + \beta_0}$$

des s Differentiationsoperators durch formelle Differenzierung nach s bestimmt werden kann. Demgemäss wird das Symbol D der algebraischen Ableitung auch mit $\frac{d}{ds}$ bezeichnet. Die Verfasser gebrauchen in dieser Arbeit die Bezeichnung D, bzw. im Falle einer k-ten Ableitung, die Bezeichnung D^k $(k = 1, 2 \ldots)$.

In [2] weist MIKUSINSKI weitere wichtige Eigenschaften der algebraischen Ableitung nach. Es sei α eine beliebige Zahl, so ist

$$D\,\alpha = 0$$

und umgekehrt, besteht für irgendeinen Operator der Zusammenhang

$$Dx = 0,$$

so ist x eine beliebige Zahl. Ist weiterhin der Operator w ein Logarithmus (siehe [1]), d. h. wenn die Exponentialfunktion $e^{\lambda w}$ existiert, so besteht

$$De^w = Dw \cdot e^w. \tag{3}$$

Die Verfasser werden im weiteren von diesem wichtigen Zusammenhang Gebrauch machen.

Mit dem Problem der Inversen der algebraischen Ableitung hat sich als erster E. GESZTELYI [3] beschäftigt. In seiner Arbeit betrachtet er — nach Definition des algebraischen Integrals, und nach Untersuchung seiner elementaren Eigenschaften, — die Lösung von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit Polynom-koeffizienten mit Hilfe der Operatorenrechnung. Sein wesentliches Ergebnis besteht aus dem Beweis, dass jede stetige Funktion algebraisch integrierbar ist, und er gibt auch das Integral an. Die Verfasser beschäftigen sich in ihrer Arbeit eingehender mit dem Problem der algebraischen Integrierung. Die erhaltenen Ergebnisse sind allgemeiner, und die Beweise sind einfacher, als in [3].

Es wird beweisen, dass jede im Intervall $< 0, \infty)$ lokal integrierbare Funktion auch algebraisch integrierbar ist. Weiterhin wird die Bedingung angegeben, unter der das algebraische Integral einer lokal integrierbaren Funktion eine lokal integrierbare Funktion herstellt. Es wird die Frage der algebraischen Integrierung der auch im negativen Bereich definierten Funktionen untersucht. Im weiteren wird die algebraische Integrierung solcher spezieller Operatoren, die keine Funktionen sind, betrachtet. Die Arbeit schliesst mit Sätzen bezüglich unendlicher Reihen, bzw. mit dem sehr allgemeinen Satz über die algebraische Integrierung endlicher Distributionen.[1]

§. 1. Das algebraische Integral und seine Eigenschaften

Definition. Wenn zu einem Operator a ein solcher Operator b angegeben werden kann, dass

$$Db = a \tag{4}$$

so wird der Operator b das algebraische Integral des Operators a genannt, und mit

$$b = D^{-1}\,a \tag{5}$$

[1] Die Frage der algebraishen Integrierbarkeit eines beliebigen Operators ist zur Zeit noch nicht entschieden, jedoch ist bis jetzt kein Gegenbeispiel bekannt.

bezeichnet. In diesem Falle heisst der Operator a algebraisch integrierbar.

Im weiteren werden wir von zwei Sätzen aus [3] Gebrauch machen. Diese sind die folgenden:

1. Sind die Operatoren a und b algebraisch integrierbar, so ist der Operator

$$\lambda a + \mu b$$

ebenfalls algebraisch integrierbar, und

$$D^{-1}[\lambda a + \mu b] = \lambda D^{-1} a + \mu D^{-1} b$$

wobei λ und μ beliebige Zahlen sind.

2. Alle algebraischen Integrale eines Operators unterscheiden sich nur in beliebigen Zahlenoperatoren.

Nun beweisen wir den folgenden Satz:

Satz I. *Jede im Intervall* $< 0, \infty)$ *definierte, lokal integrierbare Funktion* f *ist gleichzeitig auch algebraisch integrierbar, und*

$$D^{-1} f = -s \left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau \right\}, \tag{6}$$

wobei $t_0 > 0$, *beliebig gewählt werden kann.*

Beweis. Berechnen wir die algebraische Ableitung von (3). Die Regel bezüglich der algebraischen Differenzierung des Produktes benützend, erhalten wir

$$-Ds\left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right\} = \left\{ -\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right\} - sD\left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right\} =$$

$$= \left\{ -\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right\} + s\left\{ t \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right\} =$$

$$= \left\{ -\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right\} + \left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right\} + \left\{ f(t) \right\} = \left\{ f(t) \right\}.$$ [2]

[2] Hierbei wurde die behannte operatorische Differentiationsregel für total stetige Funktionen

$$s\{F(t)\} = \{F'(t)\} + F(+0)$$

angewandt. Diese ist korrekt, da es leicht nachweisbar ist, dass die Funktion $\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$ lokal intégrierbar, $t \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$ auch in der Umgebung von Null total stetig ist und

$$\lim_{t \to 0} t \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau = 0$$

für jede lokal integrierbare Funktion $f(t)$.

Aus (6) ist es ersichtlich, dass das algebraische Integral einer Funktion im allgemeinen keine Funktion, sondern ein Operator ist. Die Frage nach jenen lokal integrierbaren Funktionen, deren algebraisches Integral — von einer additiven Konstanten abgesehen — ebenfalls lokal integrierbar ist, kann leicht beantwortet werden. Diesbezüglich gilt der folgende:

Satz II. *Das algebraische Integral einer lokal integrierbaren Funktion $f(t)$ ist dann und nur dann eine lokal integrierbare Funktion, falls die Funktion $f(t)/t$ ebenfalls lokal integrierbar ist. In diesem Falle besteht*

$$D^{-1}f(t) = -\frac{f(t)}{t}. \tag{7}$$

Beweis. *a)* Die Bedingung ist notwendig. Ist $\frac{f(t)}{t}$ keine lokal integrierbare Funktion, so ist die Funktion

$$\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau$$

in (6) in der Umgebung von $t = 0$ nicht beschränkt, und durch (6) wird in diesem Falle keine Funktion hergestellt.

b) Die Bedingung ist hinreichend. Es sei $\frac{f(t)}{t}$ auch in der Umgebung von Null lokal integrierbar. In diesem Falle kann in Formel (6) $t_0 = 0$ gewählt werden, und es besteht

$$D^{-1}f = -s\left\{\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau\right\}.$$

Durch Wahl von $F(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau$ und durch Anwendung der Formel $s\{F(t)\} = \{F'(t)\} + F(+0)$ erhalten wir

$$D^{-1}f = -s\left\{\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau\right\} = -\frac{f(t)}{t} \quad \text{q.e.d.}$$

Folgerung 1. Ist $\frac{f(t)}{t^k}$ (k positiv, ganz) lokal integrierbar, so ist $f(t)$ mindestens k-mal algebraisch integrierbar, und das k-te algebraische Integral ist — abgesehen von einem beliebigen Polynom $(k-1)$-sten Grades in s — gleich

$$D^{-k}f = (-1)^k\left\{\frac{f(t)}{t^k}\right\}. \tag{8}$$

Folgerung 2. Ist die lokal integrierbare Funktion in einer beliebigen rechtsseitigen Umgebung des Nullpunktes gleich Null, so ist f beliebig oft algebraisch integrierbar, und das k-te algebraische Integral ist gleich

$$D^{-k} f = (-1)^k \left\{ \frac{f(t)}{t^k} \right\}.$$

Die Sätze I und II sind allgemeiner, als die entsprechenden Sätze von [3], da dort die Berechtigung der algebraischen Integrierung nur für stetige Funktionen nachgewiesen ist, und als Bedingung der Herstellung der Funktion $-\frac{f(t)}{t}$ durch das algebraische Integral wird die Existenz von $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ angegeben.

Satz III. *Es existiert das algebraische Integral des Operators* $1/(s-\alpha)^p$, *wobei* α *beliebige komplexe, und* p *beliebige reelle Zahl ist. Weiterhin besteht*

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} &D^{-1} \frac{1}{(s-\alpha)^p} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(s-\alpha)^{p-1}}, && p \neq 1, \\ &D^{-1} \frac{1}{s-\alpha} = (\alpha - s)\,\{e^{\alpha t} \log t\}, && p = 1. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei zuerst $p = 1$. Da $\frac{1}{s-\alpha} = \{e^{\alpha t}\}$, erhalten wir durch Anwendung der Formel (6)

$$D^{-1} \left\{ e^{\alpha t} \right\} = -s \left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{e^{\alpha\tau}}{\tau}\, d\tau \right\}.$$

Partielle Integration ergibt

$$-s \left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{e^{\alpha\tau}}{\tau}\, d\tau \right\} = -s e^{\alpha\tau} \log \tau \Big|_{t_0}^{t} + s \left\{ \alpha \int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau} \log \tau\, d\tau \right\} =$$

$$= -s\,\{e^{\alpha t} \log t - e^{\alpha t_0} \log t_0\} + \{\alpha\, e^{\alpha t} \log t\} - \alpha \left\{ \int_0^{t_0} e^{\alpha\tau} \log \tau\, d\tau \right\}$$

d. h., von Konstanten abgesehen, ist

$$\text{(10)} \qquad D^{-1} \frac{1}{s-\alpha} = (\alpha - s)\,\{e^{\alpha t} \log t\}.$$

Es sei nun $p > 1$. Dann ist in (9)

$$\frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(s-\alpha)^{p-1}} = \frac{1}{1-p} \left\{ \frac{e^{\alpha t}\, t^{p-2}}{\Gamma(p-1)} \right\}.$$

Durch algebraische Differentiation erhält man

$$\frac{1}{p-1} \left\{ \frac{e^{\alpha t}\, t^{p-1}}{\Gamma(p-1)} \right\} = \left\{ \frac{e^{\alpha t}\, t^{p-1}}{\Gamma(p)} \right\} = \frac{1}{(s-\alpha)^p}.$$

Damit ist der Satz auch für $p > 1$ bewiesen. Es sei schiesslich $p < 1$. Dann ist in (9)

$$\frac{1}{(1-p)(s-\alpha)^{p-1}} = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^{1-p}}\right]^{-1}.$$

Durch algebraische Differentiation, bezüglich der Brüche geltenden Regel entsprechend, und im Betracht ziehend, dass die Gültigkeit des Satzes für $p > 1$ bereits bewiesen ist, erhalten wir

$$D\left(\frac{1}{(1-p)(s-\alpha)^{p-1}}\right) = -\frac{1}{1-p}(s-\alpha)^{2-2p}(p-1)(s-\alpha)^{p-2} = \frac{1}{(s-\alpha)^p}.$$

Folgerung. Ist p nicht eine positive, ganze Zahl, so ist $\dfrac{1}{(s-\alpha)^p}$ sicherlich beliebig oft algebraisch integrierbar. Satz III wird ergänzt durch.

Satz IV. *Ist p eine positive, ganze Zahl, so ist* $\dfrac{1}{(s-\alpha)^p}$ *ebenfalls beliebig oft algebraisch integrierbar.*

Hierzu muss nur gezeigt werden, dass $\dfrac{1}{s-\alpha}$ beliebig oft algebraisch integrierbar ist.

Beweis. Auf Grund von (10) ist

$$D^{-1}\frac{1}{s-\alpha} = (\alpha - s)\{e^{at}\log t\}.$$

Nun berechnen wir das k-te algebraische Integral des Operators $(\alpha - s)\cdot$ $\cdot\{e^{at}\log t\}$ (k ist pozitiv und ganz): Das Prinzip der unbestimmten, partiellen Integrierung ist auch im Falle des algebraischen Integral gültig. Dies folgt unmittelbar aus der Definition des algebraischen Integrals einerseits, und aus der Regel bezüglich der algebraischen Integration der Produkte anderseits. Schreiben wir die partielle algebraische Integrationsregel, die wir auch später nach gebrauchen werden, nieder:

$$D^{-1}[uD^n v] = uD^{n-1}v - Du\,D^{n-2}v + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}vD^{n-1}u + (-1)^n D^{-1}[v\,D^n u], \qquad n = 1, 2 \ldots,$$

hierbei wird vorausgesetzt, dass die Operatoren $uD^n v$, bzw. $vD^n u$ für die gegebenen Operatoren u und v algebraisch integrierbar sind. Die Regel auf $n = 1$ angewandt, und durch die Wahl von $Dv = \alpha - s$, $u = \{e^{at}\log t\}$ erhalten wir

$$(11)\qquad \begin{aligned} D^{-1}[(\alpha - s)\{e^{at}\log t\}] &= \frac{-(s-\alpha)^2}{2}\{e^{at}\log t\} - \\ &- D^{-1}\left[\frac{(s-\alpha)^2}{2}\{t\,e^{at}\log t\}\right]. \end{aligned}$$

Formen wir nun — unter Berücksichtigung der operatorischen Differentiationsregel — die rechte Seite von (11) folgendermassen um:

$$D^{-1}\left[\frac{(s-a)^2}{2}\{te^{at}\log t\}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}D^{-1}\left[(s-a)\{e^{at}\log t+a\,te^{at}\log t+e^{at}\}-(s-a)\{a\,te^{at}\log t\}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}D^{-1}\left[(s-a)\{e^{at}\log t+e^{at}\}\right]= \tag{12}$$

$$=\frac{1}{2}D^{-1}\left[(s-a)\{e^{at}\log t\}\right]+\frac{1}{2}D^{-1}\left[(s-a)e^{at}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[D^{-1}(s-a)\{e^{at}\log t\}\right]+\frac{s}{2}.$$

Durch Einsetzung von (12) in (9) erhalten wir:

$$D^{-1}\left[(a-s)\{e^{at}\log t\}\right]=-(s-a)^2\{e^{at}\log t\}-s. \tag{13}$$

Offensichtlich kann die rechte Seite von (13) ebenfalls partiell integriert werden.

Wir erhalten — ohne Angabe der ausführlichen Berechnungen — durch k-fache partielle Integration

$$D^{-k}\left[(a-s)\{e^{at}\log t\}\right]=-\frac{(s-a)^{k+1}}{k!}\{e^{at}\log t\}-\sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{\mu}\frac{(s-a)^k}{k!} \tag{14}$$

$$k=1,2,\ldots$$

Bemerkung. Aus Satz III., aus seiner Folgerung, sowie aus Satz IV folgt direkt, dass ein jeder beliebiger rationeller Ausdruck des Operators s

$$\frac{a_n s^n+\ldots+a_0}{b_m s^m+\ldots+b_0}$$

beliebig oft algebraisch integrierbar ist, da dieser als Summe eines Polynoms $P(s)$ und Glieder von der Form $\dfrac{c_k}{(s-a_k)^{p_k}}$ dargestellt werden kann.

Der folgende Satz ist die Verallgemeinerung eines Satzes von [3], der dort nur bezüglich stetiger Funktionen bewiesen ist.

Satz V. *Ist die lokal integrierbare Funktion f in einer beliebig kleinen, rechtsseitigen Umgebung des Nullpunkts k-mal stetig differenzierbar, so ist sie auch k-mal algebraisch integrierbar, und abgesehen von einem additiven Polynom $(\nu-1)$-sten Grades von s, besteht*

$$D^{-\nu}f=\left\{\frac{f(t)-\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{t^\varrho}{\varrho!}f^{(\varrho)}(0)}{(-1)^\nu t^\nu}\right\}+ \tag{15}$$

$$+\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{(-1)^{\varrho+1}f^{(\varrho)}(0)}{\varrho!}\left[\frac{s^{\nu-\varrho}}{(\nu-\varrho-1)!}\{\log t\}+\sum_{\mu=1}^{M}\frac{1}{\mu}\cdot\frac{s^{\nu-\varrho-1}}{(\nu-\varrho-1)!}\right],$$

$$\text{wobei } M=\begin{cases}\nu-\varrho-1, & \text{falls } \varrho<\nu-1,\\ 1, & \text{falls } \varrho=\nu-1.\end{cases}$$

Beweis. Schreiben wir die Funktion f in der Form

$$f = \left\{ f(t) - \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} f^{(\varrho)}(0) \right\} + \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} f^{(\varrho)}(0) \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} \right\}. \tag{16}$$

Die Funktion

$$\frac{f(t) - \sum\limits_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} f^{(\varrho)}(0)}{t^\nu} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k$$

ist auf Grund unserer Bedingungen über $f(t)$ lokal integrierbar, da sie im $t = 0$ einen Grenzwert besitzt. Infolge der 1. Folgerung des Satzes II besteht

$$D^{-\nu} \left\{ f(t) - \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} f^{(\varrho)}(0) \right\} = \left\{ \frac{f(t) - \sum\limits_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} f^{(\varrho)}(0)}{(-1)^\nu t^\nu} \right\}.$$

Das zweite Glied von (16) ist aber auf Grund der bisher Gesagten beliebig oft algebraisch integrierbar, und durch etwas Berechnung erhält man — mit Benützung der Formel (14) für $\alpha = 0$

$$D^{-\nu} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} f^{(\varrho)}(0) \frac{t^\varrho}{\varrho\,!} \right\} =$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^{\varrho+1} f^{(\varrho)}(0)}{\varrho\,!} \left[\frac{s^{\nu-\varrho}}{(\nu-\varrho-1)\,!} \{\log t\} + \sum_{\mu=1}^{\nu-\varrho-1} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{s^{\nu-\varrho-1}}{(\nu-\varrho-1)\,!} \right]. \qquad \text{q.e.d.}$$

§. 2. Algebraisch Integrale bezüglich des Verschiebungsoperators und der Funktionen der U-Klasse

Die folgende wichtige Eigenschaft des Mikusińskischen Verschiebungsoperators h ist wohlbekannt. Es sei f eine beliebige, im Intervall $<0, \infty)$ lokal integrierbare Funktion. Dann ist

$$h^\lambda f(t) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad t < \lambda\,, \\ f(t-\lambda), & \text{für} \quad t \geqq \lambda\,, \end{cases} \qquad \lambda \text{ reell.} \tag{17}$$

Aus Folgerung 2 des Satzes III folgt unmittelbar der folgende

Satz VI. *Ist $f \in L$, so ist*

$$F(t) = h^\lambda f(t) \quad \lambda > 0$$

beliebig oft algebraisch integrierbar, und das n-te algebraische Integral ist — von einem additiven Polynom $(n-1)$-sten Grades von s abgesehen — gleich

$$D^{-n} \{F(t)\} = (-1)^n \left\{ \frac{F(t)}{t^n} \right\}. \tag{18}$$

Die Funktion $F(t) = h^{-\lambda} f(t)$, $(\lambda > 0)$ gehört der U-Klasse an und ist lokal integrierbar (siehe [1]). Bis jetzt haben wir das algebraische Integral der Funktionen dieses Typs noch nicht betrachtet. Bevor wir überhaupt zur Betrachtung dieser Frage übergehen könnten, müssen wir uns mit dem Problem der algebraischen Differentiation von Funktionen der U-Klasse, also solcher Funktionen, die nur in einen endlichen Abschnitt der negativen Halbgeraden von Null verschiedene Werte annehmen, beschäftigen. Die Tatsache, dass jede Funktion der U-Klasse algebraisch differenzierbar ist, folgt sogleich aus Formel (2) der Einleitung. Es kann nämlich eine beliebige Funktion $f \in \mathsf{U}$ durch entsprechend gewähltes $\lambda > 0$ als der Quotient zweier Funktionen aus L aufgeschrieben werden:

$$f = \frac{lh^\lambda f(t)}{lh^\lambda}, \qquad l = \frac{1}{s}.$$

Nun ist es nur fraglich, ob die in der Einleitung gegebene Definition aus [1] und [2] bezüglich der algebraischen Differentiation auch für Funktionen der U-Klasse richtig bleibt. Also muss gezeigt werden, dass

$$(19) \qquad Df = D\frac{lh^\lambda f(t)}{lh^\lambda} = \{-tf(t)\} \in \mathsf{U}.$$

Vorausgehend bemerken wir, dass

$$Dh^\lambda = De^{-\lambda s} = -\lambda e^{-\lambda s} = -\lambda h^\lambda, \quad \lambda \text{ reell.}$$

Nun ist, mit einem entsprechend gewählten $\lambda > 0$,

$$D\frac{lh^\lambda f}{lh^\lambda} = \frac{lh^\lambda Dlh^\lambda f - lh^\lambda f Dlh^\lambda}{l^2h^{2\lambda}} = \frac{Dlh^\lambda f - fDlh^\lambda}{lh^\lambda} =$$

$$= \frac{-t\int\limits_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau + f(\lambda lh^\lambda + l^2h^\lambda)}{lh^\lambda} = sh^{-\lambda}\Big(-t\int\limits_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau\Big) +$$

$$+ \lambda f + h^{-\lambda}\int\limits_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau = -h^{-\lambda}\int\limits_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau - h^{-\lambda}tf(t-\lambda) +$$

$$+ \lambda f + h^{-\lambda}\int\limits_0^t f(\tau-\lambda)\,d\tau = -(t+\lambda)f(t) + \lambda f = -tf \in \mathsf{U}.$$

Hiermit wurde (19) nachgewiesen, also ist auf Grund der oben gesagten Bemerkungen die Problemstellung bezüglich der algebraischen Integration von Funktionen der U-Klasse berechtigt.

Satz VII. *Jede, im Intervall* $<-\lambda, \infty)$, $\lambda > 0$ *definierte, lokal integrierbare Funktion* f *ist auch algebraisch integrierbar, und, von einer Konstanten abgesehen, besteht*

$$(20) \qquad D^{-1}f = -sh^{-\lambda}\{F(t) - F(0)\},$$

wobei $F(t) = \int \frac{f(t-\lambda)}{t-\lambda}\,dt \in L, \qquad \frac{f(t-\lambda)}{t-\lambda} = h^\lambda\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \in L.$

Der **Beweis** erfolgt analog zum Beweis des Satzes I:

$$-Dsh^{-\lambda}\{F(t)-F(0)\}=$$
$$=-h^{-\lambda}\{F(t)-F(0)\}-s\lambda h^{-\lambda}\{F(t)-F(0)\}+sh^{-\lambda}\{t[F(t)-F(0)]\}=$$
$$=-h^{-\lambda}\{F(t)-F(0)\}+sh^{-\lambda}\{(t-\lambda)[F(t)-F(0)]\}=$$
$$=-h^{-\lambda}\{F(t)-F(0)\}+h^{-\lambda}\{F(t)-F(0)+f(t-\lambda)\}=$$
$$=h^{-\lambda}f(t-\lambda)=f(t)\in \mathsf{U}\,.$$

Bemerkung 1. Die Formel (20) geht durch Einsetzung von $\lambda=0$ nicht in die analoge Formel (6) von §. 1. bezüglich Funktionen, die im Intervall $<0,\infty)$ definiert sind, über. Dort kann nämlich $t_0>0$ beliebig, jedoch im allgemeinen nicht gleich Null sein, da in (6) das Integral $\int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau$ möglicherweise überhaupt nicht existiert. Dagegen ist es in (20) wesentlich, dass die in den Klammern stehende Funktion im Nullpunkt verschwinde.

Bemerkung 2. Es ist leicht ersichtlich, dass ähnliche Sätze und Folgerungen wie Satz II, zusammen mit den Folgerungen 1. und 2., sowie Satz V, auch für die Funktionen der U-Klasse angegeben werden können.

Satz VIII. *Es seien p, λ reelle Zahlen und α eine beliebige komplexe Zahl, dann ist der Operator*

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p}e^{-\lambda s} \tag{21}$$

algebraisch integrierbar.

Beweis:

I. Es sei zuerst $p>0$.

Ist λ positiv, so folgt sogleich auf Grund von Satz VII, dass (21) beliebig oft algebraisch integrierbar ist, und, von einem additiven Polynom im s abgesehen,

$$D^{-k}\frac{1}{(s-\alpha)^p}e^{-\lambda s}=\begin{cases}0\,, & \text{für } t<\lambda\,,\\ \dfrac{(-1)^k(t-\lambda)^{p-1}e^{\alpha(t-\lambda)}}{\Gamma(p)\,t^k}\,, & \text{für } t\geqq\lambda\,,\end{cases}\qquad k=1,2,\ldots \tag{22}$$

Ist nun λ negativ, so gilt, dass die Funktion

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p}e^{-\lambda s}=\begin{cases}0\,, & \text{für } t<\lambda\\ \dfrac{(t-\lambda)^{p-1}e^{\alpha(t-\lambda)}}{\Gamma(p)}\,, & \text{für } t\geqq\lambda\end{cases}$$

in $t=0$ im üblichen Sinne differenzierbar ist, und deshalb auf Grund der Bemerkung 2. des Satzes VII auch algebraisch integrierbar ist. Das algebraische Integral ist — von einer additiven Konstanten abgesehen — gleich

$$\left\{\frac{e^{-\alpha\lambda}(-\lambda)^{p-1}-e^{\alpha(t-\lambda)}(t-\lambda)^{p-1}}{\Gamma(p)\,t}\right\}-\frac{e^{-\alpha\lambda}(-\lambda)^{p-1}}{\Gamma(p)}\,s\left\{\log\left|\frac{t}{\lambda}\right|\right\},\qquad t\geqq\lambda\,, \tag{23}$$

wovon man sich durch algebraische Differenzierung von (23) leicht überzeugen kann.

II. Es sei nun $p < 0$.

Ist α negativ und p ganz, so gebrauchen wir die Bezeichnung $p = -m$. Anwendung der partiellen algebraischen Integration mit $u = (s-\alpha)^m$, und $D^m v = e^{-\lambda s}$, ergibt durch einfache Berechnungen

$$D^{-1}(s-\alpha)^m e^{-\lambda s} = -e^{-\lambda s}\sum_{k=1}^{m}\frac{m!\,(s-\alpha)^{m-k+1}}{(m+1-k)!\,\lambda^k} - \frac{m!}{\lambda^{m+1}}e^{-\lambda s}. \tag{24}$$

Da die rechte Seite von (24) wieder eine Summe von Gliedern der Form $(s-\alpha)^\nu e^{-\lambda s}$ ist, kann sie beliebig oft algebraisch integriert werden. — Ist nun das negative p keine ganze Zahl, so ergibt — mit der Bezeichnung $-p = m + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ m ganz — die wiederholte partielle algebraische Integration mit $u = (s-\alpha)^{m+\varepsilon}$, $D^{m+1} v = e^{-\lambda s}$ durch einfache Berechnungen

$$\begin{aligned} D^{-1}(s-\alpha)^{m+\varepsilon} e^{-\lambda s} = -e^{-\lambda s}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(s-\alpha)^{m+\varepsilon+1-k}\Gamma(m+\varepsilon+1)}{\lambda^k\,\Gamma(m+2+\varepsilon-k)} + \\ + \frac{\Gamma(m+\varepsilon+1)}{\Gamma(\varepsilon)\,\lambda^{m+1}}\{F(t)\}, \end{aligned} \tag{25}$$

wo

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < \lambda, \\ \dfrac{e^{\alpha(t-\lambda)}(t-\lambda)^{-\varepsilon}}{-t\,\Gamma(1-\varepsilon)} & \text{für } t \geqq \lambda > 0. \end{cases} \tag{26}$$

(25) ist sogar beliebig oft algebraisch integrierbar, da (26) beliebig oft algebraisch integrierbar ist, und der Teil von (25), welcher keine Funktion enthält, nur aus der Summe von Gliedern der Form $(s-\alpha)^\nu e^{-\lambda s}$ besteht. Es ist bemerkenswert, dass die rechte Seite von (24) ein Operator ist, und keine Funktion enhält, dagegen (25) aus der Summe einer Funktion und eines Operators, der keine Funktion herstellt, besteht.

Schliesslich erhalten wir für negative Werte von λ, mit partieller algebraischer Integration,

$$\begin{aligned} D^{-1}(s-\alpha)^{m+\varepsilon} e^{-\lambda s} = -e^{-\lambda s}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(s-\alpha)^{m+\varepsilon+1-k}\Gamma(m+\varepsilon+1)}{\lambda^k\,\Gamma(m+\varepsilon+2-k)} \\ + \frac{\Gamma(m+\varepsilon+1)}{\Gamma(\varepsilon)\,\lambda^{m+1}}\left\{\frac{e^{-\alpha\lambda}(-\lambda)^{-\varepsilon} - e^{\alpha(t-\lambda)}(t-\lambda)^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)\,t}\right\} - \\ - \frac{\Gamma(m+\varepsilon+1)\,e^{-\alpha\lambda}(-\lambda)^{-\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon)\,\lambda^{m+1}\,\Gamma(1-\varepsilon)}\, s\left\{\log\left|\frac{t}{\lambda}\right|\right\}, \qquad t \geqq \lambda < 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Bemerkung. Aus Satz VIII. folgt sofort, dass der Operator

$$R(s)e^{-\lambda s}$$

algebraisch integrierbar ist, wenn $R(s)$ ein rationaler Ausdruck in s ist.

§. 3. Zwei Sätze über unendliche Reihen. Das algebraische Integral endlicher Distributionen

Es gilt der folgende

Satz IX. *Jede im Sinne der Operatorenrechnung konvergente, unendliche Reihe ist beliebig oft, gliedweise algebraisch differenzierbar.*

Beweis. Im Falle einer gleichmässig konvergenten Funktionenreihe ist die Behauptung des Satzes trivial. Betrachten wir nun eine beliebige, im Sinne der Operatorenrechnung konvergente, unendliche Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = a \,. \tag{28}$$

Aus der Definition der operatorischen Konvergenz folgt die Existenz eines Operators q, für welches $a_n = qb_n$, wobei $b_n \in C$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_n = b$$

fast gleichmässig konvergiert. Berechnen wir nun die algebraische Ableitung von (28):

$$\begin{aligned} D\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= D\left(\sum_{n=1}^{\infty} qb_n\right) = D\left(q\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, Dq + qD\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n\, Dq + qDb_n) = \sum_{n=1}^{\infty} D(b_n\, q) = \sum_{n=1}^{\infty} Da_n = Da \,. \end{aligned} \tag{29}$$

Man kann also gliedweise differenzieren. Daraus folgt unmittelbar, dass (28) beliebig oft gliedweise algebraisch differenzierbar ist, da der Operator a beliebig oft algebraisch differenzierbar ist.

Aus Satz IX. folgt der nachstehende

Satz X. *Sind die Glieder einer im Sinne der Operatorenrechnung konvergenten unendlichen Reihe algebraisch integrierbar, und ist die durch gliedweise algebraische Integration erhaltene unendliche Reihe im Sinne der Operatorenrechnung konvergent, so ist der durch die ursprüngliche Reihe hergestellte Operator algebraisch integrierbar, und die letztere Reihe gibt eben ein solches algebraisches Integral an.*

Beweis. Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \tag{80}$$

die genannte konvergente Reihe, wo die a_n algebraisch integrierbar sind. Es sei

$$b_n = D^{-1}a_n \,,$$

und es existiere

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \,. \tag{31}$$

Berechnen wir auf Grund von Satz IX. die algebraische Ableitung von (31)

$$D\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} Db_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a = Db \qquad \text{q. e. d.}$$

Zum Schluss beweisen wir einen Satz über endliche Distributionen.

Satz XI. *Jede endliche Distribution ist beliebig oft algebraisch integrierbar.*

Unter einer endlichen Distribution verstehen wir Operatoren der Form $s^k f$. Hier ist $k = 0, 1, 2 \ldots$, und f eine im Intervall $< 0, \infty)$ definierte Funktion, welche ein Element des Mikusińskischen Quotientenkörpers ist.

Beweis. Wir zeigen, dass das algebraische Integral einer endlichen Distribution ebenfalls eine endliche Distribution ist. Daraus folgt auch, dass eine endliche Distribution beliebig oft algebraisch integrierbar ist.

$$D^{-1}(s^k f) = s^{k+1} u\,, \qquad u \in L\,. \tag{32}$$

Es muss nur gezeigt werden, dass die Funktion u ebenfalls ein Element des Quotientenkörpers ist. Durch algebraische Differentiation von (32) erhalten wir

$$s^k f = D(s^{k+1} u) = (k+1) s^k u - s^{k+1}\{tu(t)\}\,,$$

woraus

$$f = (k+1)\,u - s\{tu(t)\}\,,$$

und die Division durch s ergibt

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = (k+1)\int_0^t u\,d\tau - tu(t)\,,$$

hieraus ergibt sich durch Substitution von $v(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$ die Differentialgleichung

$$tv'(t) - (k+1)\,v(t) = -\int_0^t f(\tau)\,d\tau\,. \tag{33}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung erhält man durch einfache Berechnungen:

$$v(t) = Ct^{k+1} + \frac{\int_0^t f(\tau)\,d\tau}{k+1} - \frac{t^{k+1}}{k+1}\int_\varepsilon^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau^{k+1}} \qquad (\varepsilon > 0). \tag{34}$$

(34) ist für $t > 0$ stetig differenzierbar, und es ist leicht ersichtlich, dass — unabhängig vom Wert der Konstanten C — $\lim_{t\to 0} v(t) = 0$ besteht. $v(t)$ ist im Intervall $< 0, \infty)$ total stetig, und seine Ableitung

$$u(t) = Ct^k - t^k \int_\varepsilon^t \frac{f(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\tau \tag{35}$$

ist lokal integrierbar. Das Auftreten der Konstanten C ist die Folge dessen, dass in (32) das algebraische Integral unbestimmt ist. Wird nämlich (35) in die rechte Seite von (32) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} D^{-1}(s^k f) &= s^{k+1}\left\{Ct^k - t^k \int_\varepsilon^t \frac{f(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\tau\right\} = \\ &= -\,s^{k+1}\left\{t^k \int_\varepsilon^t \frac{f(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\tau\right\} + \gamma \end{aligned} \tag{36}$$

wobei γ wieder ein Zahlenoperator ist.

Bemerkung. Aus (36) ergibt sich für $k = 0$ (6). Wir sehen also, dass jede lokal integrierbare Funktion unendlich oft algebraisch integrierbar ist.[3]

(Eingegangen: 11. März, 1963)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] MIKUSIŃSKI, J.: *Operational Calculus.* Pergamon Press, London—New York—Paris—Los Angeles Panstwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa, 1959.
[2] MIKUSIŃSKI, J.: "Remarks on the algebraic derivative in the operational calculus." *Studia Mathematica* **19** (1960) 187—192.
[3] GESZTELYI ERNŐ: „Polinomegyütthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása a Mikusiński-féle operátorszámítás alkalmazásával." Egyetemi doktori disszertáció, Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ИНТЕГРАЛЕ ОПЕРАТОРОВ

T. FÉNYES P. KOSIK

Резюме

Авторы в настоящей работе занимались проблемой алгебраического интеграла операторов MIKUSIŃSKI. Работа содержит в сушности обобщения одних теорем работы GESZTELYI [3]. Авторы, ограничиваясь на операторы специального вида, исчисляют их алгебраический интеграл. Они доказывают, что каждая локально интегрируемая функция, и даже каждая конечная дистрибуция, бесконечно раз интегрируема алгебраически.

[3] Der gegenwärtige Artikel war schon druckfertig, als den Verfassern bekannt wurde, dass Herr ERNŐ GESZTELYI den grössten Teil der in diesem Artikel vorkommenden Sätze in einem seiner im Druck noch nicht erschienenen Artikel ebenfalls bewiesen hat. In dem erwähnten Artikel wird ein Satz über die algebraische Intergierbarkeit von endlichen Distributionen bewiesen, der allgemeiner ist als unser Satz XI. Der Artikel von E. GESZTELYI enthält auch die Erweiterung der Operatorenrechnung auf Funktionen von der Gestalt $\frac{f(t)}{t^k}$, $f(t) \in C$ $k = 1, 2, \ldots$.

DIE ANWENDUNG DER MIKUSIŃSKISCHEN OPERATORENRECHNUNG ZUR LÖSUNG SPEZIELLER LINEARER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT VERÄNDERLICHEN KOEFFIZIENTEN

von

TAMÁS FÉNYES

Einleitung

Die MIKUSIŃSKI-sche algebraische Theorie der Differentialgleichungen gibt eine sehr elegante, bequeme Methode zur Lösung linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, unter gegebenen Anfangs- und Randbedingungen (siehe [1], [2]). Es sei die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{n_1} a_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = \varphi(\lambda, t) \tag{1}$$

gegeben, welche in der sogenannten Operatorengestalt folgendermassen geschrieben werden kann:

$$a_{m_1} x^{(m_1)}(\lambda) + a_{m_1-1} x^{(m_1-1)}(\lambda) + \ldots + a_0 x = f(\lambda)\,, \tag{2}$$

wobei

$$a_{\mu} = a_{\mu n_1} s^{n_1} + \ldots + a_{\mu 0}\,, \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m_1)$$

hier ist s der sogenannte Differentiations-operator, und

$$f(\lambda) = \{\varphi(\lambda, t)\} + \sum_{\varkappa=0}^{n_1-1} s^{n_1-\varkappa-1} \sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} a_{\mu, n_1-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}}\,. \tag{3}$$

Die Gleichung (2) ist eine Operatordifferentialgleichung, deren allgemeine Lösung aus der partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung und aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung zusammengesetzt ist. Wie aus (3) ersichtlich ist, enthält die Operatorgestalt (2) ebenfalls die zu (1) gegebenen Anfangsbedingungen. Die allgemeine Lösung der zu (2) gehörigen homogenen Gleichung kann mit Hilfe der verallgemeinerten Exponentialfunktionen aufgeschrieben werden.

$$x(\lambda) = C_1 e^{u_1 \lambda} + C_2 e^{u_2 \lambda} + \ldots + C_k e^{u_k \lambda} \qquad k \leq m_1\,.$$

Hierbei sind die Operatoren $u_1, u_2, \ldots, u_k$ die jenige Wurzeln der sogenannten charakteristischen Gleichung

$$a_{m_1} u^{m_1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{4}$$

für welche die betreffenden Exponentialfunktionen existieren. Die Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sind beliebige konstante Operatoren, die zu den vorgeschriebenen Randebedingungen (1) angepasst werden müssen (siehe [2]).

Wir unterscheiden drei Fälle.

I. $k = m_1$. In diesem Falle ist die Differentialgleichung (2) logarithmisch. Zum Gewährleisten der Eindeutigkeit der Lösung von (1) müssen m_1 Randbedingungen gegeben werden.

II. $0 < k < m_1$. In diesem Falle ist die Differentialgleichung (2) gemischt. Zum Gewährleisten der Eindeutigkeit der Lösung von (1) müssen $k < m_1$ Randbedingungen angegeben werden.

III. $k = 0$. In diesem Falle ist die Differentialgleichung rein. Die Unizität der Lösung von (1) ist durch die gegebenen Anfangsbedingungen gesichert.

MIKUSIŃSKI hat bewiesen (siehe [1]), dass die charakteristische Gleichung (4) genau m Wurzeln hat, die alle in der Form

$$u = \beta_d s^{\frac{d}{q}} + \ldots + \beta_1 s^{\frac{1}{q}} + \beta_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \gamma_\varkappa \frac{1}{s^{\varkappa/q}} \tag{5}$$

geschrieben werden können, wobei die Operatoren β_i, $\gamma_\varkappa$ Zahlenkoeffizienten sind, d eine nichtnegative ganze Zahl und $q \leq m_1$ eine natürliche Zahl ist. Ferner hat er gezeigt, dass die entsprechenden Exponentialfuntionen für jene und nur für jene u Wurzeln nicht existieren, für welche entweder $\frac{d}{q} > 1$ und $\beta_d \neq 0$, oder $\frac{d}{q} = 1$ und β_d nicht reell ist.

Es entsteht die Frage, ob die Theorie der Mikusińskischen Operatordifferentialgleichungen auch zur Lösung solcher Gleichungen vom Typ (1) gebraucht werden kann, bei denen die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ nicht konstant, sondern beliebige stetige Funktionen $a_{\mu\nu}(\lambda)$ der Veränderlichen λ sind. Im allgemeinen ist dieses Problem sehr schwierig, die Operatordifferentialgleichung (2) hat dann nämlich variable Koeffizienten, und wir können sie mit Hilfe der verallgemeinerten Exponentialfunktionen im allgemeinen nicht lösen. Wir werden zeigen, dass für jene speziellen partiellen Differentialgleichungen, die in der Veränderlichen t von beliebiger Ordnung und in der Veränderlichen λ von erster Ordnung sind, weiterhin deren Koeffizienten $a_{\mu\nu}(\lambda)$ stetige Funktionen der Veränderlichen λ sind, die Mikusińskische Operatorenrechnung vorteilhaft zur Bestimmung der den gegebenen Bedingungen entsprechenden Lösungen angewandt werden kann. Hierzu werden wir eine etwas allgemeinere Definition des Begriffes der Exponentialfunktionen als in [2] gegeben wurde benötigen. Am Ende der Arbeit werden zwei ausgearbeitete Beispiele gegeben.

1. §. Die Differentialgleichung $x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = f(\lambda)$ und die Erweiterung des Begriffes der Exponentialfunktion

MIKUSIŃSKI definiert den Begriff der Exponentialfunktion folgendermassen (siehe [2]):

Es sei die Operatordifferentialgleichung

$$x'(\lambda) = wx(\lambda) \qquad \text{gegeben}. \tag{6}$$

Hierbei bedeutet w einen beliebigen konstanten Operator. Die Lösung der Gleichung (6) unter der Bedingung $x(0) = 1$ wird — falls sie existiert — eine verallgemeinerte Exponentialfunktion genannt und mit $x(\lambda) = e^{\lambda w}$ bezeichnet. Die Eindeutigkeit der Lösung kann leicht bewiesen werden.

Es ist weiterhin, falls $w \in C$, d. h. w eine stetige Funktion ist,

$$e^{\lambda w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k w^k}{k!},$$

und diese Potenzreihe konvergiert im operatorischen Sinne.

Im weiteren führen wir die folgende Bezeichung ein:

$$R(\lambda) = \frac{a_n(\lambda)\, s^n + a_{n-1}(\lambda)\, s^{n-1} + \ldots + a_0(\lambda)}{b_m(\lambda)\, s^m + b_{m-1}(\lambda)\, s^{m-1} + \ldots + b_0(\lambda)} \tag{7}$$

wobei n, m nichtnegative, ganze Zahlen sind, und die Operatoren $a_i(\lambda)$, $b_j(\lambda)$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0,1, \ldots, m)$ in einem beliebigen Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ definierte, stetige reelle Zahlenfunktionen sind.

Also bestimmt (7) eine Operatorfunktion, die im Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ definiert ist, und die für jeden in Frage kommenden Wert von λ den Quotienten zweier Polynomen des Differentiationsoperators s darstellt. Die Operatorfunktion ist im Definitionsbereich nicht notwendigerweise stetig, selbst dann nicht, wenn ihr Nenner für keinen Wert von λ verschwindet. Als Beispiel dient die für $\lambda \geqq 0$ definierte Operatorfunktion

$$R(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda s - 1}, & \text{für } \lambda > 0 \\ -1, & \text{für } \lambda = 0 \end{cases}$$

ie im Punkte $\lambda = 0$ im Sinne der Operatorenrechnung nicht stetig ist. Wäre ie nämlich hier stetig, so müsste — da

$$\frac{1}{\lambda s - 1} = \left\{ \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \right\}, \qquad (\lambda > 0)$$

mit der Einführung der Bezeichnung $\lambda = \dfrac{1}{n}$, der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \{n e^{nt}\}$$

existieren. Dieser Grenzwert existiert jedoch nicht, wie das von C. Ryll-Nardzewski in seinem berühmten Beispiel bewiesen wurde (siehe [2], S. 135).

Im folgenden werden wir mit stetigen Operatorfunktionen $R(\lambda)$ arbeiten. Auf die Stetigkeit von $R(\lambda)$ bezieht sich der folgende

Satz I. *Ist $b_m(\lambda)$ nirgends im Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ gleich Null, so ist (7) im Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ im Sinne der Operatorenrechnung stetig.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $n < m$ angenommen werden. Anderenfalls teilen wir nämlich (7) durch eine genügend gross gewählte, positive Potenz von s, wodurch die Stetigkeit im Sinne der Operatorenrechnung nicht beeinflusst wird.

Es sei also $n < m$. Da $b_m(\lambda)$ im Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ nirgends gleich Null ist, gilt

$$R(\lambda) = \frac{1}{b_m(\lambda)} \frac{a_n(\lambda)\, s^n + a_{n-1}(\lambda)\, s^{n-1} + \ldots + a_0(\lambda)}{s^m + \dfrac{b_{m-1}(\lambda)}{b_m(\lambda)} s^{m-1} + \ldots + \dfrac{b_0(\lambda)}{b_m(\lambda)}}. \tag{8}$$

Wie aus den Grundlagen der Operatorenrechnung bekannt ist, kann (8) — vom Faktor $\frac{1}{b_m(\lambda)}$ abgesehen — als Summe von Partialbrüchen der Form

$$(9) \qquad \frac{c_k(\lambda)}{[s-a_k(\lambda)]^p} = \left\{ c_k(\lambda) \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{a_k(\lambda)t} \right\}$$

geschrieben werden, wo $a_k(\lambda)$ die k-te Wurzel der Gleichung

$$(10) \qquad x^m + \frac{b_{m-1}(\lambda)}{b_m(\lambda)} x^{m-1} + \ldots + \frac{b_0(\lambda)}{b_m(\lambda)} = 0$$

bezeichnet. Die Koeffizienten der algebraischen Gleichung (10) sind im Intervall $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ stetige Funktionen von λ. Es folgt aus den bekannten algebraischen Zusammenhängen, dass auch die Wurzeln von (10) und infolgedessen die Koeffizienten $c_k(\lambda)$ in (9) ebenfalls in λ stetig sind (siehe [3], S. 148). Also kann (8) in Glieder der Form (9) zerlegt werden, die stetige Funktionen der Veränderlichen λ und t sind, mithin ist (8) im Sinne der Operatorenrechnung stetig. Dann ist aber (7) ebenfalls stetig. Im folgenden wird stets angenommen werden, dass $R(\lambda)$ stetig ist, und $b_m(\lambda)$ im untersuchten Intervall nirgends verschwindet. Dies bedeutet auch, dass $R(\lambda)$ im Sinne der Operatorenrechnung integrierbar ist.

Im folgenden untersuchen wir die Operatordifferentialgleichung

$$(11) \qquad x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = f(\lambda) \qquad (\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2).$$

Von der an der rechten Seite der Gleichung auftretenden Funktion $f(\lambda)$ wird angenommen, dass sie im Sinne der Operatorenrechnung im Intervall $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ stetig ist. Zuerst untersuchen wir die entsprechende homogene Gleichung

$$(12) \qquad x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = 0$$

Es besteht der folgende

Satz II. *Es sei $x_0(\lambda)$ eine Lösung von (12). Dann ist $kx_0(\lambda)$ ebenfalls eine Lösung von (12), wobei k ein beliebiger konstanter Operator ist. Genügt $x_1(\lambda)$ der Gleichung*

$$x'(\lambda) - R_1(\lambda)\, x(\lambda) = 0\,,$$

und genügt $x_2(\lambda)$ der Gleichung,

$$x'(\lambda) - R_2(\lambda)\, x(\lambda) = 0$$

so genügt die Operatorfunktion $x_1(\lambda)\, x_2(\lambda)$ der Gleichung

$$x'(\lambda) - [R_1(\lambda) + R_2(\lambda)]\, x(\lambda) = 0\,.$$

Weiterhin, falls $x_2(\lambda)$ nirgends verschwindet, genügt die Operatorfunktion $\frac{x_1(\lambda)}{x_2(\lambda)}$ der Gleichung

$$x'(\lambda) - [R_1(\lambda) - R_2(\lambda)]\, x(\lambda) = 0\,.$$

Genügt schliesslich $x_2(\lambda)$ der Differentialgleichung

$$x'(\lambda) - R_2(\lambda)\, x(\lambda) = 0.$$

und hat die Gleichung

$$x'(\lambda) - R_1(\lambda)\, x(\lambda) = 0$$

nur die triviale Null-Lösung, so haben die Differentialgleichungen

$$x'(\lambda) - [R_1(\lambda) + R_2(\lambda)]\, x(\lambda) = 0\,,$$

$$x'(\lambda) - [R_1(\lambda) - R_2(\lambda)]\, x(\lambda) = 0$$

auch nur die trivialen Null-Lösungen.

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt trivialerweise aus der Linearität von (12). Weiterhin, da $x_1(\lambda)$ und $x_2(\lambda)$ operatorisch differenzierbar sind, ist $x_1(\lambda)\, x_2(\lambda)$ ebenfalls operatorisch differenzierbar, und

$$[x_1(\lambda)\, x_2(\lambda)]' = x_1'(\lambda)\, x_2(\lambda) + x_1(\lambda)\, x_2'(\lambda) = R_1(\lambda)\, x_1(\lambda)\, x_2(\lambda) + x_1(\lambda) R_2(\lambda)\, x_2(\lambda) =$$
$$= [R_1(\lambda) + R_2(\lambda)]\, x_1(\lambda)\, x_2(\lambda)\,.$$

Es sei nun $x_2(\lambda)$ nirgends gleich Null, dann ist

$$\left(\frac{x_1(\lambda)}{x_2(\lambda)}\right)' = \frac{x_1'(\lambda)\, x_2(\lambda) - x_1(\lambda)\, x_2'(\lambda)}{x_2^2(\lambda)} =$$
$$= \frac{R_1(\lambda)\, x_1(\lambda)\, x_2(\lambda) - R_2(\lambda)\, x_1(\lambda)\, x_2(\lambda)}{x_2^2(\lambda)} = [R_1(\lambda) - R_2(\lambda)]\, \frac{x_1(\lambda)}{x_2(\lambda)}\,.$$

Im Spezialfall, wenn $R_1(\lambda) = 0$, $x_1(\lambda) = 1$, erhalten wir

$$\left(\frac{1}{x_2(\lambda)}\right)' = -\, R_2(\lambda)\, \frac{1}{x_2(\lambda)}\,.$$

Betrachten wir nun die letzte Behauptung des Satzes II.

Die Gleichung

$$x'(\lambda) - R_2(\lambda)\, x(\lambda) = 0$$

habe auch eine nicht-triviale Lösung $x_2(\lambda)$, während die Gleichung

$$x'(\lambda) - R_1(\lambda)\, x(\lambda) = 0$$

nur die triviale Lösung besitze. Nehmen wir an, dass die Gleichung

$$x'(\lambda) - [R_1(\lambda) - R_2(\lambda)] x(\lambda) = 0$$

auch nicht-triviale Lösung besitzt, und bezeichnen wir diese, mit $\bar{x}(\lambda)$. Dann ist im Sinne der Obengesagten $\bar{x}(\lambda) x_2(\lambda)$ eine nicht-triviale Lösung der Gleichung

$$x'(\lambda) - R_1(\lambda)\, x(\lambda) = 0\,.$$

Dies ist jedoch unmöglich, infolgedessen hat die Gleichung

$$x'(\lambda) - [R_1(\lambda) - R_2(\lambda)]\, x(\lambda) = 0$$

nur die triviale Null-Lösung. Ähnliche Überlegungen führen auch im Falle

$$x'(\lambda) - [R_1(\lambda) + R_2(\lambda)]\, x(\lambda) = 0$$

zum Ziel.[1]

[1] Aus der Beweismethode des Satzes II ist sofort ersichtlich, dass er richtig bleibt, wenn $R(\lambda)$ eine beliebige stetige Operatorfunktion ist. Hier genügt es $R(\lambda)$ in der Gestalt [7] anzunehmen.

Satz III. *Es sei $T(\lambda)$ eine im Intervall $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ stetige Funktion zweier Veränderlichen* $(n < m)$, d. h. $T(\lambda) = \{T(\lambda, t)\}$. *Dann besitzt die Operatorfunktion*

$$x(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi)\, d\xi]^k}{k!}, \qquad (\lambda_1 \leqq \lambda_0 \leqq \lambda_2) \tag{13}$$

die folgenden Eigenschaften:

I. $x(\lambda)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$x'(\lambda) - T(\lambda)\, x(\lambda) = 0 .$$

II. $x(\lambda_0) = 1$,

III. $x(\lambda)$ ist im Intervall $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ nirgends gleich Null.

Beweis. Die Eigenschaft II ergibt durch einfache Einsetzung. Betrachten wir die unendliche Reihe

$$x(\lambda) = 1 + \left\{\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi, t)\, d\xi\right\} + \frac{1}{2!}\left\{\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi, t)\, d\xi\right\}^2 + \ldots . \tag{14}$$

Wir zeigen, dass (14) im Sinne der Operatorenrechnung konvergent ist, und vom ersten Glied abgesehen, eine Funktion herstellt. Führen wir die Bezeichnung $Q(\lambda) = \{Q(\lambda, t)\} = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi)\, d\xi$ ein. Dann besteht infolge der Stetigkeit von $Q(\lambda)$:

$$|Q(\lambda)| \leqq M \qquad (0 \leqq t < t_0;\ |\lambda| \leqq \Lambda_0,\ \lambda_1 \leqq \Lambda_0 \leqq \lambda_2),$$

und

$$|Q^2(\lambda)| = \left|\left\{\int\limits_0^t Q(\lambda, \tau)\, Q(\lambda, t - \tau)\, d\tau\right\}\right| \leqq \int\limits_0^t M \cdot M\, d\tau \leqq M^2 \frac{t_0}{1!},$$

$$|Q^3(\lambda)| = \left|\left\{\int\limits_0^t Q^2(\lambda, \tau)\, Q(\lambda, t - \tau)\, d\tau\right\}\right| \leqq \int\limits_0^t M \cdot M^2 \frac{\tau}{1}\, d\tau \leqq M^3 \frac{t_0^2}{2!},$$

und

$$|Q^k(\lambda)| \leqq M^k \frac{t_0^{k-1}}{(k-1)!}, \quad (0 \leqq t \leqq t_0,\ |\lambda| \leqq \Lambda_0,\ \lambda_1 \leqq \Lambda_0 \leqq \lambda_2).$$

Das heisst, (14) ist vom ersten Glied abgesehen tatsächlich in jedem Gebiet $(0 \leqq t \leqq t_0,\ |\lambda| \leqq \Lambda_0)$ gleichmässig konvergent, ihre Glieder können nämlich durch die entsprechenden Glieder einer konvergenten Reihe majorisiert werden. Infolgedessen kann (14) in der Form

$$x(\lambda) = 1 + \{g(\lambda, t)\} \tag{15}$$

geschrieben werden, wobei $\{g(\lambda, t)\}$ irgendeine Funktion zweier Veränderlichen bezeichnet. Also kann (15) für keinen Wert von λ verschwinden, womit auch die Eigenschaft II nachgewiesen ist.[2] Die Reihe (14) ist im Intervall

[2] Die Beweismethode ist aus [2], Seite 155—156 entnommen.

$(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ gliedweise differenzierbar. Einfache Berechnungen ergeben, dass

$$[\{\int_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi, t)\, d\,\xi\}^k]' = k\{T(\lambda, t)\}\{\int_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi, t)\, d\,\xi\}^{k-1},$$

wo — wie im Vorausgehenden — die Potenz als Faltungsprodukt zu betrachten ist. So erhalten wir für die Ableitung von (14) nach der Veränderlichen λ:

$$x'(\lambda) = \{T(\lambda, t)\} + \{T(\lambda, t)\}\left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi, t)\, d\,\xi\right\} + \frac{1}{2!}\{T(\xi, t)\}\left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi, t)\, d\,\xi\right\}^2 +$$

$$(16) \qquad + \ldots = \{T(\lambda, t)\}\left[1 + \left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi, t)\, d\,\xi\right\} + \frac{1}{2!}\left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi, t)\, d\,\xi\right\}^2 + \ldots = \right.$$

$$= T(\lambda)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\int_{\lambda_0}^{\lambda} T(\xi)\, d\,\xi)^k}{k\,!}\right] = T(\lambda)\, x(\lambda)$$

da die durch gliedweise Differenzieren erhaltene Reihe ebenfalls fast gleichmässig konvergent ist. Damit ist Satz III vollständig bewiesen.

Satz IV. *Es sei $R(\lambda)$ ein im Intervall $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ definiertes Polynom des Operators s, d. h. es sei $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} a_k(\lambda) s^k$. Ist $N \leqq 1$, so genügt die Operatorfunktion*

$$(17) \qquad x(\lambda) = e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} a_0(\xi)\, d\xi}\, h^{-\int_{\lambda_0}^{\lambda} a_1(\xi)\, d\xi}$$

der Differentialgleichung

$$x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = 0$$

und erfüllt die Bedingung $x(\lambda_0) = 1$, ausserdem nimmt sie im Intervall $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ nirgends den Wert Null an. Hierbei ist $e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} a_0(\xi) d\xi}$ eine klassische Exponentialfunktion und h der Mikusińskische Verschiebungsoperator. Ist $N > 1$ so hat die Gleichung

$$x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = 0 \qquad (R(\lambda) \neq 0)$$

nur die triviale Null-Lösung.

Es sei zuerst $R(\lambda) = R_0(\lambda) = a_0(\lambda)$. Dann ist $x'(\lambda) - R_0(\lambda)\, x(\lambda) = 0$ eine schon vorher behandelte Differentialgleichung, für welche die Behauptungen von Satz IV. offensichtlich wahr sind. Es sei nun $R(\lambda) = R_1(\lambda) = a_1(\lambda)s$. Wie bekannt, genügt die Operatorfunktion $h^{-\lambda}$ der Operatordifferentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(18) \qquad y'(\lambda) - sy(\lambda) = 0$$

(siehe [2]). Machen wir von der folgenden bekannten Regel bezüglich des Differenzierens der Operatorfunktionen Gebrauch:

Ist die Operatorfunktion $f(\lambda)$ in $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ stetig differenzierbar, und ist die Zahlenfunktion $\varphi(\lambda)$ in $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ stetig differenzierbar, so ist die Operatorfunktion $F(\lambda) = f[\varphi(\lambda)]$ in $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ ebenfalls stetig differenzierbar, und

$$F'(\lambda) = f'[\varphi(\lambda)]\,\varphi'(\lambda). \tag{19}$$

Durch Wahl von $f(\lambda) = h^{-\lambda}$, $\varphi(\lambda) = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} a_1(\xi)d\xi$ kann auf Grund von (19)

$$\left[h^{-\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} a_1(\xi)\,d\xi}\right]' = a_1(\lambda)\,(h^{-\varphi(\lambda)})'_{\varphi(\lambda)} \tag{20}$$

geschrieben werden, woraus man unter Beachtung von (18)

$$\left[h^{-\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} a_1(\xi)\,d\xi}\right]' = sa_1(\lambda)\,h^{-\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} a_1(\xi)\,d\xi} = R_1(\lambda)\,h^{-\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} a_1(\xi)\,d\xi} \tag{21}$$

erhält. Die Erfüllung der Bedingung $x(\lambda_0) = 1$ ist durch einfaches Einsetzen nachweisbar. Schliesslich ist $x(\lambda) = h^{-\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} a_1(\xi)d\xi}$ für keinen Wert von λ gleich Null, da keine reelle Potenz des Verschiebungsoperators gleich Null sein kann.

Es sei nun $R(\lambda) = R_0(\lambda) + R_1(\lambda) = a_0(\lambda) + sa_1(\lambda)$. Unter Benutzung des zweiten Teiles von Satz II folgen direkt die Behauptungen von Satz IV für den Fall $N \leqq 1$.

Es sei schliesslich $N > 1$. Die Gleichung

$$x'(\lambda) - a_k(\lambda)\,s^k\,x(\lambda) = 0 \qquad (k > 1) \tag{22}$$

kann nur die triviale Lösung besitzen $(a_k(\lambda) \neq 0)$.

Nehmen wir nämlich das Gegenteil an, und es sei $x_k(\lambda)$ eine nichttriviale Lösung. Betrachten wir ein geschlossenes Teilentervall $\lambda_1^* \leqq \lambda \leqq \lambda_2^*$ des Intervalls $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$, in welchem $a_k(\lambda)$ und $x_k(\lambda)$ nicht den Wert Null annehmen. Wenden wir wieder die Operatordifferentiationsregel (19) für zusammengesetzte Funktionen an, mit $F(\lambda) = x_k[\varphi(\lambda)]$, wobei $\varphi(\lambda)$ die inverse Funktion von $\Phi(\lambda) = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} a_k(\xi)\,d\xi$ $(\lambda_1^* \leqq \lambda \leqq \lambda_2^*)$ bezeichnet, die im untersuchten Intervall eindeutig ist. Dann erhalten wir

$$\frac{d}{d\lambda}\,x_k[\varphi(\lambda)] = [x_k[\varphi(\lambda)]]'_{\varphi(\lambda)}\frac{1}{\Phi'(\lambda)} = [x_k[\varphi(\lambda)]]'_{\varphi(\lambda)}\frac{1}{a_k(\lambda)} \tag{23}$$

woraus, unter Berücksichtigung von (22)

$$\frac{d}{d\lambda}\,x_k[\varphi(\lambda)] = s^k\,x_k[\varphi(\lambda)]\,, \qquad (k > 1) \tag{24}$$

in irgendeinem Intervall $\varphi(\lambda_1^*) \leqq \lambda \leqq \varphi(\lambda_2^*)$. Die Gleichung (24) kann jedoch in jedem endlichen Intervall auch nur durch die Funktion identisch gleich Null erfüllt werden (siehe [2]). Auf solche Weise sind wir zu einem Widerspruch gelangt, woraus folgt, dass in jedem Intervall, wo $a_k(\lambda)$ nicht den Wert Null annimmt, $x_k(\lambda) = 0$. Aus der Stetigkeit der Lösung von (22) folgt jedoch sofort, dass $x_k(\lambda)$ auch an den isolierten Nullstellen von $a_k(\lambda)$ gleich Null ist.

Hat $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ ein Teilintervall, in welchem $a_k(\lambda) \equiv 0$ ist, so ist dort wegen (22)

$$x_k(\lambda) = \text{const.}$$

Wiederum die Stetigkeit von $x_k(\lambda)$ in $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ berücksichtigend, erhalten wir schliesslich

$$x_k(\lambda) \equiv 0 \qquad (\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2) \tag{25}$$

woraus auf Grund einfacher Überlegungen folgt, dass die Behauptung von Satz IV für den Fall $N > 1$ ebenfalls richtig ist.

Aus den Sätzen II., III., IV folgt sofort der folgende

Satz V. *Die Gleichung* $x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = 0$ *hat dann und nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn in* $R(\lambda)$ $n \leqq m + 1$. *Die nichttriviale Lösung kann in keinem Punkt verschwinden.*

Satz VI. *Unizitätssatz. Die Operatordifferentialgleichung* $x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = 0$ *hat höchstens eine Lösung, die die Bedingung*

$$x(\lambda_0) = k \qquad (\lambda \leqq \lambda_0 \leqq \lambda)$$

erfüllt, wobei k ein beliebiger Operator ist.

Beweis. Für $k = 0$ folgt aus Satz V., dass die gesuchte einzige Lösung die triviale Lösung ist. Es sei nun $k \neq 0$, und nehmen wir an, dass zwei Lösungen existieren, die wir mit $x_1(\lambda)$ und $x_2(\lambda)$ bezeichnen. Dann besteht

$$\begin{aligned} x_1'(\lambda) &= R(\lambda)\, x_1(\lambda)\,, \\ x_2'(\lambda) &= R(\lambda)\, x_2(\lambda)\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Daraus folgt

$$x_1'(\lambda)\, x_2(\lambda) = R(\lambda)\, x_1(\lambda)\, x_2(\lambda)$$

$$x_2'(\lambda)\, x_1(\lambda) = R(\lambda)\, x_2(\lambda)\, x_1(\lambda)\,.$$

Bilden wir die Differenz der beiden Gleichungen:

$$x_1'(\lambda)\, x_2(\lambda) - x_2'(\lambda)\, x_1(\lambda) = 0\,. \tag{27}$$

Da $x_2(\lambda)$ in keinem Punkt des Intervalls $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ verschwindet, folgt aus (27)

$$\frac{x_1'(\lambda)\, x_2(\lambda) - x_2'(\lambda)\, x_1(\lambda)}{x_2^2(\lambda)} = \left(\frac{x_1(\lambda)}{x_2(\lambda)}\right)' = 0$$

d. h.

$$\frac{x_1(\lambda)}{x_2(\lambda)} = \text{const., und}$$

$$x_1(\lambda) = \text{const}\, x_2(\lambda)\,. \tag{28}$$

Da
$$x_1(\lambda_0) = \text{const}\, x_2(\lambda_0) = k\,,$$
also ist
$$\text{const} = 1$$
und
$$x_1(\lambda) = x_2(\lambda)\,.$$

Die Sätze II—VI ermöglichen die Erweiterung des Begriffes der Mikusińskischen Exponentialfunktion für die Differentialgleichung

$$x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = 0\,.$$

Definition. Wir nennen diejenige Lösung der Differentialgleichung

(30) $$x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = 0$$

welche die Bedingung

(31) $$x(\lambda_0) = 1$$

erfüllt — falls sie existiert — eine verallgemeinerte Exponentialfunktion, und bezeichnen sie mit dem Symbol

(32) $$x(\lambda) = e^{\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi)\, d\xi} \qquad (\lambda_1 \leqq \lambda, \lambda_0 \leqq \lambda_2)\,.$$

Aus den vorausgehenden Sätzen folgt, dass bezüglich der verallgemeinerfen Exponentialfunktion die Operationsregeln der gewöhnlichen Exponentialtunktionen gültig bleiben. Jede Lösung von (30) lässt sich in der Form

$$ke^{\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi)\, d\xi}$$

schreiben, wobei k ein beliebiger konstanter Operator ist.

Bemerkung.

MIKUSIŃSKI benützt zur Definition der Exponentialfunktion die Bedingung

$$x(0) = 1\,.$$

Es erfüllt nämlich jede Lösung der Gleichung

$$x'(\lambda) - wx(\lambda) = 0 \qquad (\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$$

diese Gleichung auch im Intervall $(-\infty < \lambda < \infty)$, während bei der Differentialgleichung (30) der Definitionsbereich der Operatorfunktion $R(\lambda)$ nicht unbedingt den Nullpunkt enthalten muss. Enthält im Spezialfall das endliche oder unendliche Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ den Nullpunkt, so kann man selbstverständlich in (31) und (32) auch $\lambda_0 = 0$ wählen.

Nun gehen wir zur Besprechung der inhomogenen Operatordifferentialgleichung

(33) $$x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = f(\lambda)$$

über. Analog den Gleichungen mit konstanten Koeffizienten (siehe [2]), lässt sich die allgemeine Lösung von (33), falls sie existiert, als die Summe einer partikulären Lösung $x_0(\lambda)$ der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung aufschreiben:

(34) $$x(\lambda) = x_0(\lambda) + Ce^{\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi)\, d\xi} \qquad (C \text{ ist ein beliebiger Operator})$$

Es besteht der folgende.

Satz VII. *Ist $f(\lambda)$ $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ in der Gleichung* (33) *eine beliebige stetige Operatorfunktion, und hat die entsprechende homogene Gleichung*

$$x'(\lambda) - R(\lambda)\, x(\lambda) = 0$$

eine nichttriviale Lösung, so existiert auch die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung von der Form (34), wobei die partikuläre Lösung $x_0(\lambda)$ durch die Methode der Variation der Konstanten bestimmt werden kann.

Beweis. Es existiere die Exponentialfunktion $e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi)d\xi}$. Die Methode der Variation der Konstanten anwendend, sei

$$x_0(\lambda) = C(\lambda) \exp \left[\int_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi)\, d\, \xi \right]. \tag{35}$$

Das Einsetzen von (35) in die entsprechende homogene Gleichung ergibt

$$C'(\lambda) \exp \left[\int_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi)\, d\, \xi \right] + C(\lambda)\, R(\lambda) \exp \left[\int_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi) d\xi \right] -$$

$$- C(\lambda)\, R(\lambda) \exp \left[\int_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi)\, d\, \xi \right] = f(\lambda)\,,$$

woraus

$$C'(\lambda) = f(\lambda) \exp \left[- \int_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi)\, d\, \xi \right],$$

und

$$C(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(u) \exp \left[- \int_{\lambda_0}^{u} R(\xi)\, d\, \xi \right] du\,. \tag{36}$$

Die allgemeine Lösung von (33) ist also

$$x(\lambda) = \left[C + \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(u) \exp \left[- \int_{\lambda_0}^{u} R(\xi)\, d\, \xi \right] du \right] \exp \left[\int_{\lambda_0}^{\lambda} R(\xi)\, d\, \xi \right]. \tag{37}$$

Bemerkung. Falls die zur Gleichung (33) gehörige homogene Gleichung keine nichttriviale Lösung hat, so lässt sich die partikuläre Lösung $x_0(\lambda)$ nicht unmittelbar aufschreiben, sie muss sogar bei gegebenem stetigem $f(\lambda)$ nicht einmal notwendigerweise existieren, wie es aus dem folgenden Beispiel ersichtlich ist:

$$x'(\lambda) - s^2 \lambda\, x(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{für } -1 \leqq \lambda \leqq 0\,, \\ -\sin \lambda - s^2\, \lambda \cos \lambda, & \text{für } \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1\,. \end{cases} \tag{38}$$

Die in der rechten Seite von (38) auftretende Funktion ist im Intervall $-1 \leqq \leqq \lambda \leqq 1$ stetig. Die entsprechende homogene Gleichung hat nur die triviale Null-Lösung. Wir zeigen, dass (38) für das Intervall $-1 \leqq \lambda \leqq 1$ unlösbar ist. Betrachten wir nämlich zuerst das Intervall $-1 \leqq \lambda \leqq 0$. Dort ist

$$x(\lambda) = 0$$

die Lösung von (38). Nun betrachten wir das Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Dort ist die einzige Lösung von (38)

$$x(\lambda) = \cos \lambda$$

wie das durch Einsetzen ersichtlich ist. Die im Intervall $-1 \leqq \lambda \leqq 1$ definierte Funktion

$$x(\lambda)=\begin{cases}0, & \text{für} \quad -1\leqq\lambda\leqq 0\,,\\ \cos\lambda, & \text{für} \quad 0\leqq\lambda\leqq 1\end{cases}$$

kann jedoch nicht die Lösung von (38) sein, da sie in $\lambda = 0$ nicht stetig ist. Mikusiński zeigt in [2] ein analoges Beispiel für den Fall der Operatordifferentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wie ersichtlich, kann auch im Falle einer Gleichung mit variablen Koeffizienten ein solches Beispiel gegeben werden.

§. 2. Die Lösung partieller Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten

Betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(\lambda)\,\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,t)}{\partial\lambda^{\mu}\,\partial t^{\nu}}=\varphi(\lambda,t)\,;\quad (0\leqq t<\infty\,;\ \lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2)\,, \tag{39}$$

wo die Koeffizienten $a_{\mu\nu}(\lambda)$ im gegebenen Intervall beliebige stetige Funktionen von λ sind. Es wird jedoch die folgende Einschränkung gemacht:

Ist ν_0 jener Wert von ν, für welchen $a_{1\nu_0}(\lambda)\not\equiv 0$, und $a_{1\nu}(\lambda)\equiv 0$ für $\nu>\nu_0$, so nehmen wir an, dass $a_{1\nu_0}(\lambda)$ im betrachteten Intervall nirgends verschwindet.

Nun kann die partielle Differentialgleichung (39) ganz analog zu (1) in der Operatorengestalt

$$A_1(\lambda)\,x'(\lambda)+A_0(\lambda)\,x(\lambda)=\{\varphi(\lambda,t)\}+\sum_{\varkappa=0}^{n-1}s^{n-\varkappa-1}\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}a_{\mu,n-\varkappa+\nu}\,\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^{\mu}\,\partial t^{\nu}} \tag{40}$$

geschrieben werden, wobei

$$A_\mu(\lambda)=a_{\mu n}(\lambda)\,s^n+\ldots+a_{\mu 0}(\lambda)\,,\qquad (\mu=0,1.) \tag{41}$$

Schreiben wir (40) in der Form

$$x'(\lambda)+\frac{A_0(\lambda)}{A_1(\lambda)}x(\lambda)=\frac{\{\varphi(\lambda,t)\}}{A_1(\lambda)}+\frac{\displaystyle\sum_{\varkappa=0}^{n-1}s^{n-\varkappa-1}\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}a_{\mu,n-\varkappa+\nu}\,\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^{\mu}\,\partial t^{\nu}}}{A_1(\lambda)} \tag{42}$$

so ist auf Grund von (41) und unserer Annahme bezüglich $a_{1\nu_0}(\lambda)$ sofort ersichtlich, dass (39) in der Operatorengestalt eine Gleichung vom Typ (33) ergibt. Die Anfangsbedingungen der Gleichung (39) sind in der Operatordifferentialgleichung (42) enthalten. Falls die zu (42) gehörige homogene Gleichung eine nichttriviale Lösung besitzt, so ist die allgemeine Lösung von (42)

$$x(\lambda)=C\exp\left[-\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{A_0(\xi)}{A_1(\xi)}\,d\xi\right]+x_0(\lambda)\,. \tag{43}$$

Zur Sicherung der Eindeutigkeit der Lösung muss noch die Randbedingung $x(\lambda_0)=\{x(\lambda_0,t)\}$ angegeben werden. Analog zu Mikusiński [2] führen wir die folgende Definition ein:

Definition. Falls die zu (42) gehörige homogene Gleichung eine nicht-triviale Lösung besitzt, so nennen wir die partielle Differentialgleichung (39) logarithmisch, anderenfalls jedoch rein. Aus den bisher Gesagten folgt der

Unizitätssatz VIII. *Es sei die partielle Differentialgleichung (39), mit der Lösung $x(\lambda, t)$, deren partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial \lambda^\mu \partial t^\nu} \qquad (\mu = 0, 1;\ \nu = 0, 1, \ldots, n)$$

im Intervall $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2; 0 \leqq t < \infty)$ stetig sind gegeben. Ist (39) logarithmisch, so bestimmen die Anfangsbedingungen

$$(44) \qquad \sum_{\mu=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} a_{\mu,n-\varkappa+\nu}(\lambda) \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu \partial t^\nu} = g_\varkappa(\lambda) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots n-1),$$

sowie die Randbedingung

$$(45) \qquad x(\lambda_0, t) = v(t) \qquad (\lambda_1 \leqq \lambda_0 \leqq \lambda_2)$$

wobei $g_\varkappa(\lambda)$ und $v(t)$ gegebene Funktionen sind, eindeutig die Lösung von (39) falls diese existiert. Ist (39) rein, so bestimmen die Anfangsbedingungen (44) eindeutig die Lösung von (39), falls diese existiert.

Die Anfangsbedingungen (44) sind in allgemeiner Form gegeben. Es entsteht die Frage, wann diese in der einfacheren Cauchyschen Form

$$(46) \qquad \frac{\partial^\varkappa x(\lambda, 0)}{\partial t^\varkappa} = h_\varkappa(\lambda) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1)$$

angegeben werden können. Analog zu Mikusiński [2] nennen wir in dem Falle in dem die Anfangsbedingungen in der Cauchyschen Form angegeben werden können die Gleichung (39) nicht-restriktiv, im sonstigen Falle jedoch restriktiv. Die Kriterien der Restriktivität wurden von Mikusiński [2] gegeben, und diese bleiben offensichtlich auch für Gleichungen der Form (39) gültig:

Die partielle Differentialgleichung (39) ist dann und nur dann nicht-restriktiv, wenn $\sigma_{1n}(\lambda) \equiv 0$.

Dies bedeutet, dass falls $\sigma_{1n}(\lambda) \equiv 0$, so sind die Bedingungen (44) und (46) äquivalent. In Kenntnis der Funktionen $g_\varkappa(\lambda)$ können die Funktionen $h_\varkappa(\lambda)$ eindeutig bestimmt werden, und auch umgekehrt.

Nun beweisen wir einen Satz, den Mikusiński bezüglich partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten angegeben hat (siehe [2]).

Satz IX. *Ist die partielle Differentialgleichung rein, so ist sie nicht-restriktiv.*

Beweis. Ist (39) rein, so hat die zu (42) gehörige homogene Gleichung nur die triviale Lösung. Aus unseren vorausgehenden Sätzen folgt, dass dies nur in dem Falle möglich ist, wenn in (41) von den Polynomen des Operators s der Grad von $A_0(\lambda)$ mindestens um 2 den Grad von $A_1(\lambda)$ übertrifft. Dann ist jedoch sicherlich $\sigma_{1n}(\lambda) = 0$, infolgedessen ist (39) nicht-restriktiv.

Bemerkung. Eine logarithmische Gleichung kann nicht-restriktiv, oder auch restriktiv sein. Im ersten Falle ist der Grad von $A_0(\lambda)$ nur um 1 höher, als der Grad von $A_1(\lambda)$. Im letzteren Falle ist der Grad von $A_1(\lambda)$ mindestens gleich dem Grade von $A_0(\lambda)$. Im folgenden bringen wir zwei Beispiele.

Beispiel 1.

Lösen wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial x(\lambda, t)}{\partial \lambda} + \lambda \frac{\partial x(\lambda, t)}{\partial t} = 0 \qquad (0 \leq t < \infty\,;\ \lambda \geq 0)$$

mit den Bedingungen

$$x(\lambda, 0) = 0\,,$$
$$x(0, t) = t^2.$$

In der Operatorengestalt lautet diese Differentialgleichung:

$$x'(\lambda) + \lambda s x(\lambda) = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$x(\lambda) = Ce^{-s\frac{\lambda^2}{2}}\,.$$

Da

$$x(0) = \{t^2\}\,,$$

so ist

$$C = \{t^2\}\,,$$

und

$$x(\lambda) = \{t^2\}\, e^{-s\frac{\lambda^2}{2}}$$

woraus, auf Grund der Eigenschaften des Verschiebungsoperators:

$$x(\lambda, t) = \begin{cases} 0\,, & \text{für } 0 \leqq t < \dfrac{\lambda^2}{2}\,, \\[2ex] \left(t - \dfrac{\lambda^2}{2}\right)^2, & \text{für } \quad t \geqq \dfrac{\lambda^2}{2}\,. \end{cases}$$

Beispiel 2.

Lösen wir die Gleichung

$$\frac{\partial^3 x(\lambda, t)}{\partial \lambda\, \partial t^2} + \lambda^2 \frac{\partial x(\lambda, t)}{\partial \lambda} - x(\lambda, t) = 0\,, \qquad (0 \leq t < \infty\,;\ \lambda \geqq 0)\,. \tag{47}$$

Diese Gleichung ist in der Operatorengestalt:

$$s^2 x'(\lambda) + \lambda^2 x'(\lambda) - x(\lambda) = s\, \frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 x(\lambda, 0)}{\partial \lambda\, \partial t}\,. \tag{48}$$

Die Gleichung (47) ist restriktiv, also müssen die Anfangsbedingungen in der allgemeinen Form gegeben werden. Es seien die Anfangsbedingungen:

$$\frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial \lambda} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 x(\lambda, 0)}{\partial \lambda\, \partial t} = 0\,.$$

Folgendermassen kann (48) auf die Gestalt

$$x'(\lambda) - \frac{1}{s^2 + \lambda^2}\, x(\lambda) = 0 \tag{49}$$

gebracht werden.

Da

$$\frac{1}{s^2 + \lambda^2} = \left\{\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t\right\},$$

so ist die allgemeine Lösung von (49):

$$x(\lambda) = C \exp\left[\left\{\int_0^\lambda \frac{1}{\xi} \sin \xi t \, d\xi\right\}\right].$$

Die Bezeichnung für den Integralsinus einführend, erhalten wir:

$$x(\lambda) = C \exp [\{\mathrm{Si}\,(t\,\lambda)\}].$$

Zur Bestimmung der Konstanten C geben wir die Randbedingung an:

$$x(0) = \frac{1}{1+s^2} = \{\sin t\}\,.$$

Also ist

$$x(0) = \{\sin t\} = C\,,$$

$$x(\lambda) = \frac{1}{1+s^2} \exp [\{\mathrm{Si}\,(t\,\lambda)\}]\,.$$

Unter Beachtung, dass

$$\exp [\{\mathrm{Si}\,(t\,\lambda)\}] = 1 + \{\mathrm{Si}\,(t\,\lambda)\} + \frac{1}{2!}\{\mathrm{Si}\,(t\,\lambda)\}^2 + \ldots,$$

erhalten wir das Endergebnis:

$$x(\lambda) = \{x(\lambda, t)\} = \{\sin t\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{\sin t\}\,\{\mathrm{Si}\,(t\,\lambda)\}^k}{k!}\,,$$

somit haben wir den vorgeschriebenen Bedingungen genügende Lösung von (47) erhalten.

(Eingegangen: 29. Mai, 1963)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Mikusiński, J.: «Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations aux dérivées partielles,» *Studia Mathematica* **12** (1951) 227—270.

[2] Mikusiński, J.: *Operatorenrechnung*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

]3] Weber, H.: *Lehrbuch der Algebra I*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1912.

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ MIKUSIŃSKI К РЕШЕНИЮ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

T. FÉNYES

Резюме

В этой работе рассматривается применение вычисления операторов Mikusiński к решению специальных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Исследуемые уравнения

имеют произвольный порядок относительно одного из независимых переменных и постоянные коэффициенты при нем, относительно другого переменного первый порядок, а коэффициенты при нем являются произвольными непрерывными функциями этого переменного. Автор доказывает, что эти дифференциальные уравнения в частных производных могут быть решены с помощью экспоненциальных функций, несколько более обобщенно определенных, чем основные обобщенные экспоненциальные функции типа MIKUSIŃSKI.

Работа содержит и численные примеры.

GENERALIZATION OF A RESULT OF ACZÉL, GHERMĂNESCU AND HOSSZÚ

by

D. Ž. DJOKOVIĆ[1]

1. Introduction

J. Aczél, M. Ghermănescu and M. Hosszú in their paper [1] have considered the basic cyclic functional equation

$$(1.1)\quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) + \ldots + F(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$$

and the derived equation

$$(1.2)\quad \begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_p) + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}) + \ldots \\ &+ F(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n) + F(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1) + \ldots \\ &+ F(x_n, x_1, \ldots, x_{p-1}) = 0 \,, \end{aligned}$$

where p and n $(> p)$ are two arbitrary positive integers.

In the mentioned paper they have formulated three theorems, the second being:

The most general solution of (1.2) *in the case when* $n \geqq 2p - 1$ *is given by*

$$(1.3)\quad F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f(x_2, x_3, \ldots, x_p)$$

where f *is an arbitrary function.*

This theorem (and two others) are proved under the following assumptions:

1° $x_i \in S$, where S is an arbitrary non-empty set;

2° The values of the function F lie in an additive abelian group $\mathbf{M}$;

3° The group $\mathbf{M}$ is such that the equation $mX = A$ $(X, A \in \mathbf{M})$ has a unique solution $X = A/m$ for every $m \leqq n$ $(m \in N)$.

In the proof of first and second theorems it is sufficient to take $m = n$ in 3°.

The idea of the proof of the third theorem, concerning equation (1.2) in case $p < n < 2p - 1$, is shown in [1] for two particular values of n and p. For details of the proof in the general case and for similar equations of. M. Hosszú [2] (also there the same assumptions 1°, 2° and 3° are made).

In the second paragraph of this paper we shall solve the equation (1.2) for $n \geqq 2p - 1$, under the assumptions 1° and 2° only. In the third paragraph we shall solve the generalized equation (1.2) when all functions are taken to be different. Finally, we shall investigate the equation (1.2) with 1° and 2° in the case $p < n < 2p - 1$ for some special values of difference $2p - 1 - n$.

[1] Belgrade.

2. Equation (1.2) for $n \geqq 2p - 1$

We have the following

Theorem 1. *If $n \geqq 2p-1$, then the general solution of the functional equation* (1.2), *under the hypotesis* 1° *and* 2°, *is given by*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f(x_2, x_3, \ldots, x_p) + A\,, \tag{2.1}$$

where f is an arbitrary function and A an arbitrary element of $\mathbf{M}$ *such that $nA = 0$.*

Proof. Direct calculation shows that every function F of the form (2.1) satisfies the functional equation (1.2). We have to prove the converse, i.e. that it follows from (1.2) that F has the form (2.1).

Let c be a fixed element from S. Assuming that $n \geqq 2p - 1$ and putting $x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_n = c$ in (1.2), we obtain

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_p) + F(x_2, x_3, \ldots, x_p, c) + \ldots + \\ &+ F(x_p, c, c, \ldots, c) + (n - 2p + 1)\, F(c, c, \ldots, c) + \\ &+ F(c, c, \ldots, c, x_1) + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2) + \ldots + \\ &+ F(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

If we substitute $x_p = c$ in the last equation, we get

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) + \ldots + \\ &+ F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) + (n - 2p + 2)\, F(c, c, \ldots, c) + \\ &+ F(c, c, \ldots, c, x_1) + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2) + \ldots + \\ &+ F(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Subtracting (2.3) from (2.2), we find

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots x_p) = {} & F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) - F(x_2, x_3, \ldots, x_p, c) + \\ & + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) - F(x_3, x_4, \ldots, x_p, c, c) + \ldots + \\ & + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - F(x_p, c, c, \ldots, c) + F(c, c, \ldots, c)\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Putting

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = {} & F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) + \\ & + \ldots + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c)\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$A = F(c, c, \ldots, c)\,, \tag{2.6}$$

the equality (2.4) takes on the form (2.1). For $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c$, the equation (1.2) gives $nA = 0$.

Thus the theorem is proved.

3. Generalization

Let us consider following functional equation

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_p) + F_2(x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}) + \ldots + \\ &+ F_{n-p+1}(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n) + F_{n-p+2}(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1) + \\ &+ \ldots + F_n(x_n, x_1, \ldots, x_{p-1}) = 0 \qquad (p < n), \end{aligned} \tag{3.1}$$

under the hypothesis 1° and 2° of paragraph 1 (the hypothesis 2° holds for every function F_i).

Theorem 2. *The general solution of the functional equation* (3.1) *in the case* $n \geqq 2p-1$ *is given by*

$$
\begin{aligned}
&F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \\
&= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f_{i+1}(x_2, x_3, \ldots, x_p) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\
&F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \\
&= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f_1(x_2, x_3, \ldots, x_p),
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

where f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *are arbitrary functions defined on* S *with values in* M.

Proof. Using the conventions $F_i \equiv F_{i+n}$, $x_i \equiv x_{i+n}$, the equation (3.1) can be written in the form

$$
\begin{aligned}
&F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}) + F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p}) + \ldots + \\
&+ F_{i+n-p}(x_{i+n-p}, x_{i+n-p+1}, \ldots, x_{i+n-1}) + \\
&+ F_{i+n-p+1}(x_{i+n-p+1}, x_{i+n-p+2}, \ldots, x_{i+n-1}, x_i) + \ldots + \\
&+ F_{i+n-1}(x_{i+n-1}, x_i, \ldots, x_{i+p-2}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Putting $x_{i+p} = x_{i+p+1} = \ldots = x_{i+n-1} = c$ in (3.3), where c is a fixed element of S, we obtain

$$
\begin{aligned}
&F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}) + F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p-1}, c) + \\
&+ F_{i+2}(x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+p-1}, c, c) + \ldots + \\
&+ F_{i+p-1}(x_{i+p-1}, c, c, \ldots, c) + F_{i+p}(c, c, \ldots, c) + \\
&+ F_{i+p+1}(c, c, \ldots, c) + \ldots + F_{i+n-p}(c, c, \ldots, c) + \\
&+ F_{i+n-p+1}(c, c, \ldots, c, x_i) + F_{i+n-p+2}(c, c, \ldots, c, x_i, x_{i+1}) + \\
&+ \ldots + F_{i+n-1}(c, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-2}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

The substitution $x_{i+p-1} = c$ in (3.4) gives

$$
\begin{aligned}
&F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-2}, c) + F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p-2}, c, c) + \ldots + \\
&+ F_{i+p-2}(x_{i+p-2}, c, c, \ldots, c) + F_{i+p-1}(c, c, \ldots, c) + \\
&+ F_{i+p}(c, c, \ldots, c) + \ldots + F_{i+n-p}(c, c, \ldots, c) + \\
&+ F_{i+n-p+1}(c, c, \ldots, c, x_i) + F_{i+n-p+2}(c, c, \ldots, c, x_i, x_{i+1}) + \\
&+ \ldots + F_{i+n-1}(c, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-2}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Subtracting (3.5) from (3.4), we get the formula

$$
\begin{aligned}
&F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}) = \\
&= F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-2}, c) - F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p-1}, c) + \\
&+ F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p-2}, c, c) - F_{i+2}(x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+p-1}, c, c) + \ldots + \\
&+ F_{i+p-2}(x_{i+p-2}, c, c, \ldots, c) - F_{i+p-1}(x_{i+p-1}, c, c, \ldots, c) + \\
&+ F_{i+p-1}(c, c, \ldots, c)
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

which holds for every $i = 1, 2, \ldots, n$.

Let us put now

$$
\begin{aligned}
g_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) + \\
+ F_{i+1}(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) + \ldots + \\
+ F_{i+p-2}(x_{p-1}, c, c, \ldots, c),
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

$$
A_i = F_{i+p-1}(c, c, \ldots, c). \tag{3.8}
$$

Since $F_i \equiv F_{i+n}$, we conclude that $g_i \equiv g_{i+n}$. Putting in (3.1) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c$, we find

$$
A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0. \tag{3.9}
$$

According to (3.7) and (3.8), the formula (3.6) can be written in the form

$$
F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - g_{i+1}(x_2, x_3, \ldots, x_p) + A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.10}
$$

Finally, with the notations

$$
\begin{aligned}
f_1 &= g_1, \\
f_2 &= g_2 - A_1, \\
f_3 &= g_3 - A_1 - A_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n &= g_n - A_1 - A_2 - \ldots - A_{n-1},
\end{aligned}
$$

(3.10) can be written in the form

$$
F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f_{i+1}(x_2, x_3, \ldots, x_p) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ f_1 = f_{n+1}). \tag{3.11}
$$

Since the form (3.11) is identical with the form (3.2) we have proved that (3.2) is the consequence of (3.1). Conversely, the direct calculation shows that the function (3.2) satisfies the equation (3.1) for arbitrary f_i.

The proof of Theorem 2 is finished.

4. Equation (1.2) for $p < n < 2p - 1$

The case $p < n < 2p - 1$ of equation (1.2) is much more difficult. For that case we have proved the following three theorems.

Theorem 3. *If $n = 2p - 2 > p$ and if we admit the hypotheses 1°, 2° and 3° with $m = 2$, then the general solution of* (1.2) *is*

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = G_0(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - G_0(x_2, x_3, \ldots, x_p) + \\
+ G_1(x_1, x_p) - G_1(x_p, x_1) + A \qquad (nA = 0).
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Theorem 4. *If $n = 2p - 3 > p$ and if we admit only the hypotheses 1° and 2°, the general solution of* (1.2) *is*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = G_0(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - G_0(x_2, x_3, \ldots, x_p) + \\ + G_1(x_1, x_{p-1}, x_p) - G_1(x_p, x_1, x_2) + A \qquad (nA = 0). \tag{4.2}$$

Theorem 5. *If $n = 2p - 4 > p$ and if we admit the hypotheses $1°$, $2°$ and $3°$ with $m = 2$, then the general solution of* (1.2) *is*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = G_0(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - G_0(x_2, x_3, \ldots, x_p) + \\ + G_1(x_1, x_{p-2}, x_{p-1}, x_p) - G_1(x_p, x_1, x_2, x_3) + \\ + G_2(x_1, x_2, x_{p-1}, x_p) - G_2(x_{p-1}, x_p, x_1, x_2) + A \; (nA=0) \tag{4.3}$$

In formulas (4.1), (4.2) and (4.3) G_0, G_1 and G_2 are arbitrary functions.

These theorems suggest that the following conjecture is true:

If $p < n < 2p - 1$ and n is odd then under the hypoteses $1°$ and $2°$ the general solution of (1.2) *is*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = A + G_0(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - G_0(x_2, x_3, \ldots, x_p) + \\ + \sum_{k=1}^{p-(n+1)/2} \{G_k(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{n-p+k+1}, \ldots, x_{p-1}, x_p) - \\ - G_k(x_{p-k+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_{2p-n+k})\} \qquad (nA = 0). \tag{4.4}$$

If $p < n < 2p - 1$ and n is even then under the hypotheses $1°$, $2°$ and $3°$ with $m = 2$ the general solution of (1.2) *is*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = A + G_0(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - G_0(x_2, x_3, \ldots, x_p) + \\ + \sum_{k=1}^{p-n/2} \{G_k(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{n-p+k+1}, \ldots, x_{p-1}, x_p) - \\ - G_k(x_{p-k+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_{2p-n-k})\} \qquad (nA = 0) \tag{4.5}$$

In the following two paragraphs we shall prove Theorems 3 and 4. We omit the proof of Theorem 5.

5. Proof of Theorem 3

Using the same procedure as in section 2, we find for this case

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = [F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) - F(x_2, x_3, \ldots, x_p, c) + \\ + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) - F(x_3, x_4, \ldots, x_p, c, c) + \\ + \ldots + \\ + F(x_{p-2}, x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - F(x_{p-1}, x_p, c, c, \ldots, c)] + \\ + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - F(x_p, c, c, \ldots, c, x_1) + \\ + F(c, c, \ldots, c, x_1). \tag{5.1}$$

The square bracket has the form (4.1). In order to reduce the remaining terms to this form, we put in (1.2)

$$\text{(i)}\ x_2 = x_3 = \ldots = x_{p-1} = x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_n = c;$$

$$\text{(ii)}\ x_2 = x_3 = \ldots = x_{p-1} = x_p = \ldots = x_n = c;$$

$$\text{(iii)}\ x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1} = x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_n = c\,,$$

and thus we obtain

$$\begin{aligned} &F(x_1, c, c, \ldots, c, x_p) + F(c, c, \ldots, c, x_p, c) + F(c, c, \ldots, c, x_p, c, c) + \ldots + \\ &+ F(c, x_p, c, c, \ldots, c) + F(x_p, c, c, \ldots, c, x_1) + F(c, c, \ldots, c, x_1, c) + \\ &+ F(c, c, \ldots, c, x_1, c, c) + \ldots + F(c, x_1, c, c, \ldots, c) = 0\,, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} &F(x_1, c, c, \ldots, c) + F(c, x_1, c, c, \ldots, c) + \ldots + F(c, c, \ldots, c, x_1) + \\ &+ (p-2)\, F(c, c, \ldots, c) = 0\,, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} &F(x_p, c, c, \ldots, c) + F(c, x_p, c, c, \ldots, c) + \ldots + F(c, c, \ldots, c, x_p) + \\ &+ (p-2)\, F(c, c, \ldots, c) = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Subtracting (5.3) and (5.4) from (5.2) we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1, c, c, \ldots, c, x_p) + F(x_p, c, c, \ldots, c, x_1) - F(x_1, c, c, \ldots, c) - \\ &- F(c, c, \ldots, c, x_1) - F(x_p, c, c, \ldots, c) - F(c, c, \ldots, c, x_p) + \\ &+ 2\, F(c, c, \ldots, c), \end{aligned} \tag{5.5}$$

since $nF(c, c, \ldots, c) = 0$. From (5.1) and (5.5) we get

$$\begin{aligned} 2F(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= 2[F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) - F(x_2, x_3, \ldots, x_p, c) + \\ &+ F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) - F(x_3, x_4, \ldots, x_p, c, c) + \\ &+ \ldots + \\ &+ F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - F(x_p, c, c, \ldots, c)] + \\ &+ [F(x_1, c, c, \ldots, c, x_p) - F(x_p, c, c, \ldots, c, x_1) + \\ &+ F(c, c, \ldots, c, x_1) - F(c, c, \ldots, c, x_p) + \\ &+ F(x_p, c, c, \ldots, c) - F(x_1, c, c, \ldots, c)] + \\ &+ 2F(c, c, \ldots, c). \end{aligned}$$

Dividing by two, we find that F has the form (4.1).

It can be shown by simple calculation that (4.1) satisfies (1.2).

6. Proof of Theorem 4

By the same argumentation as in section 2 we obtain

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \\ &\quad = [F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) - F(x_2, x_3, \ldots, x_p, c) + \\ &\quad + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) - F(x_3, x_4, \ldots, x_p, c, c) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(6.1) \qquad & + \ldots + \\
& + F(x_{p-3}, x_{p-2}, x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - F(x_{p-2}, x_{p-1}, x_p, c, c, \ldots, c)] + \\
& + F(x_{p-2}, x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - F(x_{p-1}, x_p, c, c, \ldots, c, x_1) + \\
& + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c, x_1) - F(x_p, c, c, \ldots, c, x_1, x_2) + \\
& + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

The square bracket is of the form (4.2). Let us substitute in (1.2)

(i) $x_3 = x_4 = \ldots = x_{p-1} = x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_n = c$;

(ii) $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = c$;

(iii) $x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1} = x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_n = c$.

then we obtain

$$
\begin{aligned}
& F(x_1, x_2, c, c, \ldots, c, x_p) + F(x_2, c, c, \ldots, c, x_p, c) + F(c, c, \ldots, c, x_p, c, c) + \\
& \quad + F(c, c, \ldots, c, x_p, c, c, c) + \ldots + F(c, c, x_p, c, c, \ldots, c) + \\
(6.2) \qquad & \quad + F(c, x_p, c, c, \ldots, c, x_1) + F(x_p, c, c, \ldots, c, x_1, x_2) + \\
& \quad + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2, c) + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2, c, c) + \ldots + \\
& \quad + F(c, x_1, x_2, c, c, \ldots, c) = 0 ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& F(x_1, x_2, c, c, \ldots, c) + F(x_2, c, c, \ldots, c) + (p-4) F(c, c, \ldots, c) + \\
(6.3) \qquad & + F(c, c, \ldots, c, x_1) + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2) + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2, c) + \\
& + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2, c, c) + \ldots + F(c, x_1, x_2, c, c, \ldots, c) = 0 ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6.4) \qquad & F(x_p, c, c, \ldots, c) + F(c, x_p, c, c, \ldots, c) + \ldots + F(c, c, \ldots, c, x_p) + \\
& \qquad + (p-3) F(c, c, \ldots, c) = 0.
\end{aligned}
$$

Subtracting (6.3) and (6.4) from (6.2) we find

$$
\begin{aligned}
& 0 = F(x_1, x_2, c, c, \ldots, c, x_p) + F(x_p, c, c, \ldots, c, x_1, x_2) + F(x_2, c, c, \ldots, c, x_p, c) + \\
& \quad + F(c, x_p, c, c, \ldots, c, x_1) - F(x_1, x_2, c, c, \ldots, c) - \\
(6.5) \qquad & \quad - F(x_2, c, c, \ldots, c) - F(c, c, \ldots, c, x_1) - F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2) - \\
& \quad - F(x_p, c, c, \ldots, c) - F(c, x_p, c, c, \ldots, c) - F(c, c, \ldots, c, x_p, c) - \\
& \quad - F(c, c, \ldots, c, x_p) + 4F(c, c, \ldots, c)
\end{aligned}
$$

since $nF(c, c, \ldots, c) = 0$. Substituting

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_{p-2} = x_p = x_{p+1} = \ldots = x_n = c$$

in (1.2) gives that

$$
\begin{aligned}
& F(x_1, c, c, \ldots, c, x_{p-1}, c) + F(c, c, \ldots, c, x_{p-1}, c, c) + \\
& + F(c, c, \ldots, c, x_{p-1}, c, c, c) + \ldots + F(c, x_{p-1}, c, c, \ldots, c) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6.6)\qquad & + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c, x_1) + F(c, c, \ldots, c, x_1, c) + \\
& + F(c, c, \ldots, c, x_1, c, c) + \ldots + F(c, c, x_1, c, c, \ldots, c) + \\
& + F(c, x_1, c, c, \ldots, c, x_{p-1}) = 0.
\end{aligned}
$$

Putting $x_{p-1} = c$ resp. $x_1 = c$ into (6.6) we get

$$
\begin{aligned}
(6.7)\qquad & F(x_1, c, c, \ldots, c) + F(c, x_1, c, c, \ldots, c) + \ldots + F(c, c, \ldots, c, x_1) + \\
& + (p-3)\, F(c, c, \ldots, c) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6.8)\qquad & F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) + F(c, x_{p-1}, c, c, \ldots, c) + \ldots + F(c, c, \ldots, c, x_{p-1}) + \\
& + (p-3)\, F(c, c, \ldots, c) = 0.
\end{aligned}
$$

Taking into account, (6.6), (6.7) and (6.8), we can write

$$
\begin{aligned}
0 = & - F(x_1, c, c, \ldots, c, x_{p-1}, c) - F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c, x_1) - \\
& - F(c, x_1, c, c, \ldots, c, x_{p-1}) + F(c, c, \ldots, c, x_1) + \\
(6.9)\qquad & + F(c, x_1, c, c, \ldots, c) + F(x_1, c, c, \ldots, c) + \\
& + F(c, c, \ldots, c, x_{p-1}) + F(c, c, \ldots, c, x_{p-1}, c) + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - \\
& - 3\, F(c, c, \ldots, c).
\end{aligned}
$$

By addition of (6.1), (6.5) and (6.9) we obtain

$$
\begin{aligned}
(6.10)\qquad & F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \\
& = F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) - F(x_2, x_3, \ldots, x_p, c) + \\
& + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) - F(x_3, x_4, \ldots, x_p, c, c) + \\
& + \ldots + \\
& + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - F(x_p, c, c, \ldots, c)] + \\
& + [F(x_1, x_2, c, c, \ldots, c, x_p) - F(x_{p-1}, x_p, c, c, \ldots, c, x_1) + \\
& + F(x_{p-1}, x_p, c, c, \ldots, c) - F(x_1, x_2, c, c, \ldots, c) + \\
& + F(c, x_p, c, c, \ldots, c, x_1) - F(c, x_1, c, c, \ldots, c, x_{p-1}) + \\
& + F(c, x_1, c, c, \ldots, c) - F(c, x_p, c, c, \ldots, c)] + \\
& + [F(x_2, c, c, \ldots, c, x_p, c) - F(x_1, c, c, \ldots, c, x_{p-1}, c) + \\
& + F(x_1, c, c, \ldots, c) - F(x_2, c, c, \ldots, c) + \\
& + F(c, c, \ldots, c, x_{p-1}, c) - F(c, c, \ldots, x_p, c) + \\
& + F(c, c, \ldots, c, x_{p-1}) - F(c, c, \ldots, c, x_p)] + \\
& + F(c, c, \ldots, c).
\end{aligned}
$$

Finally we put

$$
\begin{aligned}
G_0(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = & F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) + \\
& + \ldots + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - F(x_1, c, c, \ldots, c, x_{p-1}, c) + \\
& + F(x_1, c, c, \ldots, c) + F(c, c, \ldots, c, x_{p-1}, c) + F(c, c, \ldots, c, x_{p-1}),
\end{aligned}
$$

$$G_1(x_1, x_{p-1}, x_p) = -F(x_{p-1}, x_p, c, c, \ldots, c, x_1) + F(x_{p-1}, x_p, c, c, \ldots, c) -$$
$$- F(c, x_1, c, c, \ldots, c, x_{p-1}) + F(c, x_1, c, c, \ldots, c)\,,$$
$$A = F(c, c, \ldots, c)\,,$$

thus formula (6.10) reduces to (4.2).

On the other hand every function of the form (4.2) satisfies the equation (1.2) if $n = 2p - 3$, and thus Theorem 4 is proved.

(Received June 8, 1963)

REFERENCES

[1] Aczél, J.—Ghermănescu, M.—Hosszú, M.: „On cyclic equations." *Publications of the Mathematical Institut of the Hungarian Academy of Sciences*, **5** (1960) 215—221.

[2] Hosszú, M.: A lineáris függvényegyenletek egy osztályáról". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei*, **11** 249—261.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА ACZÉL, GERMĂNESCU и HOSSZÚ

D. Ž. DJOKOVIĆ

Резюме

Рассматриваются циклическое функциональное уравнение (1.2) и обобщенное уравнение (3.1). Предполагается, что независимые переменные $x_i \in S$, где S — произвольное непустое множество, и что значения функций принадлежат некоторой аддитивной абелевой группе **M**. Приведены общие решения этих уравнений для «лёгкого» случая $n \geqq 2p - 1$. В «тяжёлом» случае $p < n < 2p - 1$ рассматривается уравнение (1.2) только для $n = 2p - 2$ и $n = 2p - 3$. Что бы получить общее решение в случае $n = 2p - 2$ мы должны предположить выполнимость и единственность деления с 2 в группе **M**.

Общее решение функционального уравнения (1.2) получили раньше Aczél, Germănescu, Hosszú но при более сильных предположений об группе **M**.

ОДНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ УЧЕТОМ НЕНАДЕЖНОСТИ ПРИБОРА

József TOMKÓ

§ 1. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается однолинейная система массового обслуживания с ненадежным прибором, причем прибор может выходить из строя не только в рабочем, но и в свободном состоянии. Предположим, что входящий поток требований пуассоновский с постоянным параметром λ;

требование, поступившее в момент, когда прибор занят обслуживанием или находится в ремонте теряется, а также теряется то требование, обслуживание которого началось, но прервалось по причине порчи прибора;

времена обслуживания ξ_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ и времена ремонта δ_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ — независимые случайные величины, причем ξ_i, $(i = 1, 2, , \ldots)$; δ_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ имеют одинаковые распределения вероятностей, соответственно равные $F(x)$ и $G(x)$.

Введем необходимое для дальнейшего понятия.

Простым временем исправности прибора в момент t будем называть то время $\omega(t)$, в течение которого прибор после момента t находился бы в исправном состоянии, если после момента t ему не пришлось бы обслуживать требования. Если в момент t прибор находится в ремонте, тогда $\omega(t) \equiv 0$.

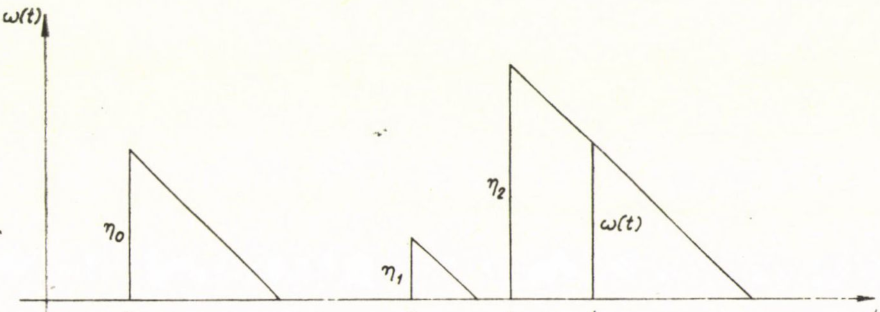


Рис. 1.

Совокупность $\{\omega(t), t \geqq 0\}$ представляет собой случайный процесс траектории которого имеют скачки в точках окончаний ремонтов. Обозначим точки окончаний ремонтов через r_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ $r_0 > 0$, или $r_0 = 0$ в зависимости от того, прибор в начальный момент находился в ремонте или был исправен. Предположим, что скачки $\eta_i = \omega(r_i + 0)$ независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $H(x)$.

Если времена обслуживания не влияют на длительность жизни прибора, то траектории процесса $\omega(t)$, в точках где $\omega(t) > 0$, убывают под углом 45°. Одна из возможных траекторий такого процесса изображена на рис. 1.

Теперь предположим, что влияние времен обслуживания на длительность жизни прибора таково, что

$$\omega(t + \Delta t) - \omega(t) = \begin{cases} -\Delta t \text{ если прибор в промежутке времени } (t,\ t + \Delta t) \text{ был свободен.} \\ -c\Delta t \text{ если в промежутке времени } (t,\ t + \Delta t) \text{ прибор был занят обслуживанием} \end{cases}$$

Обозначим через $\bar{r}_i$, $(i = 1, 2, \ldots)$ момент начала i-го ремонта. Величину $\tau_i = \bar{r}_{i+1} - r_i$; $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, будем называть i-ым временем жизни прибора. Одна из возможных траекторий процесса $w(t)$ при вышеуказанном влиянии времен обслуживания на длительность жизни прибора и величины τ_i, изображена на рис. 2.

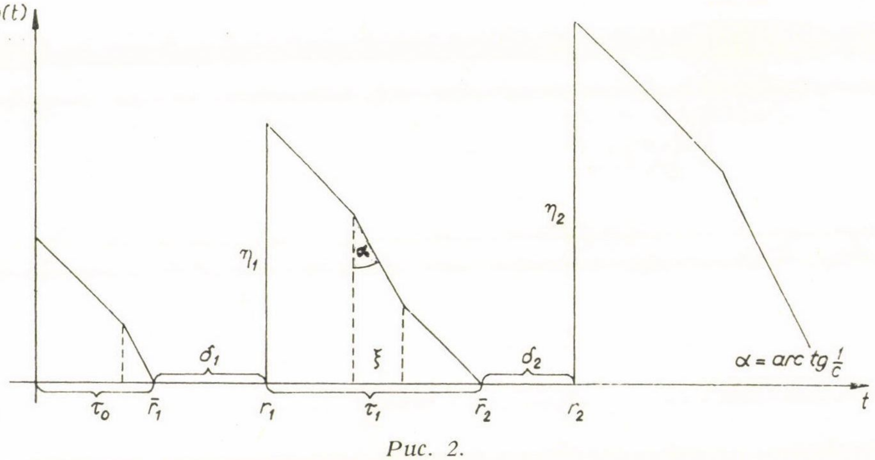


Рис. 2.

Вследствие предположений о входящем потоке, о времени обслуживания требований и о простых временах исправности прибора, величины $\tau_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ независимые одинаково распределенные за исключением может быть τ_0. Функцию распределения τ_i обозначим через $\widetilde{H}(x)$. Она выражается через функции $H(x)$, $F(x)$ и $E_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, но точный вид её нам ниже не понадобится.

Пусть:

$\Pi_1(t)$ — вероятность того, что в момент t прибор окажется занятым обслуживанием,

$\Pi_2(t)$ — вероятность того, что в момент t прибор находится в ремонте

$\Pi_3(t)$ — вероятность того, что в момент t прибор свободен.

Основная цель нашей работы ответить на вопрос, при каких условиях существуют пределы

$$\Pi_i = \lim_{t\to\infty} \Pi_i(t)\ ;\ i = 1, 2, 3$$

и как их вычислять.

§. 2. Марковский процесс, описывающий систему

Рассмотрим случайный процесс $\gamma(t) = \{e(t), \nu(t)\}$ где

$e(t) = 1$ если в момент t прибор занят обслуживаем.

$e(t) = 2$ если в момент t прибор находится в ремонте.

$e(t) = 3$ если в момент t прибор свободен.

$\nu(t)$, при $e(t) = 1$ есть случайный двух мерный вектор $\{\xi(t), \eta(t)\}$ где $\xi(t)$ обозначает время, потраченное уже прибором на обслуживание требования, занимающего прибор в момент t, $\eta(t)$ уменьшение простого времени исправности прибора между моментом t, и моментом окончания ремонта, предшествующего моменту t т. е. $\eta(t) = \eta_i - w(t)$ если $r_i < t < \bar{r}_{i+1}$.

При $e(t) = 2$, $\nu(t)$ есть время, прошедшее к моменту t от начала текущего ремонта.

При $e(t) = 3$, $\nu(t)$ есть величина $\eta(t)$, определенная выше.

Процесс $\gamma(t)$ является однородным марковским процессом, и наша задача равносильна указанию условий, при которых этот процесс будет эргодическим и поиску его эргодического распределения.

Введем обозначения

$$P_1(x, y, t) = \mathbf{P}\{e(t) = 1,\ \ \nu(t) = [\xi(t), \eta(t)] \in B_{xy}\}$$

$$\text{где}\quad B_{xy} = \{(\xi, \eta), \eta \geqq c\,\xi,\ \ 0 \leqq \xi < x, 0 \leqq \eta < y\}$$

$$P_2(u, t) = \mathbf{P}\{e(t) = 2,\ \ 0 \leqq \nu(t) < u\}$$

$$P_3(y, t) = \mathbf{P}\{e(t) = 3,\ \ 0 \leqq \nu(t) < y\}.$$

Задание начального распределения процесса $\gamma(t)$ равносильно заданию функций $P_1(x, y, 0), P_2(u, 0), P_3(y, 0)$.

Теперь найдем те переходы в процессе $\gamma(t)$ которые за время Δt могут наступать с вероятностью порядка $0(\Delta t)$ Сперва введем обозначения для точек фазового пространства.

Процесс $\gamma(t)$ находится:

в точке $\omega_1(x, y)$, $(0 \leqq x, y < \infty, y \geqq cx)$ если $e(t) = 1$, $u\ \xi(t) = x, \eta(t) = y$

в точке $\omega_2(u)$, $(0 \leqq u < \infty)$ если $e(t) = 2$, $\nu(t) = u$

в точке $\omega_3(y)$, $(0 \leqq y < \infty)$ если $e(t) = 3$, $u\ \nu(t) = y$.

За время Δt может произойти переход:

Ia) в точку $\omega_1(x, y)$ из точки $\omega_1(x - \Delta t, y - c\Delta t)$ с вероятностью

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta t)} \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta t)}$$

Iб) в точку $\omega_1(0, y)$ из точки $\omega_3(y - \Delta t)$ с вероятностью

$$\lambda\Delta t \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - \Delta t)}$$

Iб) в точку $\omega_2(u)$ из точки $\omega_2(u - \Delta t)$ с вероятностью

$$\frac{1 - G(u)}{1 - G(u - \Delta t)}$$

IIб) в точку $\omega_2(0)$ из точек $\omega_1(x, y), \omega_3(y)$ вероятностями

$$\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} \cdot \frac{H(y + c\Delta t) - H(y)}{1 - H(y)}$$

и

$$\frac{H(y + \Delta t) - H(y)}{1 - H(y)}$$

IIIa) в точку $\omega_3(y)$ из точки $\omega_3(y - \Delta t)$ с вероятностью

$$(1 - \lambda\Delta t) \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - \Delta t)}$$

и из точки $\omega_1(x, y - c\Delta t)$ с вероятностью

$$\frac{F(x + \Delta t) - F(x)}{1 - F(x)} \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta t)}$$

IIIб) в точку $\omega_3(0)$ из точки $\omega_2(u)$ с вероятностью

$$\frac{G(u + \Delta t) - G(u)}{1 - G(u)}$$

Если предположить; что существуют плотности:

$$p_1(x, y, t) = \frac{\partial^2 P_1(x, y, t)}{\partial x \partial y}, \quad p_2(u, t) = \frac{\partial P_2(u, t)}{\partial u}$$

$$p_3(y, t) - \frac{\partial P_3(y, t)}{\partial y}$$

то для этих плотностей, пользуясь переходными вероятностями Ia, Iб, ... IIIб, получим следующие уравнения

(1.a) $$p_1(x, y, t + \Delta t) = = p_1(x - \Delta t, y - c\,\Delta t, t)\,\frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta t)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta t)}$$

(1.б) $$p_1(0, y, t + \Delta t) = p_3(y - \Delta t, t)\,\lambda\,\frac{1 - H(y)}{1 - H(y - \Delta t)}$$

(2.a) $$p_2(u, t + \Delta t) = p_2(u - \Delta t, t)\,\frac{1 - G(u)}{1 - G(u - \Delta t)}$$

(2.б) $$p_2(0, t + \Delta t) = = \iint\limits_{\substack{cx \leq y \\ 0 \leq x}} p_1(x, y, t)\,\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)}\,\frac{H(y + c\,\Delta t) - H(y)}{\Delta t[1 - H(y)]}\,dx\,dy + + \int\limits_0^\infty p_3(y, t)\,\frac{H(y + \Delta t) - H(y)}{\Delta t[1 - H(y)]}\,dy$$

(3.a) $$p_3(y, t + \Delta t) = p_3(y - \Delta t, t)\,(1 - \lambda\Delta t)\,\frac{1 - H(y)}{1 - H(y - \Delta t)} + + \Delta t \int\limits_0^{y/c - \Delta t} p_1(x, y - c\,\Delta t, t)\,\frac{F(x + \Delta t) - F(x)}{\Delta t[1 - F(x)]}\,dx\,\frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\,\Delta t)}$$

(3.б) $$p_3(0, t + \Delta t) = \int\limits_0^\infty p_2(u, t)\,\frac{G(u + \Delta t) - G(u)}{\Delta t[1 - G(u)]}\,du$$

После введения в рассмотрение функций

$$p_1^*(x, y, t) = \frac{p_1(x, y, t)}{[1 - F(x)]\,[1 - H(y)]}, \quad p_2^*(u, t) = \frac{p_2(u, t)}{1 - G(u)}$$

$$p_3^*(y, t) = \frac{p_3(y, t)}{1 - H(y)}$$

уравнения (1a) ... (3б) преобретают вид

(1*a) $$p_1^*(x, y, t + \Delta t) = p_1^*(x - \Delta t, y - c\,\Delta t, t)$$

(1*б) $$p_1^*(0, y, t + \Delta t) = \lambda\,p_3^*(y - \Delta t, t)$$

(2*a) $$p_2^*(u, t + \Delta t) = p_2^*(u - \Delta t, t)$$

(2.*б) $$p_2^*(0, t + \Delta t) =$$

$$= \iint\limits_{\substack{cx \leq y \\ 0 \leq x}} p_1^*(x, y, t)\,[1 - F(x + \Delta t)]\,\frac{H(y + c\,\Delta t) - H(y)}{\Delta t}\,dx\,dy +$$

$$+ \int\limits_0^\infty p_3^*(y, t)\,\frac{H(y + \Delta t) - H(y)}{\Delta t}\,dy$$

(3.*а) $$p_3^*(y, t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)\,p_3^*(y - \Delta t, t) +$$

$$+ \Delta t \int\limits_0^{y/c - \Delta t} p_1^*(x, y - c\,\Delta t, t)\,dF(x)$$

(3.*б) $$p_3^*(0, t + \Delta t) = \int\limits_0^\infty p_2^*(u, t)\,dG(u)$$

Если предположить, что существуют производные

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial t},\ \frac{\partial p_1^*}{\partial x},\ \frac{\partial p_1^*}{\partial y},\ \frac{\partial p_2^*}{\partial t},\ \frac{\partial p_2^*}{\partial u}\ \text{и}\ \frac{\partial p_3^*}{\partial t},\ \frac{\partial p_3^*}{\partial y},$$

то после предельного перехода $\Delta t \to 0$ получим систему интегро-дифференциальных уравнений

(1.°а) $$\frac{\partial p_1^*}{\partial t} + \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c\,\frac{\partial p_1^*}{\partial y} = 0$$

(1.°б) $$p_1^*(0, y, t) = \lambda\,p_3^*(y, t)$$

(2.°а) $$\frac{\partial p_2^*}{\partial t} + \frac{\partial p_2^*}{\partial u} = 0$$

(2.°б) $$p_2^*(0, t) = c\int\limits_0^\infty \Big(\int\limits_0^{y/c} p_1^*(x, y, t)\,[1 - F(x)]\,dx\Big)\,dH(y) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty p_3^*(y, t)\,dH(y)$$

(3.°а) $$\frac{\partial p_3^*}{\partial t} + \frac{\partial p_3^*}{\partial y} + \lambda\,p_3^* = \int\limits_0^{y/c} p_1^*(x, y, t)\,d\mathrm{F}(x)$$

(3.°б) $$p_3^*(0, t) = \int\limits_0^\infty p_2^*(u, t)\,dG(u)$$

Для стационарного распределения, производные по t обращаются в нуль и получаются уравнения

(1'а) $$\frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c\frac{\partial p_1^*}{\partial y} = 0$$

(1'б) $$p_1^*(0, y) = \lambda\, p_3^*(y)$$

(2'а) $$\frac{\partial p_2^*}{\partial u} = 0$$

(2'б) $$p_2^*(0) = c\int_0^\infty \Bigl(\int_0^{y/c} p_1^*(x, y)\,[1 - \mathrm{F}(x)]\,dx\Bigr)\,dH(y) + \int_0^\infty p_3^*(y)\,dH(y)$$

(3'а) $$\frac{\partial p_3^*}{\partial y} + \lambda\, p_3^* = \int_0^{y/c} p_1^*(x, y)\,d\mathrm{F}(x)$$

(3'б) $$p_3^*(0) = \int_0^\infty p_2^*(u)\,dG(u)$$

Простые рассуждения показывают, что решение системы уравнений (1'а) — (3'б) имеет вид:

4) $$p_1^*(x, y) = \varrho\, Z_c(y - cx)$$

5) $$p_2^*(u) = \varrho$$

6) $$p_3^*(u) = \varrho\cdot 1/\lambda\cdot Z_c(y)$$

Где $Z_c(y) \geqq 0$ если $y \geqq 0$ и $Z_c(y) \equiv 0$ при $y < 0$ и удовлетворяет уравнению

7) $$\frac{dZ_c(y)}{dy} + \lambda\, Z_c(y) = \lambda\int_0^{y/c} Z_c(y - cx)\,dF(x)$$

с начальным условием $Z_c(0) = \lambda$

Подстановкой $cx = w$ в интеграле, получим

8) $$\frac{dZ_c(y)}{dy} + \lambda\, Z_c(y) = \lambda\int_0^{y} Z_c(y - \omega)\,dF\left(\frac{\omega}{c}\right), \qquad Z_c(0) = \lambda\,.$$

Пусть $\overline{Z}_c(s) = \int_0^\infty e^{-su}\,Z_c(u)du$, $\overline{F}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\,dF(u)$

Из уравнения 8) для $\bar{Z}_c(s)$ получается уравнение

9) $$s\bar{Z}_c(s) - \lambda + \lambda \bar{Z}_c(s) = \lambda \bar{F}(cs)\bar{Z}_c(s)$$

откуда

10) $$\bar{Z}_c(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda[1 - \bar{F}(cs)]}$$

Теперь для плотностей стационарного распределения и для вероятностей Π_1, Π_2, Π_3 § 1 получим:

11) $$\begin{aligned} p_1(x, y) &= \varrho\, Z_c(y - cx)\,[1 - F(x)]\,[1 - H(y)] \\ p_2(u) &= \varrho[1 - G(u)] \\ p_3(y) &= \varrho\, 1/\lambda\, Z_c(y)\,[1 - H(y) \end{aligned}$$

12) $$\begin{aligned} \Pi_1 &= \varrho \int_0^\infty \Big(\int_0^{y/c} Z_c(y - cx)\,[1 - F(x)]\,dx\Big)[1 - H(y)]\,dy \\ \Pi_2 &= \varrho \int_0^\infty [1 - G(u)]\,du \\ \Pi_3 &= \varrho\, 1/\lambda \int_0^\infty Z_c(y)\,[1 - H(y)]\,dy \end{aligned}$$

ϱ мы должны выбрать так, чтобы выполнялось соотношение $\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1$. Так как

13) $$c\int_0^{y/c} Z_c(y - cx)\,[1 - F(x)]\,dx + 1/\lambda\, Z_c(y) = 1\,,$$ то получим, что

14) $$\int_0^{y/c} Z_c(y - cx)\,[1 - F(x)]\,dx + \frac{1}{\lambda} Z_c(y) = \frac{1}{c}\left[1 + \frac{c-1}{c} Z_c(y)\right]$$

откуда

15) $$\varrho = \frac{1}{\int_0^\infty [1 - G(u)]\,du + \frac{1}{c}\int_0^\infty \left[1 + \frac{c-1}{\lambda} Z_c(u)\right][1 - H(y)]\,du}$$

§ 3. Эргодичность процесса $\gamma(t)$

Рассмотрим процесс $\gamma(t)$, определенный в § 2. Легко заметить, что моменты окончанмя ремонтов являются точками регенерации процесса. Если поедполагать, что хотя бы одно распределеный $H(x)$ и $G(x)$ (в случае $c > 1$ из распределений $H(x), G(x)$ и $F(x)$ не решетчатое, то $\gamma(t)$ будет апериодическим регенерирующим поцессом. Значит, при исследовании его эргодиности можно опираться на результаты Sмітн-а [1], [2]. Для этой цели выясним, что будет фазовым пространством процесса $\gamma(t)$. Это пространство состоит из подпространств H_1, H_2, и H_3, где

$H_1 \equiv \{$точки $\omega_1(v, u),\ 0 \leq cv \leq u\}$

(прибор исправен и занят обслуживанием)

$$H_2 \equiv \{\text{точки } \omega_2(w),\ w \geqq 0\}$$

(прибор находится в ремонте)

$$H_3 \equiv \{\text{точки } \omega_3(u),\ u \geqq 0\}$$

(прибор исправен и свободен)

Пусть множества

$$A_1^{(x,y)} \equiv \{\omega_1(v, u),\ v \leqq x,\ u \leqq y,\ cx \leqq y\} \subset H_1,$$
$$A_2^{(z)} \equiv \{\omega_2(w),\ w \leqq z\} \subset H_2,$$
$$A_3^{(y)} \equiv \{\omega_3(u),\ u \leqq y\} \subset H_3.$$

Далее, рассмотрим вероятности

$$F_1(x, y, t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_1^{(x,y)}\},$$
$$F_2(z, t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_2^{(z)}\},$$
$$F_3(y, t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_3^{(y)}\}.$$

Существование эргодического распределения процесса $\gamma(t)$ равносильно тому, что независимо от выбора начального распределения, существуют пределы

$$P_1(x, y) = \lim_{t \to \infty} F_1(x, y, t),$$
$$(1) \qquad P_2(z) = \lim_{t \to \infty} F_2(z, t),$$
$$P_3(y) = \lim_{t \to \infty} F_3(y, t).$$

Теорема Smith-а (см. теор. 2 [1]) утверждает, что в случае $\mathbf{M}\{r_{i+1} - r_i\} < \infty$ (для которого необходимо и достаточно чтобы $\mathbf{M}\{\eta_i + \delta_i\} < \infty$) пределы (1) всегда существуют, если только функции

$$\Psi_{A_1^{(x,y)}}(t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_1^{(x,y)},\ X > t\},$$
$$\Psi_{A_2^{(z)}}(t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_2^{(z)},\ X > t\},$$
$$\Psi_{A_3^{(y)}}(t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_3^{(y)},\ X > t\}.$$

где $X = r_{i+1} - r_i$, имеют ограниченную вариацию по t на любом конечном интервал временной оси. Чтобы проверить последнее, воспользуемся лемой леммой также доказанной Smith-ом (лемма 2, [1]). Утверждение етой леммы для нашего случая сформилируетсв так:

Пусть A — одно из множеств $A_1^{(x,y}$, $A_2^{(z)}$ и $A_3^{(y)}$. Обозначим через S_A — множество тех точек времени, для которых $\gamma(t) \in A$, Далее, обозначим через $\Gamma(S_A)$ множество граничных точек S_A, и через $\mathfrak{i}(\cdot)$ мощность множества, стоящего в скобках. Пусть t_0 — первая точка регенерации процесса (в нашем случае t_0 будет ближайшей точкой к моменту $t = 0$, окончания ремонта) а $I = (t_0 + a, t_0 + b)$ — некоторый конечный интервал времени и $\{Y(I_j)\}$ — совокупность неотрицательных случайных величин, где I_j пробегает все подинтервалы отрезка I. Тогда если выполнены условия

а) $Y(I_1) + Y(I_2) - Y(I_1 + I_2)$

при $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ и $I_1, I_2 \subset I$,

б) $\mathbf{M}\{Y(I)/t_0, \gamma(0)\} < \infty$ почти наверно,

в) $\mathbf{P}\{\mathrm{i}(I_j \cap \Gamma(S_A)) \leqq Y(I_j)/t_0, \gamma(0)\} = 1$ про любом $I_j \subset I$,

то функция

$$\Psi_A(t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A,\ X > t\}$$

имеет ограниченную вариацию по t на отрезке (a, b).

Легко убедиться, что если взять в качестве случанной величины $Y(t)$ сумму $\sum_1^5 \varepsilon_i$, в которой

ε_1 — число требований. поступивших в интервале времени I,

ε_2 — число точек окончания обслуживаний, принадлежащих интер-к интервалу I,

ε_3 — число точек окончания ремонтов r_i, находящихся в I,

ε_4 — число точек начала ремонтов $\bar{r}_i$, находящихся в I,

ε_5 — число тех точек интервала I, в котовых наступит по меншей мере одно из событий

$$\{\xi(t) = x\},\ \{\eta(t) = y\},\ \{\mu(t) = z\}$$

то всех условия а), б), в) выполняются. Таким образом нами доказана

Теорема 1. *Если хотя бы одно из распределений $H(x)$ и $G(x)$ (в случае $c > 1$ одно из распределений $H(x)$, $G(x)$ и $F(x)$) не решетчатое и $\mathbf{M}\{\eta_i + \delta_i\} < \infty$, то процесс $\gamma(t)$ является аргодическим.*

Теперь покажем, что функции II) § 2 служат плотностями аргодического расредееления процесса $\gamma(t)$. Заметим следующее: а) процесс $\gamma(t)$ может иметь по крайней мере, одно стационарное распределение и, если оно существует, то должно совдавать с эргодическим распределением, б) если начальное распределение процесса $\gamma(t)$ обладает плотностями, то тем ше свойством обладает и распределение процесса пн всех t. теперь если предполагать, что пределы (1) имеют производные

$$p_1(x, y) = \frac{\partial P_1(x, y)}{\partial P_1(x, y)},\ p_2(z) = \frac{\partial P_2(z)}{\partial z},\ p_3(y) = \frac{\partial P_3(y)}{\partial y}$$

и что сушезтврют и производные

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial x},\ \frac{\partial p_1^*}{\partial y},\ \frac{\partial p_2^*(z)}{\partial z},\ \frac{\partial p_3^*(y)}{\partial y},$$

где

$$p_1^*(x, y) = \frac{p_1(x, y)}{[1 - F(x)]\,[1 - H(y)]},\ p_2^*(z) = \frac{p_2(z)}{1 - G(z)},\ p_3^*(y) = \frac{p_3(y)}{1 - H(y)},$$

то как мы видели в § 2 должна удовлетворяться система уравнений 1′ а) — 3′ б) § 2. Решением этой системы являются функции 4), 5), 6) § 2.

Взяв начальным распределением процесса $\gamma(t)$, распределение, определяемое элимн же плотностями, то система I° а) — 3° б) § 2 имет смысл. При условии

$$p_1^*(x, y, 0) = \varrho\, z_c(y - cx)\,,$$

$$p_2^*(z, 0) = \varrho\,,$$

$$p_3^*(y, 0) = \varrho \cdot 1/\lambda \cdot z_c(y)$$

однозначным ее решением является набор функций

$$\{\varrho\, z_c(y - cx)\,,\ \varrho\,,\ \varrho \cdot 1/\lambda \cdot z_c(y)\}\,.$$

Следовательно, распределение, определяемое плотностями II) § 2 есть стационарное распределение процесса $\gamma)t)$. Отсюда в силу замечания а) непосредственно вытекает наше утверждение.

Итак справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Если хотя бы одно из распределений $H(x)$ и $G(x)$ (в случае $c > 1$ одно из распределений $H(x)$, $G(x)$ и $F(x)$) не решетчатое и $\mathbf{M}\{\eta_i + \delta_i\} < \infty$, то процесс $\gamma(t)$ является аргодическим и вероятности Π_1, Π_2, Π_3 § 1 даются формулами 12) § 2.*

Автор выражает глубокую бдагодапность академику Б. В. Гнеденко за его вниманне к данной работе и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Smith, W. L.: „Regenerative stochastic processes". *Proc. Roy. Soc. ser. A* **232** (1955) 6—31.

[2] Smith, W. L.: „Renewal theory and its ramifications". *Journal of the Royal Stat. Society B.* **20** (1958) N° 2.

[3] Севастьянов Б. А.: „Эргодическая теорема для марковскнх процессов и ее придожение к телефонным системам с отказамн". *Теор. вер. и ее примен.* **2** (1957) I.

ON A SINGLE-CHANNEL LOSS SYSTEM CONSIDERING THE RELIABILITY OF THE CHANNEL

by

J. TOMKÓ

Summary

A single-channel service system is considered under the following conditions:

a) The arrival process is of Poisson type with parameter λ;

b) A call not finding the channel in a free state at the instant of its arrival will be lost; a call will be lost as well if before having finished its service the channel goes wrong.

Let $\omega(t)$ denote the life time of the service channel related to the moment in that the channel is free. For the reliability of the service channel we sssume

c)

$$\omega(t+\Delta t)-\omega(t)=\begin{cases}-\Delta t & \text{if in the interval } (t, t+\Delta t) \text{ the channel is free,}\\ -c\Delta t & \text{if in the interval } (t, t+\Delta t) \text{ the channel is occupied.}\end{cases}$$

Denote by π_1 the probability of the service channel being occupied at any given instant, by π_2 the probability of its being stopped for repair and by π_3 the probability of finding it in a free state.

It is proved under certain further conditions that these probabilities can be given as follows:

$$\pi_1=\varrho\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{y/c} Z_c(y-cx)\,[1-F(x)]\,dx\Big)[1-H(y)]\,dy$$

$$\pi_2=\varrho\int\limits_0^\infty[1-G(u)]\,du$$

$$\pi_3=\varrho\cdot 1/\lambda\cdot\int\limits_0^\infty Z_c(y)\,[1-H(y)]\,dy$$

where

$$\varrho=\frac{1}{\int\limits_0^\infty[1-G(u)]\,du+\frac{1}{c}\int\limits_0^\infty\left[1-\frac{c-1}{\lambda}Z_c(u)\right][1-H(u)]\,du}$$

and

$$\bar{Z}_c(s)=\int\limits_0^\infty e^{-su}Z_c(u)\,du=\frac{\lambda}{s+\lambda[1-\bar{F}(s)]},\quad \bar{F}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-su}\,dF(u)\,.$$

DIMENSION AND ENTROPY FOR A CLASS OF STOCHASTIC PROCESSES

by
MATS RUDEMO[1]

Introduction

In the following we shall give a definition of dimension and entropy for a class of stochastic processes with the property that the sample functions are step functions with probability one.

Dimension and entropy together give a measure of the uncertainty associated with a random variable, or in our case a stochastic process, see [1] and [9].

In § 1 we give some examples of stochastic processes, whose sample functions a. s.[2] are step functions — such a process is called a purely discontinuous process, a PDP.

Some known properties of the dimension and the entropy for random variables and vectors, needed in the following, are stated in § 2.

In § 3 we define dimension and entropy for a class of PDP : s regarded on a finite interval $(0, T)$. As an example the dimension and entropy of a Poisson process are calculated. The asymptotic T-dependence of the dimension is studied in § 4 for ergodic Markov chains with a finite state space and for renewal processes.

For vector processes the corresponding definitions are made in § 5. An example with Poisson processes is discussed.

Finally in § 6 we give a method of approximating by PDP : s stochastic processes whose sample functions are a. s. continuous. Especially the Brownian motion is discussed and the dimension of the approximating PDP is studied.

§ 1. Purely discontinuous processes

By a stochastic process we shall mean a one-parameter family of random variables (measurable functions on a probability space), see [6]. The measure of the probability space will always be assumed to be complete. The parameter will be called time. We shall only consider processes on the interval $[0, \infty)$. The stochastic process is then written $\{X(t): t \in [0, \infty)\}$ or $\{X(t, \omega): t \in [0, \infty), \omega \in \Omega\}$. Here Ω is the space of elementary events. The sample function corresponding to ω is $X(\cdot, \omega)$.

A stochastic process is called a purely discontinuous process, a PDP, if the sample functions a. s. are step functions, with a finite number of jumps on every finite time interval. The time points corresponding to jumps will be called points of jump.

---

[1] Göteborg.

[2] a. s. is used as short for "almost surely", i.e. ,,with probability one".

If $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_r(t))$, $t \in [0, \infty)$, where $\{X_i(t)\colon t \in [0, \infty)\}$, $i = 1, \ldots, r$, are PDP : s, then $\{X(t)\colon t \in [0, \infty)\}$ is called a purely discontinuous vector process.

General conditions for a process to be a PDP have been given by M. Fisz, see [7].

Important types of PDP : s are found among Markov processes and renewal processes.

A sufficient condition for a separable Markov process $\{X(t)\colon t \in [0, \infty)\}$ with stationary transition function $p(t, \xi, A) = \mathbf{P}\{X(s+t) \in A \mid X(s) = \xi\}$ to be a PDP is that

$$\lim_{t \to 0} p(t, \xi, \{\xi\}) = 1 \tag{1}$$

uniformly in ξ, see [6], theorem VI. 2.4.

By a renewal process, see [10], we shall mean a process $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$,

$$X(t) = \max_{\tau_n \leqq t} n\,,$$

where $\tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \tau_3 \leqq \ldots$ are random variables taking values on the interval $[0, \infty)$ and such that $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \ldots$ are independent and equidistributed. Let $\mathbf{P}\{\tau_1 = 0\} < 1$. Then $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ is a PDP. For let $\alpha > 0$ be chosen so that $\mathbf{P}\{\tau_1 > \alpha\} > 0$ and let A_n be the event that $\tau_n - \tau_{n-1} > \alpha$. In order to show that $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ is a PDP we have only to prove that $\mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty\} = 1$. A sufficient condition for this relation is that $\mathbf{P}\{\limsup_{n\to\infty} A_n\} = 1$. But this equality follows from the Borel—Cantelli lemma since

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\} = \mathbf{P}\{\tau_1 > \alpha\} \sum_{n=2}^{\infty} 1 = \infty\,.$$

§ 2. Information theoretic background

If ξ is a discrete random variable taking the value x_k, $k = 1, 2, \ldots$, with the probability p_k, $k = 1, 2, \ldots$, the entropy $H_0(\xi)$ of ξ is defined by

$$H_0(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k \log p_k\,,$$

if the series is convergent. The base of the logarithm is here arbitrary.

Let ξ be a real random variable, and put $\xi^{(n)} = \frac{1}{n}[n\xi]$, where $[x]$ is the integral part of x. If $H_0(\xi^{(1)}) < \infty$ we put, according to A. Rényi, see [9],

$$d = d(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{H_0(\xi^{(n)})}{\log n}\,,$$

provided that the limit exists, and call d the dimension of ξ. If further the limit

$$H_d(\xi) = \lim_{n\to\infty} [H_0(\xi^{(n)}) - d \log n]$$

exists, it is called the d-dimensional entropy of ξ.

A random variable ξ is said to be the mixture with weights $\{q_k\}$, $q_k \geqq 0$, $\sum_k q_k = 1$, of the variables $\{\xi_k\}$ if the distribution function of ξ is $\sum_k q_k F_k$, where F_k is the distribution function of ξ_k, If N is a random variable, taking the values $\{k\}$ with probabilities $\{q_k\}$ and if the conditional distribution of ξ, given that $N = k$ is equal to the distribution of ξ_k, than ξ is the mixture of $\{\xi_k\}$ with weights $\{q_k\}$.

If ξ is the mixture of ξ_k, $k = 1, \ldots m$, with weights q_k, $k = 1, \ldots m$, then

$$\sum_k q_k H_0(\xi_k^{(n)}) \leq H_0(\xi^{(n)}) \leq \sum_k q_k H_0(\xi_k^{(n)}) - \sum_k q_k \log q_k \,.$$

The first inequality follows from Jensens inequality applied to the convex function $x \log x$, and the second inequality follows from the fact that for discrete variables the entropy of a mixture is always less than or equal to the sum of the weighted average of the entropies of the components in the mixture and the entropy of the mixing distribution, in this case $\{q_k\}$, see [1]. Dividing with $\log n$ and letting n pass to infinity we obtain

$$d(\xi) = \sum_{k=1}^{m} q_k d(\xi_k) \,. \tag{2}$$

If the components in the mixture have pairwise orthogonal[3] and elementary[4] distributions in the sense of [1] we further have, see [1],

$$H_d(\xi) = \sum_{k=1}^{m} q_k H_{d_k}(\xi_k) - \sum_{k=1}^{m} q_k \log q_k \,, \tag{3}$$

where $d_k = d(\xi_k)$.

Let ζ be a random vector, $\zeta = (\xi_1, \ldots \xi_r)$. We put

$$\zeta^{(n)} = \left(\frac{[n\,\xi_1]}{n}, \ldots, \frac{[n\,\xi_r]}{n}\right).$$

If $H_0(\zeta^{(1)}) < \infty$ the dimension of ζ is defined by

$$d = d(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{H_0(\zeta^{(n)})}{\log n} \,,$$

if the limit exists. If further the limit

$$H_d(\zeta) = \lim_{n\to\infty} [H_0(\zeta^{(n)}) - d \log n]$$

exists, it is called the d-dimensional entropy of ζ. If ζ has an absolutely continuous distribution and if $H_0(\zeta^{(1)}) < \infty$ then according to [9]

$$d(\zeta) = r \,, \tag{4}$$

and

$$H_r(\zeta) = - \int f(x) \log f(x)\, dx \,, \tag{5}$$

see [9] and [4]. Here $f(x)$ is the density function of ζ and the integral is taken over the entire r-space.

---

[3] ξ and η have orthogonal distributions if there exist two disjoint Borel measurable subsets E and F of the real line, such that $P\{\xi \in E\} = P\{\eta \in F\} = 1$.

[4] The distribution of ξ is called elementary if it is the mixture of a finite discrete distribution and an absolutely continuous distribution whose density function is piecewise continuous, only has discontinuities of the first kind and is zero outside a finite interval.

§ 3. Dimension and entropy for purely discontinuous processes

Let $\{X(t, \omega) : t \in [0, \infty), \omega \in \Omega\}$ be a PDP. We shall regard the process on the interval $0 < t < T$. Let $N(T) = N(T, \omega)$ be the number of jumps on this interval. We will first show that $N(T, \cdot)$ is a random variable.

Lemma 1. *$N(T, \cdot)$ is a measurable function.*

Proof. Let $\{r_i\}$ be a countable set of points dense in the interval $(0, T)$. As shown below there then exists a sequence $\{f_n\}$, where f_n for each n is a Borel measurable function from the n-space to the set of nonnegative integers $< n$, such that a. s.

$$\lim_{n\to\infty} f_n\big(X(r_1, \omega), \ldots, X(r_n, \omega)\big) = N(T, \omega) .$$

The lemma then follows from the fact that the limit of an a.e. convergent sequence of measurable functions is measurable.

The functions $\{f_n\}$ can be chosen in the following way. For fixed n, let i' and i'' be indices such that $r_{i'}$ and $r_{i''}$ are the left and right neighbours of r_i among $r_1, \ldots, r_n$. For the least and the largest of $r_1, \ldots, r_n$ only one neighbour exists. If $x_1, \ldots, x_n$ are given real numbers, we let $A(x_1, \ldots, x_n)$ be the set of those $x_i : s$ such that $x_i = x_{i'}$ or $x_i = x_{i''}$ and let $m(x_1, \ldots, x_n)$ be the number of different real numbers in $A(x_1, \ldots, x_n)$. Then we can put

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = m(x_1, \ldots, x_n) - 1 .$$

If the number of jumps of $X(\cdot, \omega)$ is finite on the interval $(0, T)$, an event which has probability one, then for fixed ω

$$f_n\big(X(r_1, \omega), \ldots, X(r_n, \omega)\big) = N(T, \omega)$$

for sufficiently large n.

QED.

Note. The slightly complicated structure of the $f_n : s$ in the proof is caused by the possibility that some of the $r_i : s$ may coincide with points of jump with probability greater than zero. If this were not the case, or if the sample functions a.s. were right or left continuous, we could have chosen $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ to be equal to the number of different numbers among $x_1, \ldots, x_n$ minus one.

Let $t_1(\omega), \ldots t_{N(T)}(\omega)$ be the points of jump on the interval $(0, T)$ ordered such that $0 < t_1 < \ldots < t_{N(T)} < T$. For simplicity we define $t_k(\omega) = T$ if $k > N(T, \omega)$. Then $\{t_k\}$ become random variables according to

Lemma 2. *t_k, $k = 1, 2, \ldots,$ are measurable functions.*

(Sketch of) **Proof.** As the proof is rather similar to the proof of lemma 1, we will only indicate how it can be carried through. Let $\{r_i\}$ be given as in the proof of lemma 1. Given $X(r_i, \omega)$, $i = 1, \ldots, n$, it is possible to choose $t_k^{(n)}(\omega)$, $k = 1, 2, \ldots,$ among the numbers $r_1, \ldots, r_n$ such that a.s.

$$\lim_{n\to\infty} t_k^{(n)}(\omega) = t_k(\omega) .$$

The number $t_k^{(n)}(\omega)$ can further be chosen in such a way that the choice only depends on the mutual size relations among $X(r_i, \omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Then $\{t_k^{(n)}(\cdot)\}$ and therefore also $\{t_k(\cdot)\}$ become measurable functions. QED.

A similar proof, which is completely left out, is also valid for the following

Lemma 3. *$X(t_k+0,\cdot)$, $k=1,2,\ldots$ are measurable functions.*

From now on we will drop ω in the notations for random variables and stochastic processes.

If we disregard $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., a sample function of our process can, on the interval $(0, T)$, a.s. be described by the $(2N(T)+1)$-tuple

$$\xi(T)=\big(t_1,\ldots,t_{N(T)}, X(+0), X(t_1+0),\ldots, X(t_{N(T)}+0)\big).$$

In case $X(t_1), X(t_2), \ldots$, are essential for the description of the stochastic process the procedure has to be modified. However, if we know that the sample functions a.s. are continuous from the left, or if we know that they a.s. are continuous from the right, then $\xi(T)$ a.s. determines the sample functions on the interval $(0, T)$.

Now $\xi(T)$ can be regarded as the mixture with weights

$$q_n(T)=P\{N(T)=n\},\ n=0,1,\ldots, \tag{6}$$

of the variables

$$\xi_n(T)=\big(t_1,\ldots,t_n, X(+0), X(t_1+0),\ldots, X(t_n+0)\big), n=0,1,\ldots, \tag{7}$$

where the $(2n+1)$-tuple $\xi_n(T)$ has the conditional distribution of the points of jump and the corresponding X-values, given that $N(T)=n$. If $q_n(T)>0$ this conditional distribution exists according to lemmata 1, 2, and 3. From the definition of a PDP it follows that

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(T)=1.$$

If $\xi_n(T)$ has a dimension and an entropy we denote them

$$d_n(T)=d\big(\xi_n(T)\big) \tag{8}$$

and

$$H_{d_n}(T)=H_{d_n(T)}\big(\xi_n(T)\big). \tag{9}$$

As $\xi_n(T)$ and $\xi_m(T)$ for $n\neq m$ take values in spaces of different dimensions it is natural to regard the corresponding distributions as orthogonal. The relations (2) and (3) then motivate the following definitions.

Definition 1. If $\xi_n(T)$ for each n has the dimension $d_n(T)$, the dimension of the process $\{X(t):t\in[0,\infty)\}$ regarded on the interval $(0, T)$ is defined by

$$d^T=d^T(X)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n(T)\,d_n(T), \tag{10}$$

if the series is convergent.

Definition 2. If $\xi_n(T)$ for each n has the dimension $d_n(T)$ and the entropy $H_{d_n}(T)$ and if the series (10) converges, the d^T-dimensional entropy of the process $\{X(t):t\in[0,\infty)\}$ regarded on the interval $(0, T)$ is defined by

$$H^T=H^T(X)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n(T)\,H_{d_n}(T)-\sum_{n=0}^{\infty} q_n(T)\log q_n(T), \tag{11}$$

if the series are convergent.

Note. In these definitions we treat the points of jump and the corresponding process values in the same way (see the definition of $\xi_n(T)$). It may in some instances be more natural to have different "scales" of uncertainty for time values and process values.

For later application we note that if

$$d_n(T) = an + b, n = 0, 1, \ldots,$$

then

$$d^T = am(T) + b \,, \tag{12}$$

where $m(T)$ is the average number of jumps on the interval $(0, T)$,

$$m(T) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, q_n(T) \,.$$

Example. Let $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ be a Poisson process with parameter λ, i.e. $X(0) = 0$ and

$$\mathbf{P}\{X(t) = n \,|\, X(\tau) = m\} = \frac{[\lambda(t - \tau)]^{n-m}}{(n - m)\,!} \, e^{-\lambda(t-\tau)}, n \geqq m, t > \tau \,.$$

Let further the process be separable. As (1) is satisfied uniformly for $\xi = 0, 1, \ldots$, the process is a PDP. We will now calculate its dimension and entropy.

Regard the process on the interval $(0, T)$. The number of jumps on this interval is a.s. $X(T)$. We then have to determine the dimension and entropy of the random vector $(t_1, \ldots, t_n)$ given that $X(T) = n$. As before, $t_1, \ldots, t_n$ are the points of jump ordered in such a way that $0 < t_1 < \ldots t_n < T$. Since the relation $X(t_k + 0) = k$ holds a.s. we need not take into account the X-values at the points of jump when calculating the dimension and the entropy. The distribution of $(t_1, \ldots, t_n)$ is uniform in that region V of the n-space where $0 < x_1 < \ldots < x_n < T$, $\{x_i\}$ being the coordinates, see [11] p 86. The region V has the volume $\frac{1}{n!} T^n$. According to (4) and (5) we have

$$d(t_1, \ldots, t_n) = n$$

and

$$H_n(t_1, \ldots, t_n) = - \int\limits_V \frac{n\,!}{T^n} \log \frac{n\,!}{T^n} \, dx_1 \ldots dx_n = \log \frac{T^n}{n\,!} \,.$$

The dimension of the process is

$$d^T = \sum_{n=0}^{\infty} n \, \mathbf{P}\{X(T) = n\} = \lambda \, T.$$

The corresponding entropy is

$$H^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, T)^n}{n\,!} e^{-\lambda T} \log \frac{T^n}{n\,!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\, T)^n}{n\,!} e^{-\lambda T} \log \left[\frac{(\lambda\, T)^n}{n\,!} e^{-\lambda T} \right] = \left(\lambda \log \frac{e}{\lambda} \right) T.$$

Let $\{X_i(t) : t \in [0, \infty)\}$, $i = 1, \ldots, m$, be stochastic processes. We say that $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ is the mixture with weights p_i, $i = 1, \ldots, m$, $p_i \geqq$

$\geqq 0, \Sigma p_i = 1$, of the processes $\{X_i(t) : t \in [0, \infty)\}$, $i = 1, \ldots, m$, if there is a random variable N, taking the value i with the probability p_i, and such that if $N = i$, then $X(t) = X_i(t)$ for all $t \in [0, \infty)$.

Theorem 1. *Let $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ be the mixture with weights p_i, $i = 1, \ldots m$, of the PDP: s $\{X_i(t) : t \in [0, \infty)\}$, $i = 1, \ldots m$. Then $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ is a PDP and*

$$d^T(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i \, d^T(X_i) \, ,$$

provided that the right member exists.

Proof. It is obvious that $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ is a PDP. Let $q_n(T)$, $\xi_n(T)$ and $d_n(T)$ be defined according to (6), (7) and (8) and let $q_n^{(i)}(T)$, $\xi_n^{(i)}(T)$ and $d_n^{(i)}(T)$ be the corresponding quantities for $\{X_i(t) : t \in [0, \infty)\}$, $i = 1, \ldots, m$. Then $\xi_n(T)$ is the mixture with weights

$$r_i = \frac{p_i \, q_n^{(i)}(T)}{q_n(T)} \, , \quad i = 1, \ldots m,$$

of $\xi_n^{(i)}(T)$, $i = 1, \ldots m$. Since

$$q_n(T) = \sum_{i=1}^{m} p_i \, q_n^{(i)}(T) \, ,$$

we have $\Sigma \, r_i = 1$. From the relation (2), or rather from the corresponding relation for random vectors, we have

$$d_n(T) = \sum_{i=1}^{m} r_i \, d_n^{(i)}(T) \, .$$

Therefore

$$d^T(X) = \sum_n q_n(T) \, d_n(T) = \sum_i p_i \sum_n q_n^{(i)}(T) \, d_n^{(i)}(T) = \sum_i p_i \, d^T(X_i) \, .$$

QED

§ 4. Dimension for Markov chains and renewal processes.

Let $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ be a Markov chain with stationary transition function and finite state space, which, we assume, consists of the integers $1, \ldots N$. Put

$$p_{ij}(t) = \mathbf{P}\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\} \, , \quad i, j = 1, \ldots N.$$

As $t \to \infty$, $p_{ij}(t)$ tends to a limit, see [6]. If this limit is independent of i,

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = P_j \, ,$$

the chain is said to be ergodic. Then irrespective of the initial distribution

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{X(t) = j\} = P_j \, ,$$

and if the initial distribution is equal to $\{P_j\}$, the stationary distribution, then for all t

(13) $$\mathbf{P}\{X(t) = j\} = P_j \, .$$

Suppose that $p_{ij}(t) \to \delta_{ij}$ as $t \to 0$, i.e. the condition (1) is satisfied. If $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ is separable then it is a PDP. Further, see [6], the transition intensities

$$q_i = \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}$$

exist.

Theorem 2. *If $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ is a separable, ergodic Markov chain with finite state space and stationary transition function, and if the transition probabilities $p_{ij}(t)$ tend to δ_{ij} as $t \to 0$, then the dimension $d^T(X)$ exists for every $T > 0$ and is a differentiable function of T such that*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{d}{dT} d^T(X) = \sum_i P_i q_i .$$

Here $\{P_i\}$ is the stationary distribution and $\{q_i\}$ are the transition intensities. If the initial distribution is equal to $\{P_i\}$, then

$$d^T(X) = (\sum_i P_i q_i)\, T$$

for all $T > 0$.

Note. Chintschin (1953) showed for a finite stationary and ergodic Markov chain with discrete parameter that the r-step entropy is r times the onestep entropy. The later part of theorem 2 gives a corresponding property for Markov chains with continuous parameter.

Proof. If ξ and η are random variables or vectors, whose dimensions exist,

$$\max\big(d(\xi), d(\eta)\big) \leq d(\xi, \eta) \leq d(\xi) + d(\eta) .$$

This follows easily from the corresponding property of the entropy. Therefore

$$d(t_1, \ldots t_n) \leq d\big(\xi_n(T)\big) \leq d(t_1, \ldots t_n) + \sum_{k=0}^{n} d\big(X(t_k + 0)\big) ,$$

where $t_0 = 0$. As $X(t_k + 0)$, $k = 0, \ldots, n$, are random variables taking a finite number of values their dimensions are zero. Consequently

$$d\big(\xi_n(T)\big) = d(t_1, \ldots t_n) .$$

Now $(t_1, \ldots, t_n)$ has an absolutely continuous distribution. In order to prove that this is the case it is sufficient to show that if $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \ldots \ldots \leq b_n \leq T$ then

$$\mathbf{P}\{a_i \leq t_i \leq b_i ,\, i = 1, \ldots n \,|\, N(T) = n\} \leq C \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) ,$$

where C is a constant independent of $\{a_i\}$ and $\{b_i\}$. As before $N(T)$ denotes the number of jumps in the interval $(0, T)$. Now, if $0 \leq a < b$

$$\mathbf{P}\{N(b) - N(\mathrm{a}) = 0 \,|\, X(a) = i\} = \mathbf{P}\{X(t) = i ,\, a \leq t < b \,|\, X(a) = i\} = e^{-q_i(b-a)} ,$$

see [6]. Put

$$q = \max_i q_i .$$

Let A be a set in the Borel field generated by $\{X(t) : 0 \leqq t \leqq a\}$. Then

$$\mathbf{P}\{N(b) - N(a) \geqq 1 \mid A\} = \sum_i \mathbf{P}\{N(b) - N(a) \geqq 1,\ X(a) = i \mid A\} =$$

$$= \sum_i \mathbf{P}\{N(b) - N(a) \geqq 1 \mid X(a) = i\}\, \mathbf{P}\{X(a) = i \mid A\} =$$

$$= \sum_i (1 - e^{-q_i(b-a)})\, \mathbf{P}\{X(a) = i \mid A\} \leq (1 - e^{-q(b-a)}) \sum_i \mathbf{P}\{X(a) = i \mid A\},$$

which gives

$$\mathbf{P}\{N(b) - N(a) \geqq 1 \mid A\} \leqq q(b-a).$$

Consequently

$$\mathbf{P}\{a_i \leqq t_i \leqq b_i\,,\ i = 1, \ldots n \mid N(T) = n\} \leqq \frac{1}{\mathbf{P}\{N(T) = n\}}\, \mathbf{P}\{N(b_i) -$$

$$- N(a_i) \geqq 1\,,\ i = 1, \ldots n\} = \frac{1}{\mathbf{P}\{N(T) = n\}}\, \mathbf{P}\{N(b_1) -$$

$$- N(a_1) \geqq 1\} \prod_{i=2}^{n} \mathbf{P}\{N(b_i) - N(a_i) \geqq 1 \mid N(b_j) - N(a_j) \geqq 1\,,\ j =$$

$$= 1, \ldots i-1\} \leqq \frac{q^n}{\mathbf{P}\{N(T) = n\}} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

As the distribution of $(t_1, \ldots, t_n)$ is concentrated to a bounded set in the n-space

$$H_0([t_1], \ldots [t_n]) < \infty,$$

and according to (4)

$$d(\zeta_n(T)) = d(t_1, \ldots t_n) = n.$$

Then (12) shows that $d^T(X) = m(T)$, the average number of jumps on the interval $(0, T)$. Let $V_{ij}(T)$ be the average number of jumps to j given that $X(0) = i$. Then according to [3], theorem II. 16. 2, $V_{ij}(\cdot)$ is differentiable and

$$\lim_{T\to\infty} V'_{ij}(T) = P_j q_j.$$

As

$$m(T) = \sum_{i,j} \mathbf{P}\{X(0) = i\}\, V_{ij}(T),$$

$m(\cdot)$ is differentiable and

$$\lim_{T\to\infty} m'(T) = \sum_{i,j} \mathbf{P}\{X(0) = i\}\, P_j q_j = \sum_j P_j q_j.$$

This proves the first part of the theorem. The second part now follows from the fact that if the initial distribution is equal to the stationary distribution, then according to stationarity (13)

$$m(T_1 + T_2) = m(T_1) + m(T_2),$$

all T_1, $T_2 > 0$. QED.

Let $\tau_1, \tau_2, \ldots$ be nonnegative random variables such that $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \ldots$ are independent and have the same distribution function F. Then F will be called the gap distribution function of the renewal process $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ where,

$$X(t) = \max_{\tau_n \leqq t} n \, .$$

If

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$$

we get the corresponding stationary renewal process by letting τ_1 have the distribution function

$$F^*(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] \, dy \, ,$$

see [11].

Theorem. 3. *If $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ is a renewal process with absolutely continuous gap distribution function F, then $d^T(X)$ exists for every $T > 0$ and*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{d^T(X)}{T} = \frac{1}{\mu} \, ,$$

where

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x) \, .$$

If $\mu = \infty$ then $\frac{1}{\mu}$ is to be interpreted as zero. If $\mu < \infty$ the corresponding statiouary renewal process has the dimension

$$d^T = \frac{T}{\mu} \, .$$

Proof. Knowledge of the points of jump $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ makes it possible to determine the corresponding X-values and therefore

$$d(\xi_n(T)) = d(t_1, \ldots, t_n) \, .$$

The condition that the gap distribution is absolutely continuous implies the absolute continuity of the distribution of $(t_1, \ldots, t_n)$ given that $N(t) = n$. Indeed if $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \ldots \leqq x_n \leqq T$ we have

$$\mathbf{P}\{t_i \leqq x_i \, , i = 1, \ldots n \, | \, N(T) = n\} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}\{N(T) = n\}} \int_0^{x_1} \int_{y_1}^{x_2} \int_{y_2}^{x_3} \cdots \int_{y_{n-1}}^{x_n} f(y_1) f(y_2 - y_1) f(y_3 - y_2) \ldots f(y_n - y_{n-1}) \, [1 -$$

$$- F(T - y_n)] \, dy_1 \ldots dy_n \, ,$$

where f is the derivative of F, and differentiation with respect to $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gives the desired result. In the stationary case the proof is similar.

According to (4) one has

$$d(t_1, \ldots, t_n) = n$$

(cf. the proof of theorem 2). Therefore $d^T(X) = m(T)$, the average number of jumps on the interval $(0, T)$. Now

$$\lim_{T \to \infty} \frac{m(T)}{T} = \frac{1}{\mu},$$

see [10], and in the stationary case

$$m(T) = \frac{T}{\mu}$$

for all T, see [11].

QED.

If the gap distribution function has moments of higher orders, one can give a more detailed description of $m(T)$: s asymptotic behaviour, see [10]. The same is true of the dimension d^T.

§ 5. Dimension and entropy for purely discontinuous vector processes

Let $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ be a purely discontinuous vector process, i.e.

$$X(t) = \big(X_1(t), \ldots, X_r(t)\big), \; 0 \leq t < \infty,$$

where $\{X_k(t) : t \in [0, \infty)\}$, $k = 1, \ldots, r$, are PDP : s. By $N_k(T)$ we denote the number of jumps on the interval $(0, T)$ of the $k : th$ PDP, $k = 1, \ldots, r$. Put

$$N(T) = \big(N_1(T), \ldots, N_r(T)\big).$$

If $n = (n_1, \ldots, n_r)$, where $\{n_k\}$ are nonnegative integers we put

$$q_n(T) = P\{N(T) = n\}.$$

The points of jump of the $k : th$ process are denoted $t_{k1} < t_{k2} < \ldots$. Measurability questions are here treated in the same way as in § 3. For $n = (n_1, \ldots, n_r)$ we let

$$\xi_n(T) = \big(t_{11}, \ldots, t_{1n_1}, t_{21}, \ldots, t_{rn_r}, X_1(+0),$$
$$X_1(t_{11} + 0), \ldots, X_r(t_{rn_r} + 0)\big)$$

have the conditional distribution of the points of jump and the corresponding X_k-values, $k = 1, \ldots, r$, given that $N(T) = n$. If the dimension and entropy of $\xi_n(T)$ exist we denote them $d_n(T)$ and $H_{d_n}(T)$. If we change $\sum_{n=0}^{\infty}$ into

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=0}^{\infty}$$

we can use the definitions 1 and 2 literally to define the dimension

$$d^T = d^T(X) = d^T(X_1, \ldots X_r)$$

and the d^T-dimensional entropy

$$H^T = H^T(X) = H^T(X_1, \ldots X_r)$$

of $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ regarded on the interval $(0, T)$.

With these definitions we find for example:
If $\{X_k(t) : t \in [0, \infty)\}$, $k = 1, \ldots, r$, are independent processes, then

$$d^T(X_1, \ldots X_r) = \sum_{k=1}^{r} d^T(X_k)$$

and

$$H^T(X_1, \ldots X_r) = \sum_{k=1}^{r} H^T(X_k),$$

if the respective right members exist. The proofs of these relations are straightforward computations from the definitions.

With $r = 2$, i.e. with two PDP : s, one can now define counterparts to mutual information and conditional entropy for pairs of random variables. For example, the conditional dimension and entropy of the process $\{X(t) : t \in \in [0, \infty)\}$ regarded on the interval $(0, T)$ given the process $\{Y(t) : t \in [0, \infty)\}$ on the same interval are defined by

$$d^T(X/Y) = d^T(X, Y) - d^T(Y)$$

and

$$H^T(X/Y) = H^T(X, Y) - H^T(Y),$$

if the right members exist, cf. § 4 of [1].

An example with Poisson processes. Let $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ and $\{Z(t) : t \in [0, \infty)\}$ be independent separable Poisson processes with parameters λ and μ. Let $Y(t) = X(t) + Z(t)$, for $0 \leq t < \infty$. Then $\{Y(t) : t \in [0, \infty)\}$ becomes a separable Poisson process with parameter $\lambda + \mu$. We shall now calculate $d^T(X, Y)$, $H^T(X, Y)$, $d^T(X/Y)$ and $H^T(X/Y)$.

Let $N_1(T)$ and $N(T)$ be the number of jumps of $X(t)$ and $Y(t)$ on the interval $0 < t < T$. For $N(T) = n$ and $N_1(T) = n_1$ we let

$$t = (t_1, \ldots, t_n), t_1 < t_2 < \ldots < t_n,$$

and

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}), \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n_1},$$

denote the points of jump of $Y(\cdot)$ and $X(\cdot)$. Then a.s. for every k, $1 \leq k \leq n_1$, $\tau_k = t_l$ for some l, $1 \leq l \leq n$. The conditional distribution of τ given t is finite with $\binom{n}{n_1}$ possible outcomes, all of which have the same probability. Therefore, cf. the example of § 3 in this paper and also § 4 of [1],

$$d(t, \tau) = d(t) = n$$

and

$$H(t, \tau) = \log \frac{T^n}{n!} + \log \binom{n}{n_1}.$$

From the definitions of dimension and entropy we then have

$$d^T(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{n} P\{X(T) = n_1, Y(T) = n\}\, n,$$

$$H^T(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{n} P\{X(T) = n_1, Y(T) = n\} \left[\log \frac{T^n}{n!} + \log \binom{n}{n_1}\right] -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{n} P\{X(T) = n_1, Y(T) = n\} \log P\{X(T) = n_1, Y(T) = n\},$$

which after some calculations gives that

$$d^T(X, Y) = (\lambda + \mu)\, T,$$

$$H^T(X, Y) = (\lambda + \mu)\, T \log e - \lambda T \log \lambda - \mu T \log \mu .$$

As $d^T(Y) = (\lambda + \mu)\, T$ and $H^T(Y) = (\lambda + \mu)\, T[\log e - \log (\lambda + \mu)]$,

see the example in § 3, one has that

$$d^T(X/Y) = 0,$$

$$H^T(X/Y) = [(\lambda + \mu) \log (\lambda + \mu) - \lambda \log \lambda - \mu \log \mu]\, T.$$

As the conditional entropy in this case is zero-dimensional it ought to be possible to calculate it without the use of the dimension concept. This is also the case. Let namely $\Delta = \{t_1, \ldots, t_n\}$ be a partition of the interval $(0, T)$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$, and put

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n+1} (t_i - t_{i-1}),$$

where $t_0 = 0$ and $t_{n+1} = T$. Then if $h(t_1, \ldots, t_n)$ is the conditional entropy of the random vector $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ given the random vector $(Y(t_1), \ldots$ $\ldots, Y(t_n))$ one can show that

$$h(t_1, \ldots, t_n) = [(\lambda + \mu) \log(\lambda + \mu) - \lambda \log \lambda - \mu \log \mu]\, T + O(|\Delta|),$$

i.e. $h(t_1, \ldots, t_n) \to H^T(X/Y)$ as $|\Delta| \to 0$.

§ 6. Approximation of continuous processes

Let $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ be a stochastic process, whose sample functions a.s. are continuous. Further, suppose for simplicity, that $\mathbf{P}\{X(0) = x_0\} = 1$ for some x_0, $-\infty < x_0 < \infty$. We can then form an approximating PDP in the following way. Put $\tau_0 = 0$ and

$$\tau_{n+1} = \inf \{t : t > \tau_n, |X(t) - X(\tau_n)| = \varepsilon\}, n = 0, 1, \ldots .$$

If for some n we have $|X(t) - X(\tau_n)| < \varepsilon$ for all $t > \tau_n$ we put $\tau_{n+1} = \tau_{n+2} = \ldots = \infty$. As the sample functions a.s. are continuous, $\{\tau_n\}$ become random variables defined on a set of probability one and possibly taking the value ∞ with positive probability. A detailed proof of this fact can be made with the help of a sequence $\{r_i\}$ dense in $(0, \infty)$, cf. the proofs of lemmata 1 and 2.

We put

$$X_\varepsilon(t) = X(\tau_n), \tau_n \leqq t < \tau_{n+1}, n = 0, 1, \ldots .$$

As $\mathbf{P}\{\tau_n \to \infty\} = 1$, $X_\varepsilon(t)$ is defined a.s. for $0 \leqq t < \infty$ and $\{X_\varepsilon(t) : t \in [0, \infty)\}$ becomes a PDP approximating the original process in the sense that

$$\mathbf{P}\{\lim_{\varepsilon \to 0} (\sup_{0 \leqq t < \infty} |X_\varepsilon(t) - X(t)|) = 0\} = 1 .$$

Suppose that the dimension $d^T(X_\varepsilon)$ exists for every $T > 0$. We pu

$$d_\varepsilon(X) = \lim_{T \to \infty} \frac{d^T(X_\varepsilon)}{T},$$

if the limit exists. The asymptotic properties of $d_\varepsilon(X)$ as ε tends to zero can then be used to characterize the original process.

If $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ has independent and stationary increments (for these concepts see [6]), the sequence $\{\tau_n\}$ constitutes a renewal process. If the gap distribution function F is absolutely continuous we have according to theorem 3

$$d_\varepsilon(X) = \frac{1}{\mu},$$

where

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x) .$$

For by the calculation of the dimension of the process $\{X_\varepsilon(t) : t \in [0, \infty)\}$ we need not take account of the values of the process as $\{X(\tau_1), \ldots, X(\tau_n)\}$ for every n is a random vector taking a finite number of values.

Example. Let $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ be a separable Brownian motion process. According to [5]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x) = \frac{1}{\cosh \sqrt{2 \lambda} \varepsilon},$$

where F is the gap distribution function. Therefore

$$\mu = \lim_{\lambda \to 0} \left\{ - \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\cosh \sqrt{2 \lambda} \varepsilon} \right\} = \varepsilon^2 ,$$

and

$$d_\varepsilon(X) = \frac{1}{\varepsilon^2} .$$

This result can compared with JAGLOMS result

$$H_\varepsilon = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2} + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),$$

see [8] page 107. H_ε is the KOLMOGOROV ε-entropy for the Brownian motion process on the interval $(0, 1)$, when the sample functions are considered as elements of $L^2(0, 1)$.

Acknowledgements

For stimulating discussions on the subject of this paper I thank Professor Harald Bergström. I also want to express my thanks to I. Csiszár and Jan Petersson for valuable remarks and to Statens Tekniska Forskningsgråd, from which I held a research fellowship during most of the time spent on the work on the subject of this paper.

(Received September 17, 1963)

REFERENCES

[1] BALATONI, J. and RÉNYI, A.: »Zum Begriff der Entropie«. (German translation from Hungarian in *Arbeiten zur Informationstheorie*, I, Berlin, 1957, pp. 117—134.)

[2] CHINTSCHIN, A. J.: »Der Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.« (German translation from Russian in *Arbeiten zur Informationstheorie*, I, Berlin, 1957, pp. 7—25.)

[3] CHUNG, K. L.: *Markov chains with stationary transition probabilities*. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.

[4] CSISZÁR, I.: ,,Some remarks on the dimension and entropy of random variables". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 399—408.

[5] DARLING and SIEGERT: ,,The first passage problem for a continuous Markov process". *Ann. Math. Statist.*, **24** (1953), 624—639.

[6] DOOB, J. L.: *Stochastic processes*. New York, 1953.

[7] FISZ, M.: ,,Characterization of sample functions of stochastic processes by some absolute probabilities." *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol.* 2 (1961) 143—151.

[8] KOLMOGOROW, A. N.: ,,Theorie der Nachrichtenübermittlung". (German translation from Russian in *Arbeiten zur Informationstheorie*, I, Berlin, 1957, pp. 91—116).

[9] RÉNYI, A.: ,,On the dimension and entropy of probability distributions." *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), 193—215.

[10] SMITH, C.: ,,Renewal theory and its ramifications". *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **20** (1958), 243—282.

[11] TAKÁCS, L.: *Stochastic processes*. London, 1960.

РАЗМЕРНОСТЬ И ЭНТРОПИЯ ОДНОГО КЛАССА СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

M. RUDEMO

Резюме

Пусть $\{X(t):\ t \in [0, \infty]\}$ чисто разрывный стохастический процесс, т. е. его реализации $X(t)$ с вероятностью 1 ступенчатые функции с конечным числом скачков на каждом конечном интервале времени. Пусть $N(t)$ означает число скачков внутри интервала $(0, T)$ $t_1 < t_2 < \ldots < t_{N(T)}$-точки скачков.

Пусть $q_n(T) = \mathbf{P}\{N(T) = n\}$, обозначим через $d_n(T)$ и $H_{d_n}(T)$ размерность и энтропию условного распределения векторного переменного $\xi_n(T) = (t_1, \ldots, t_n, X(+0), X(t_1+0), \ldots, X(t_n+0))$ размерности $(2n+1)$ при условии $N(T) = n$ и при предположении, что первые существуют (см. [9]).

Пусть $\{X(t); t \in [0, \infty]\}$ обозначает процесс на интервале $(0, T)$; его размерность автор определяет следующим образом

$$d^T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(T)\, d_n(T),$$

а энтропию размерности $d^T(X)$ посредством

$$H^T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(T)\, H_{d_n}(T) - \sum_{n=0}^{\infty} q_n(T) \log q_n(T),$$

если ряды сходятся.

Автор доказывает, что в случае гомогенной сепарабельной эргодической цепи Маркова с конечным числом состояний $d^T(X)$ является дифференцируемой по T функцией и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{d}{dT} d^T(X) = \sum P_i q_i,$$

где $\{P_i\}$ — стационарное распределение и $\{q_i\}$ переходные интенсивности.

Кроме этого автор исследует асимптотическое поведение размерности при $T \to \infty$ в случае рекурентных процессов, несколько примеров, связанных с процессами Пуассона, а также асимптотическое поведение размерности чисто разрывных процессов, аппроксимирующих процесс Винера.

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Katalin FANTA[1] и Otto KIS

1. В настоящей работе речь идет о приближенном решении дифференциального уравнения

$$y^{(2m)}(x) - \lambda \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x) \tag{1.1}$$

при однородных граничных условиях

$$\sum_{k=0}^{2m-1} [a_{ik}\, y^{(k)}(-1) + b_{ik}\, y^{(k)}(1)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m) \tag{1.2}$$

методом подобластей, предложенным К. Б. Биценко и Р. Граммелем в книге [1], и методами A и B, предложенными И. Петерсеном в статье [2].

В первом из этих методов приближенное решение $y_n(x)$ ищется в виде многочлена степени $n - 1 + 2m$. (Здесь и в дальнейшем под многочленом степени N понимается многочлен, степень которого не превосходит N.) Его коэффициенты определяются с помощью граничных условий и уравнений

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[y_n^{(2m)}(x) - \lambda \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y_n^{(k)}(x) - f(x) \right] dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.3}$$

где узлы x_i могут быть любыми числами, удовлетворяющими неравенствам

$$1 \geqq x_0 > x_1 > \ldots > x_n \geqq -1 .$$

(Узлы x_i зависят от n, но, чтобы упростить запись, мы пишем x_i вместо $x_{i,n}$). Во втором методе $y_n(x)$ есть многочлен степени $2n + 2m$, удовлетворяющий условиям (1.2), (1.3) и

$$y_n^{(2m)}(x_i) - \lambda \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x_i)\, y_n^{(k)}(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.4}$$

---

[1] Политехнический Институт, Будапешт

В третьем методе степень многочлена $y_n(x)$ равна $2n+1+2m$ и должны выполняться равенства (1.2), (1.4) и

$$\left\{\frac{d}{dx}\left[y_n^{(2m)}(x) - \lambda \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y_n^{(k)}(x) - f(x)\right]\right\}_{x=x_i} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.5}$$

В случае граничных условий

$$y^{(k)}(-1) = y^{(k)}(1) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{1.6}$$

эти методы были изучены И. Петерсеном в работе [2]. Им были получены следующие результаты. Пусть λ не является собственным значением граничной задачи (1.1), (1.6); на отрезке $[-1, 1]$ функции $f_k(x)$ $(k = 0, \ldots, 2m-2)$ и $f(x)$ r раз непрерывно дифференцируемы и их производные порядка r удовлетворяют условию Липшица с показателем α;

$$|f_{2m-2}(x)| \leqq c_1 \sqrt{1-x^2} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

(здесь и в дальнейшем постоянные c_i не зависят от x и n);

$$x_i = \cos\frac{2i+1}{n+1}\,\frac{\pi}{2} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.7}$$

Если $r \geqq 1$, $1 \geqq \alpha > 0$, то при достаточно больших n приближенное решение метода подобластей и метода А существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$|y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(x)| \leqq c_2\, n^{-r-\alpha+1} \ln n \quad (-1 \leqq x \leqq 1,\ k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$$

$$|y^{(2m)}(x) - y_n^{(2m)}(x)| \sqrt{1-x^2} \leqq c_2\, n^{-r-\alpha+1} \ln n \quad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

где $y(x)$ точное решение граничной задачи. Если $r \geqq 2$, $1 \geqq \alpha > 0$, то при достаточно больших n приближенное решение метода В существует, единственно и

$$|y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(x)| \leqq c_3\, n^{-(r+\alpha-2)} \quad (-1 \leqq x \leqq 1,\ k = 0, 1, \ldots, 2m),$$

$$|y^{(2m+1)}(x) - y_n^{(2m+1)}(x)| \sqrt{1-x^2} \leqq c_3\, n^{-(r+\alpha-2)} \quad (-1 \leqq x \leqq 1).$$

Ниже мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть на отрезке $[-1, 1]$ функции $f_k(x)$ $(k = 0, \ldots, 2m-2)$ и $f(x)$ r раз непрерывно дифференцируемы и их производные порядка r удовлетворяют условию Липшица с показателем α; граничные условия (1.2) таковы, что им не удовлетворяет ни один многочлен степени $2m-1$*[2]*; λ не является собственным числом граничной задачи (1.1), (1.2). Если $r \geqq 0$, $0 < \alpha \leqq 1$ в случае $r = 0$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ в случае $r \geqq 1$ и*

$$x_i = \cos\frac{i\pi}{n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{1.8}$$

то при достаточно больших n приближенное решение метода подобластей и метода А существует, единственно и

$$|y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(x)| \leqq c_4\, n^{-r-\alpha} \ln n \quad (-1 \leqq x \leqq 1,\ k = 0, 1, \ldots, 2m) \tag{1.9}$$

Если $r \geqq 1,\ 0 \leqq \alpha \leqq 1$,

$$f_{2m-2}(x) = 0 \tag{1.10}$$

и выполняется (1.7), *то при достаточно больших* n *приближенное решение метода B существует, единственно и имеет место* (1.9).

2. Обозначим через $l_k(x)$ фундаментальные многочлены Лагранжева интерполирования по узлам (1.8). (Чтобы упростить запись, мы пишем $l_k(x)$ вместо $l_{k,n}(x)$.) Приступая к доказательству теоремы, мы покажем, что имеет место следующая

Лемма 1. *Если* $1 \leqq k < i \leqq n-1$, *то на отрезке* $[x_{i+1}, x_i]$

$$|l_k'(x)|\sqrt{1-x_k^2} < \frac{2n}{i-k} + \frac{n}{4(i-k)^2}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$t = \arc\cos x \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

$$t_i = \frac{i\pi}{n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Известно (см., например, статью Д. Л. Бермана [3]), что

$$l_k(x) = (-1)^{k+1}\frac{\sin t \sin nt}{n(\cos t - \cos t_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.2}$$

Поэтому при $1 \leqq k \leqq n-1$

$$l_k'(x) = (-1)^k\left[\frac{\cos t \sin nt}{n \sin t(\cos t - \cos t_k)} + \frac{\cos nt}{\cos t - \cos t_k} + \frac{\sin t \sin nt}{n(\cos t - \cos t_k)^2}\right]. \tag{2.3}$$

Так как

$$\sqrt{1-x_k^2} = \sqrt{1-\cos^2 t_k} = \sin t_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{2.4}$$

то при $1 \leqq k \leqq n-1$

$$|l_k'(x)|\sqrt{1-x_k^2} = \sin t_k\left|\frac{\cos t \sin nt}{n \sin t(\cos t - \cos t_k)} + \frac{\cos nt}{\cos t - \cos t_k} + \frac{\sin t \sin nt}{n(\cos t - \cos t_k)^2}\right|. \tag{2.5}$$

Воспользовавшись неравенствами

$$|\cos t| \leqq 1, \tag{2.6}$$

$$|\sin nt| \leqq n \sin t, \tag{2.7}$$

$$|\cos nt| \leqq 1, \tag{2.8}$$

$$|\sin nt| \leqq 1, \tag{2.9}$$

---

[2] Для граничных условий (1.6) это условие выполняется.

получаем отсюда формулу

$$|l_k'(x)|\sqrt{1-x_k^2} \leqq \frac{2\sin t_k}{|\cos t - \cos t_k|} + \frac{\sin t_k \sin t}{n(\cos t - \cos t_k)^2}.$$

Оценим стоящие справа величины:

$$|\cos t - \cos t_k| = 2\sin\frac{t+t_k}{2}\left|\sin\frac{t-t_k}{2}\right|, \tag{2.10}$$

$$\sin t_k \leqq \sin t_k + \sin t = 2\sin\frac{t+t_k}{2}\cos\frac{t-t_k}{2} \leqq 2\sin\frac{t+t_k}{2},$$

$$\sin t_k \sin t \leqq \frac{1}{4}(\sin t_k + \sin t)^2 \leqq \sin^2\frac{t+t_k}{2}.$$

Мы видим, что

$$|l_k'(x)|\sqrt{1-x_k^2} \leqq \frac{2}{\left|\sin\frac{t-t_k}{2}\right|} + \frac{1}{4n\sin^2\frac{t-t_k}{2}}. \tag{2.11}$$

Если

$$x_{i+1} \leqq x \leqq x_i,$$

то

$$t_i \leqq t \leqq t_{i+1}.$$

В случае $1 \leqq k < i \leqq n-1$

$$t_i - t_k \leqq t - t_k \leqq \pi.$$

Поэтому

$$\sin\frac{t-t_k}{2} \geqq \sin\frac{t_i - t_k}{2} = \sin\frac{i-k}{2n}\pi > \frac{i-k}{n}. \tag{2.12}$$

Отсюда и из (2.11) следует (2.1).

Лемма 2. *Если* $0 \leqq i \leqq n-3$, $i+2 \leqq k \leqq n-1$, *то на отрезке* $[x_{i+1}, x_i]$

$$|l_k'(x)|\sqrt{1-x_k^2} < \frac{2n}{k-i-1} + \frac{n}{4(k-i-1)^2}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Теперь

$$t_k - t_{i+1} \leqq t_k - t \leqq \pi,$$

$$\sin\frac{t_k - t}{2} \geqq \sin\frac{t_k - t_{i+1}}{2} > \frac{k-i-1}{n}, \tag{2.14}$$

Отсюда и из (2.11) следует (2.13).

3. Лемма 3. *Пусть* $1 \leqq i \leqq n-1$. *На отрезке* $[x_{i+1}, x_i]$

$$|l_i'(x)|\sqrt{1-x_i^2} < 4n. \tag{3.1}$$

Доказательство. Из (2.5) и (2.6) следует неравенство

$$
\begin{aligned}
&|\,l_i'(x)\,|\sqrt{1-x_i^2} \leqq \frac{\sin t_i\,|\sin nt\,|}{n\sin t\,|\cos t-\cos t_i\,|}+ \\
(3.2)\qquad & +\sin t_i\,\frac{|\,n\cos nt(\cos t-\cos t_i)+\sin t\sin nt\,|}{n(\cos t-\cos t_i)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Оценим стоящие справа слагаемые. Начнем с первого из них. Пусть сначала

$$t \leqq \pi-\frac{\pi}{2n}.$$

Из формул (2.10) и

$$|\sin nt\,| = |\sin nt-\sin nt_i\,| = \left|2\sin n\frac{t-t_i}{2}\cos n\frac{t+t_i}{2}\right| \leqq$$

$$\leqq 2\left|\sin n\frac{t-t_i}{2}\right| \leqq 2n\left|\sin\frac{t-t_i}{2}\right|$$

следует неравенство

$$\frac{|\sin nt\,|}{|\cos t-\cos t_i\,|} \leqq \frac{n}{\sin\dfrac{t+t_i}{2}}\,.$$

Здесь

$$\frac{\pi}{n} \leqq t_i \leqq \pi-\frac{\pi}{n},$$

$$\frac{\pi}{n} \leqq t \leqq \pi-\frac{\pi}{2n},$$

поэтому

$$\frac{\pi}{n} \leqq \frac{t+t_i}{2} \leqq \pi-\frac{3\pi}{4n},$$

$$\sin\frac{t+t_i}{2} \geqq \sin\frac{3\pi}{4n} > \frac{3}{2n},$$

$$\frac{|\sin nt\,|}{|\cos t-\cos t_i\,|} < \frac{2n^2}{3}.$$

С другой стороны

$$
(3.3)\qquad \frac{\sin t_i}{\sin t} \leqq \begin{cases} 1, \text{ если } i<\dfrac{n}{2}, \\[2ex] \dfrac{\sin t_{n-i}}{\sin\dfrac{1}{2}t_{n-i}} = 2\cos\dfrac{1}{2}t_{n-i} < 2, \quad \text{если } i \geqq \dfrac{n}{2}\,. \end{cases}
$$

Мы видим, что

$$\frac{\sin t_i}{n \sin t} \frac{|\sin nt|}{|\cos t - \cos t_i|} < \frac{4n}{3}. \tag{3.4}$$

Пусть теперь $i = n - 1$ и

$$\pi - \frac{\pi}{2n} < t \leqq \pi .$$

В этом случае

$$\sin t_i = \sin t_{n-1} = \sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{3\pi}{4n} + \sin \frac{3\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{4n} < \sin \frac{\pi}{4n} + \sin \frac{3\pi}{4n},$$

$$\cos t_i - \cos t > \cos \left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) - \cos \left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= \cos \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin \frac{\pi}{4n} \sin \frac{3\pi}{4n},$$

$$\frac{\sin t_i}{\cos t_i - \cos t} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{4n}} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4n}} \right) < \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{3} + 2n \right) = \frac{4n}{3}.$$

Отсюда и из (2.7) снова получаем (3.4).

Займемся вторым слагаемым суммы, стоящей в правой части неравенства (3.2). Числитель и знаменатель дроби

$$\frac{n \cos nt (\cos t - \cos t_i) + \sin t \sin nt}{(\cos t - \cos t_i)^2}$$

исчезает в точке $t = t_i$. Поэтому можно воспользоваться теоремей Коши о среднем, согласно которой эта величина равна выражению

$$\frac{-n^2 \sin n\tau (\cos \tau - \cos t_i) + \cos \tau \sin n\tau}{-2(\cos \tau - \cos t_i) \sin \tau},$$

где

$$t_i < \tau < t .$$

Поэтому второе слагаемое суммы, стоящей в правой части формулы (3.2), не превосходит

$$\frac{n \sin t_i |\sin n\tau|}{2 \sin \tau} + \frac{\sin t_i |\sin n\tau|}{2n \sin \tau |\cos \tau - \cos t_i|} .$$

Вторая часть этого выражения в силу (3.4) не превосходит $\frac{2n}{3}$. Займемся первой частью.

Если

$$\tau \leqq \pi - \frac{\pi}{2n},$$

то в силу (2.9) и (3.3) с τ вместо t она не превосходит n, а если $i = n - 1$ и

$$\pi - \frac{\pi}{2n} < \tau \leqq \pi ,$$

то в силу (2.7) и формулы

$$\sin t_i = \sin t_{n-1} = \sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n} < \frac{4}{n}$$

она не превосходит $2n$.

Таким образом второе слагаемое суммы, стоящей в правой части неравенства (3.2), не превосходит $\frac{8n}{3}$. Отсюда и из (3.4) следует (3.1).

Лемма 4. *Пусть* $0 \leqq i \leqq n - 2$. *На отрезке* $[x_{i+1}, x_i]$

$$| l'_{i+1}(x) | \sqrt{1 - x_{i+1}^2} < 4n . \tag{3.5}$$

Доказательство этого вспомогательного предложения проводится аналогично предыдущему.

4. Лемма 5. *На отрезке* $[-1, 1]$

$$\sum_{k=0}^{n} | l'_k(x) | \sqrt{1 - x_k^2} < n(13 + 4 \ln n) . \tag{4.1}$$

Доказательство. Так как

$$x_0 = 1, x_n = -1,$$

то первый и последний член суммы, стоящей в левой части неравенства (4.1), равны нулю. Пусть

$$x_i \geqq x \geqq x_{i+1} .$$

Если $2 \leqq i \leqq n - 1$, то при $1 \leqq k \leqq i - 1$ мы воспользуемся неравенством (2.1). Если $0 \leqq i \leqq n - 3$, то при $i + 2 \leqq k \leqq n - 1$ мы обратимся к формуле (2.13). В случае $1 \leqq i \leqq n - 1$ мы воспользуемся также неравенством (3.1), а в случае $0 \leqq i \leqq n - 2$ — (3.5). Таким образом

$$\sum_{k=0}^{n} | l'_k(x) | \sqrt{1 - x_k^2} < \sum_{k=1}^{i-1} \left[\frac{2n}{i - k} + \frac{n}{4(i - k)^2} \right] +$$

$$+ 8n + \sum_{k=i+2}^{n-1} \left[\frac{2n}{k - i - 1} + \frac{n}{4(k - i - 1)^2} \right] < 4n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} +$$

$$+ \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} + 8n < 4n(1 + \ln n) + \frac{n}{2} \frac{\pi^2}{6} + 8n < n(13 + 4 \ln n) ,$$

что и требовалось доказать.

5. Лемма 6. *Пусть*

$$\omega(x) = \sin t \sin nt , \tag{5.1}$$

в случае узлов (1.8)

$$\left| \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right| \leqq \frac{2n^2 + 1}{3} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) . \tag{5.2}$$

Доказательство Очевидно

$$\omega'(x) = \frac{\cos t \sin nt + n \sin t \cos nt}{-\sin t} = -\frac{\cos t \sin nt}{\sin t} - n \cos nt\,.$$

Поэтому

$$\omega'(x_k) = \begin{cases} (-1)^{k+1} n, & \text{если} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ (-1)^{k+1} 2n, & \text{если} \quad k = 0, n\,. \end{cases}$$

Так как

$$\omega''(x) = -\frac{\sin nt}{\sin t} + \frac{n \cos t \cos nt}{\sin^2 t} - \frac{\cos^2 t \sin nt}{\sin^3 t} - \frac{n^2 \sin nt}{\sin t}\,,$$

то

$$\omega''(x_k) = (-1)^k \frac{n \cos t_k}{\sin^2 t_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\,.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{t=0} \frac{n \sin t \cos nt - \cos t \sin nt}{\sin^3 t} = \lim_{t=0} \frac{(1-n^2) \sin t \sin nt}{3 \sin^2 t \cos t} = -\frac{n(n^2-1)}{3}\,.$$

Следовательно

$$\omega''(x_0) = -\frac{n(n^2-1)}{3} - n(n^2+1) = -\frac{4n^3}{3} - \frac{2n}{3}\,.$$

Аналогичным образом

$$\omega''(x_n) = (-1)^n \left(\frac{4n^3}{3} + \frac{2n}{3}\right).$$

Мы видим, что

$$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = -\frac{\cos t_k}{\sin^2 t_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\,, \tag{5.3}$$

$$\frac{\omega''(x_0)}{\omega'(x_0)} = \frac{2n^2}{3} + \frac{1}{3}\,,$$

$$\frac{\omega''(x_n)}{\omega'(x_n)} = -\left(\frac{2n^2}{3} + \frac{1}{3}\right).$$

Из этих формул и неравенств

$$|\cos t_k| < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\,, \tag{5.4}$$

$$\sin t_k \geqq \sin t_1 = \sin \frac{\pi}{n} > \frac{2}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5.5}$$

следует утверждение леммы.

6. Лемма 7. *На отрезке* $[-1, 1]$

$$\sum_{\kappa=0}^{n} l_k^2(x) < 12\,. \tag{6.1}$$

Доказательство. Известно (см. [3]), что

$$l_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{\sin t \sin nt}{2n(\cos t - \cos t_k)} \qquad (k = 0, n). \tag{6.2}$$

Отсюда и из (2.2) следует неравенство

$$|l_k(x)| \leqq \frac{\sin t}{n} \left| \frac{\sin nt}{\cos t - \cos t_k} \right| \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Из формул (2.9), (2.10) и

$$\sin t \leqq \sin t + \sin t_k = 2 \sin \frac{t + t_k}{2} \cos \frac{t - t_k}{2} \leqq 2 \sin \frac{t + t_k}{2}$$

следует неравенство

$$|l_k(x)| \leqq \frac{1}{n \left| \sin \dfrac{t - t_k}{2} \right|}.$$

Пусть

$$x_{i+1} \geqq x \geqq x_i.$$

Если $0 \leqq k < i \leqq n - 1$, то в силу (2.12)

$$|l_k(x)| < \frac{1}{i - k}.$$

Если $0 \leqq i \leqq n - 2$, $i + 2 \leqq k \leqq n$, то согласно (2.14)

$$|l_k(x)| < \frac{1}{k - i - 1}.$$

В [3] доказано, что

$$|l_k(x)| \leqq 2 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{6.3}$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} l_k^2(x) = \sum_{k=0}^{i-1} l_k^2(x) + l_i^2(x) + l_{i+1}^2(x) + \sum_{k=i+2}^{n} l_k^2(x) <$$

$$< \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)^2} + 8 + \sum_{k=i+2}^{n} \frac{1}{(k-i-1)^2} < 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} + 8 = \frac{\pi^2}{3} + 8 < 12,$$

что и требовалось доказать.

7. Обозначим через $A_k(x)$ и $B_k(x)$ многочлены степени $2n + 1$, удовлетворяющие условиям

$$A_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq k \\ 1, & \text{если} \quad i = k \end{cases}, \qquad A'_k(x_i) = 0,$$

$$B_k(x_i) = 0, \qquad B'_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq k \\ 1, & \text{если} \quad i = k \end{cases},$$

где $i = 0, 1, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Лемма 8. *В случае узлов* (1.8) на *отрезке* $[-1, 1]$

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k'(x)| < 4\, n^2 \ln n + 55\, n^2 + 2 \ln n + 26\,. \tag{7.1}$$

Доказательство. Как известно (см., например, стр. 504 монографии И. П. Натансона [4])

$$A_k(x) = \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\,(x - x_k)\right] l_k^2(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,,$$

где $\omega(x)$ есть многочлен степени $n+1$, исчезающий в точках x_i. Легко видеть, что имеет место (5.1) (см. стр. 420 и 423 книги [4]).

$$A_k'(x) = -\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\, l_k^2(x) + 2\left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\,(x - x_k)\right] l_k(x)\, l_k'(x)\,. \tag{7.2}$$

В силу (2.3) при $1 \leqq k \leqq n-1$

$$(x - x_k)\, l_k'(x) = (-1)^k \left[\frac{\cos t \sin nt}{n \sin t} + \cos nt + \frac{\sin t \sin nt}{n(\cos t - \cos t_k)}\right].$$

Если $k = 0$ или $k = n$, то согласно (6.2) справа надо добавить множитель $\frac{1}{2}$. Отсюда, из (2.6), (2.7), (2.8), (2.2), (6.2) и (6.3) следует неравенство

$$|(x - x_k)\, l_k'(x)| \leqq 4 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,, \tag{7.3}$$

Так как

$$|A_k'(x)| \leqq \left|\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right| l_k^2(x) + 2\,|l_k(x)|\,|l_k'(x)| + 2\left|\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right|\,|(x - x_k)\, l_k'(x)|\,|l_k(x)|\,,$$

то в силу (5.2), (6.3) и (7.3)

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k'(x)| \leqq \frac{2\,n^2+1}{3} \sum_{k=0}^{n} l_k^2(x) + 4 \sum_{k=0}^{n} |l_k'(x)| + 8\,\frac{2\,n^2+1}{3} \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)|\,.$$

В работах Д. Л. Бермана [5] и [6] доказано, что

$$\sum_{k=0}^{n} |l_k'(x)| \leqq n^2 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)\,, \tag{7.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |l_k(x)| \leqq 8 + \frac{2}{\pi} \ln n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)\,. \tag{7.5}$$

Принимая во внимание (6.1), имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k'(x)| \leqq 12\,\frac{2\,n^2+1}{3} + 4\,n^2 + 8\,\frac{2\,n^2+1}{3}\left(8 + \frac{2}{\pi}\ln n\right) <$$

$$< 4\,n^2 \ln n + 55\,n^2 + 2 \ln n + 26\,,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 9. *В случае узлов* (1.8) *на отрезке* $[-1, 1]$

$$\sum_{k=0}^{n} | A_k'(x) | \sqrt{1 - x_k^2} < 19\, n \ln n + 90\, n \,. \tag{7.6}$$

Доказательство. Так как $x_0 = 1$, $x_n = -1$, то первый и последний члены суммы равны нулю.

Из (2.4) и (5.3)—(5.5) получаем:

$$\sqrt{1 - x_k^2} \left| \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right| = \frac{|\cos t_k|}{\sin t_k} < \frac{n}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\,. \tag{7.7}$$

В силу (7.2), (7.7), (6.3), (7.3), (6.1), (4.1) и (7.5)

$$\sum_{k=1}^{n-1} | A_k'(x) | \sqrt{1 - x_k^2} \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right| \sqrt{1 - x_k^2}\, l_k^2(x) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} | l_k(x) |\, | l_k'(x) | \sqrt{1 - x_k^2} +$$
$$+ 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right| \sqrt{1 - x_k^2}\, | (x - x_k)\, l_k'(x) |\, | l_k(x) | < \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n-1} l_k^2(x) +$$
$$+ 4 \sum_{k=1}^{n-1} | l_k'(x) | \sqrt{1 - x_k^2} + 4\, n \sum_{k=1}^{n-1} | l_k(x) | < 12\, \frac{n}{2} + 4(13 + 4 \ln n)\, n +$$
$$+ 4\, n \left(8 + \frac{2}{\pi} \ln n \right) < 19\, n \ln n + 90\, n \,,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 10. *В случае узлов* (1.8) на отрезке $[-1, 1]$

$$\sum_{k=0}^{n} | B_k'(x) | < 76 + 6 \ln n \,. \tag{7.8}$$

Доказательство. Легко видеть (см. стр. 504 книги [4]), что

$$B_k(x) = (x - x_k)\, l_k^2(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)\,,$$

поэтому

$$B_k'(x) = l_k^2(x) + 2(x - x_k)\, l_k(x)\, l_k'(x) \,.$$

Отсюда, из (6.1), (7.3) и (7.5) получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} | B_k'(x) | \leqq \sum_{k=0}^{n} l_k^2(x) + 2 \sum_{k=0}^{n} | (x - x_k)\, l_k'(x) |\, | l_k(x) | <$$
$$< 12 + 2 \cdot 4 \left(8 + \frac{2}{\pi} \ln n \right) < 76 + 6 \ln n \,,$$

что и требовалось доказать.

8. Лемма 11. *Если на отрезке* $[-1, 1]$ *функция* $h(x)$ $r + 1$ *раз непрерывно дифференцируема* $(r \geqq 0)$ *и ее* $r + 1$*-ая производная удовлетворяет условию Липшица с показателем* α $(1 \geqq \alpha > 0$ *при* $r = 0$, $1 \geqq \alpha \geqq 0$ *при* $r \geqq 1)$, *то для любого* $n > r + 1$ *найдется такой многочлен* $q_n(x)$ *степени* n, *что на* $[-1, 1]$

$$|h(x) - q_n(x)| \leqq c_5 \left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)\right]^{r+1+\alpha}, \tag{8.1}$$

$$|h'(x) - q_n'(x)| < c_6 \left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha}. \tag{8.2}$$

Доказательство. Существование многочлена $q_n(x)$ степени n, удовлетворяющего на отрезке $[-1, 1]$ условию (8.1), следует из теоремы А. Ф. Тимана (см. монографию [7], стр. 276). Покажем, что для этого многочлена выполняется и неравенство (8.2).

Из (8.1) получаем:

$$|q_{2n}(x) - h(x)| \leqq c_5 \left[\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n}\right)\right]^{r+1+\alpha},$$

$$|q_n(x) - h(x)| \leqq 4^{r+1+\alpha} c_5 \left[\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n}\right)\right]^{r+1+\alpha}.$$

Отсюда и из неравенства

$$|q_{2n}(x) - q_n(x)| \leqq |q_{2n}(x) - h(x)| + |h(x) - q_n(x)|$$

следует:

$$|q_{2n}(x) - q_n(x)| \leqq (1 + 4^{r+\alpha+1})\, c_5 \left[\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n}\right)\right]^{r+1+\alpha}.$$

Воспользовавшись теоремой В. К. Дзядыка (см., например, [7], стр. 234) выводим отсюда:

$$|q_{2n}'(x) - q_n'(x)| \leqq (1 + 4^{r+\alpha+1})\, c_5 c_7 \left[\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n}\right)\right]^{r+\alpha}. \tag{8.3}$$

Пусть

$$c_8 = c_5 c_7 (4^{r+\alpha+1} + 1).$$

Из (8.3) следуют неравенства

$$|q_{2n}'(x) - q_n'(x)| < c_8\, 2^{-r-\alpha} \left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} < c_8 \left[\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} 2^{-r-\alpha},$$

$$|q_{4n}'(x) - q_{2n}'(x)| \leqq c_8 \left[\frac{1}{4n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4n}\right)\right]^{r+\alpha} <$$

$$< c_8\, 4^{-r-\alpha} \left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} < c_8 \left[\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} 4^{-r-\alpha},$$

$$|q_{8n}'(x) - q_{4n}'(x)| \leqq c_8 \left[\frac{1}{8n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8n}\right)\right]^{r+\alpha} <$$

$$< c_8\, 8^{-r-\alpha} \left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} < c_8 \left[\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} 8^{-r-\alpha}$$

и так далее.

Так как

$$h(x) - q_n(x) = [q_{2n}(x) - q_n(x)] + [q_{4n}(x) - q_{2n}(x)] + [q_{8n}(x) - q_{4n}(x)] + \ldots$$

и геометрический ряд

$$c_8\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} 2^{-r-\alpha} + c_8\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} 4^{-r-\alpha} + \\ + c_8\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} 8^{-r-\alpha} + \ldots$$

сходится, то

$$h'(x) - q'_n(x) = [q'_{2n}(x) - q'_n(x)] + [q'_{4n}(x) - q'_{2n}(x)] + [q'_{8n}(x) - q'_{4n}(x)] + \ldots$$

и

$$|h'(x) - q'_n(x)| \leqq |q'_{2n}(x) - q'_n(x)| + |q'_{4n}(x) - q'_{2n}(x)| + |q'_{8n}(x) - q'_{4n}(x)| + \ldots < \\ < c_8\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} 2^{-r-\alpha} + c_8\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} 4^{-r-\alpha} + \\ + c_8\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha} 8^{-r-\alpha} + \ldots = \frac{c_8}{2^{r+\alpha}-1}\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)\right]^{r+\alpha}.$$

Положив

$$c_6 = \frac{c_8}{2^{r+\alpha}-1},$$

получаем (8.2).

9. Обозначим через $L_n[h(x), x]$ интерполяционный многочлен Лагранжа степени n, совпадающий в узлах (1.8) с функцией $h(x)$.

Лемма 12. *Если на отрезке $[-1, 1]$ функция $h(x)$ $r+1$ раз непрерывно дифференцируема и ее $r+1$-ая производная удовлетворяет условию Липшица с показателем α, то при $n > r+1$*

$$|h'(x) - L'_n[h(x), x]| < c_9\, n^{-r-\alpha} \ln n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1). \tag{9.1}$$

Доказательство. Очевидно

$$h'(x) - L'_n[h(x), x] = h'(x) - q'_n(x) + L'_n[q_n(x) - h(x), x].$$

Поэтому

$$|h'(x) - L'_n[h(x), x]| \leqq |h'(x) - q'_n(x)| + |L'_n[q_n(x) - h(x), x]|.$$

Здесь

$$L'_n[q_n(x) - h(x), x] = \sum_{k=0}^{n} [q_n(x_k) - h(x_k)]\, l'_k(x).$$

Следовательно

$$|L'_n[q_n(x) - h(x), x]| \leqq \sum_{k=0}^{n} |q_n(x_k) - h(x_k)|\, |l'_k(x)|.$$

Принимая во внимание (8.1) и (8.2), мы видим, что

$$| h'(x) - L_n'[h(x), x] | < c_6 \left[\frac{1}{n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right) \right]^{r+\alpha} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} c_5 \left[\frac{1}{n} \left(\sqrt{1-x_k^2} + \frac{1}{n} \right) \right]^{r+1+\alpha} | l_k'(x) | < c_6 \, 2^{r+\alpha} n^{-r-\alpha} +$$

$$+ c_5 \, 2^{r+\alpha} n^{-r-\alpha-1} \left[\sum_{k=0}^{n} \sqrt{1-x_k^2} \, | l_k'(x) | + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} | l_k'(x) | \right].$$

Отсюда, из (4.1) и (7.4) следует:

$$| h'(x) - L_n'[h(x), x] | < c_6 \, 2^{r+\alpha} n^{-r-\alpha} + c_5 \, 2^{r+\alpha} n^{-r-\alpha-1} [n(13 + 4 \ln n) + n] <$$

$$< 2^{r+\alpha} n^{-r-\alpha} (c_6 + 14 c_5 + 4 c_5 \ln n) ,$$

откуда получаем (9.1).

Обозначим через $H_n[h(x), x]$ интерполяционный многочлен Эрмита степени $2n+1$, удовлетворяющий условиям

$$H_n[h(x), x_k] = h(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) ,$$

$$H_n'[h(x), x_k] = h'(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) .$$

Лемма 13. *Если на* $[-1, 1]$ *функция* $h(x)$ $r+1$ *раз непрерывно дифференцируема и ее* $r+1$*-ая производная удовлетворяет условию Липшица с показателем* α, *то в случае узлов* (1.8) *при* $n > r+1$

$$(9.2) \qquad | h'(x) - H_n'[h(x), x] | < c_{10} \, n^{-r-\alpha} \ln n .$$

Доказательство. Очевидно

$$(9.3) \qquad h(x) - H_n[h(x), x] = h(x) - q_{2n}(x) + H_n[q_{2n}(x) - h(x), x] .$$

Поэтому

$$| h'(x) - H_n'[h(x), x] | \leq | h'(x) - q_{2n}'(x) | + | H_n'[q_{2n}(x) - h(x), x] | .$$

Так как

(9.4)

$$H_n[q_{2n}(x) - h(x), x] = \sum_{k=0}^{n} [q_{2n}(x_k) - h(x_k)] \, A_k(x) + \sum_{k=0}^{n} [q_{2n}'(x_k) - h'(x_k)] \, B_k(x) ,$$

то

$$| h'(x) - H_n'[h(x), x] | \leq |h'(x) - q_{2n}'(x) | + \sum_{k=0}^{n} | q_{2n}(x_k) - h(x_k) | \, | A_k'(x) | +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} | q_{2n}'(x_k) - h'(x_k) | \, | B_k'(x) | .$$

В силу (8.1) и (8.2)

$$|h'(x) - q'_{2n}(x)| < c_6 \left[\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n}\right)\right]^{r+\alpha} < c_6 \left(\frac{3}{4}\right)^{r+\alpha} n^{-r-\alpha},$$

$$|q_{2n}(x) - h(x)| < c_5 \left[\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n}\right)\right]^{r+1+\alpha} <$$

$$< c_5 \left(\frac{3}{4}\right)^{r+\alpha} n^{-r-1-\alpha}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4n}\right).$$

Поэтому

$$|h'(x) - H'_n[h(x), x]| < c_6 \left(\frac{3}{4}\right)^{r+\alpha} n^{-r-\alpha} +$$

$$+ c_5 \left(\frac{3}{4}\right)^{r+\alpha} n^{-r-\alpha-1}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-x_k^2}\,|A'_k(x)| + \frac{1}{4n}\sum_{k=0}^{n}|A'_k(x)|\right] +$$

$$+ c_6 \left(\frac{3}{4}\right)^{r+\alpha} n^{-r-\alpha}\sum_{k=0}^{n}|B'_k(x)|.$$

Отсюда, из (7.1), (7.6) и (7.8) получаем:

$$|h'(x) - H'_n[h(x), x]| < \left(\frac{3}{4}\right)^{r+\alpha} n^{-r-\alpha}\left[c_6 + c_5\left(\frac{19}{2}\ln n + 45 + \ln n + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{55}{4} + \frac{\ln n}{2n^2} + \frac{26}{4n^2}\right) + c_6(76 + 6\ln n)\right],$$

откуда следует (9.2).

Лемма 14. *Если на* $[-1, 1]$ *функция* $h(x)$ $r \geq 1$ *раз непрерывно дифференцируема и ее* r*-ая производная удовлетворяет условию Липшица с показателем* α $(1 \geq \alpha \geq 0)$, *то в случае узлов* (1.7) при $n > r+1$

$$|h(x) - H_n[h(x), x]| < c_{11} n^{-r-\alpha}\ln n. \tag{9.5}$$

Доказательство. В силу (9.3) и (9.4)

$$|h(x) - H_n[h(x), x]| \leq |h(x) - q_{2n}(x)| + \sum_{k=0}^{n}|h(x_k) - q_{2n}(x_k)|\,|A_k(x)| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n}|h'(x_k) - q'_{2n}(x_k)|\,|B_k(x)|.$$

Из леммы 11 получаем:

$$|h(x) - q_{2n}(x)| \leq c_5 \left[\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n}\right)\right]^{r+\alpha} < c_5\left(\frac{3}{4}\right)^{r+\alpha} n^{-r-\alpha},$$

$$|h'(x) - q'_{2n}(x)| < c_6 \left[\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2n}\right)\right]^{r-1+\alpha} < c_6\left(\frac{3}{4}\right)^{r-1+\alpha} n^{-r+1-\alpha}.$$

Поэтому

$$|h(x) - H_n[h(x), x]| < c_5 \left(\frac{3}{4}\right)^{r+\alpha} n^{-r-\alpha} \left[1 + \sum_{k=0}^{n} |A_k(x)|\right] +$$

$$+ c_6 \left(\frac{3}{4}\right)^{r-1+\alpha} n^{-r+1-\alpha} \sum_{k=0}^{n} |B_k(x)| .$$

В случае узлов (1.7) на $[-1, 1]$

$$A_k(x) \geqq 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(x) = 1$$

(см. [4], стр. 550). Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k(x)| = 1 .$$

Кроме того (см. [4], стр. 553)

$$\sum_{k=0}^{n} |B_k(x)| \leqq \frac{1}{n}\left(8 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

Мы видим, что

$$|h(x) - H_n[h(x), x]| < \left(\frac{3}{4}\right)^{r+\alpha} n^{-r-\alpha} \left[2\,c_5 + c_6 \frac{4}{3}\left(8 + \frac{4}{\pi} \ln n\right)\right],$$

откуда следует (9.5).

10. Пусть граничные условия (1.2) таковы, что им не удовлетворяет ни один многочлен степени $2m-1$, т. е. ни одно из решений дифференциального уравнения

$$y^{(2m)}(x) = 0 . \tag{10.1}$$

Тогда граничная задача (10.1), (1.2) имеет функцию Грина, которую мы обозначим через $g(x, t)$. Ее k-тую производную по переменной x мы обозначим через $g^{(k)}(x, t)$. Введем еще обозначение

$$k(x, t) = \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, g^{(k)}(x, t) , \tag{10.2}$$

где $f_k(x)$ коэффициенты дифференциального уравнения (1.1), имеющие r непрерывных производных, причем r-*тые* производные удовлетворяют условию Липшица с показателем α, где $0 < \alpha \leqq 1$, если $r = 0$, и $0 \leqq \alpha \leqq 1$, если $r \geqq 1$.

Лемма 15. *Последовательность*

$$k_n(x, t) = L_n'\Big[\int_1^x k(s, t)\, ds, x\Big] \tag{10.3}$$

на отрезке $[-1, 1]$ *равномерно сходится к функции* $k(x, t)$.

Доказательство. Производные $g^{(k)}(x, t)$ удовлетворяют на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица с показателем 1 и коэффициентом, не зависящим от переменной t. Функции $f_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица с показателем α, где $0 < \alpha \leqq 1$ при $r = 0$ и $\alpha = 1$ при $r \geqq 1$. Поэтому функция (10.2) удовлетворяет условию Липшица с показателем α и коэффициентом, не зависящим от переменной t. Следовательно функция $\int\limits_1^x k(s, t)\, ds$ дифференцируема и ее производная удовлетворяет условию Липшица с показателем α и коэффициентом, не зависящим от t. Поэтому при $n > r + 1$ на отрезке $[-1, 1]$ в силу леммы 12

$$| k(x, t) - L_n'[\int\limits_1^x k(s, t)\, ds, x] | < c_9 n^{-\alpha} \ln n ,$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 16. *Если имеет место* (1.8), *то на отрезке* $[-1, 1]$ *последовательность*

$$k_n(x, t) = H_n'[\int\limits_1^x k(s, t)\, ds, x] \tag{10.4}$$

равномерно сходится к функции $k(x, t)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$| k(x, t) - H_n'[\int\limits_1^x k(s, t)\, ds, x] | < c_{10} n^{-\alpha} \ln n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) ,$$

получаемого с помощью леммы 13.

Лемма 17. *Если имеет место* (1.7) *и* (1.10), $r \geqq 1$, *то последовательность*

$$k_n(x,t) = H_n[k(x, t), x] \tag{10.5}$$

равномерно сходится на отрезке $[-1, 1]$ *к функции* $k(x, t)$.

Доказательство. Функции $g^{(k)}(x, t)$ при $0 \leqq k \leqq 2m - 3$ дифференцируемы по переменной x и их производные удовлетворяют условию Липшиха с показателем 1 и коэффициентом, не зависящим от t. Производные функций $f_n(x)$ по условию леммы существуют и удовлетворяют условию Липшица с показателем $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Так как имеет место (1.10), то поэтому и функция $k(x, t)$ дифференцируема и ее производная удовлетворяет условию Липшица с показателем α и коэффициентом, не зависящим от t. Но тогда по лемме 14

$$| k(x, t) - H_n[k(x, t), x] | < c_{11} n^{-1-\alpha} \ln n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) ,$$

откуда следует утверждение леммы.

11. Лемма 18. *Если* λ *не является собственным значением граничной задачи* (1.1)—(1.2), *то она не является и собственным значением интегрального уравнения*

$$z(x) - \lambda \int\limits_{-1}^1 k(x, t)\, z(t)\, dt = f(x) \tag{11.1}$$

и их решения связаны равенствами

$$z(x) = y^{(2m)}(x) , \tag{11.2}$$

$$y(x) = \int\limits_{-1}^1 g(x, t)\, z(t)\, dt . \tag{11.3}$$

Доказательство. Пусть λ не является собственным значением граничной задачи (1.1)—(1.2) и $y(x)$ решение этой задачи. Определим функцию $z(x)$ равенством (11.2). Тогда имеет место и равенство (11.3) и поэтому

$$y^{(k)}(x) = \int_{-1}^{1} g^{(k)}(x,t)\, z(t)\, dt \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m-2)\,.$$

Следовательно

$$\sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x) \int_{-1}^{1} g^{(k)}(x,t)\, z(t)\, dt =$$

$$(11.4) \qquad = \int_{-1}^{1} z(t) \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, g^{(k)}(x,t)\, dt = \int_{-1}^{1} k(x,t)\, z(t)\, dt\,.$$

Отсюда, из (11.2) и (1.1) следует (11.1), т. е. это уравнение имеет решение, связанное с $y(x)$ формулами (11.2)—(11.3).

Так как решение уравнения (11.1) существует при любой непрерывной функции $f(x)$, то λ не является собственным значением интегрального уравнения.

12. Пусть λ не является собственным значением граничной задачи (1.1)—(1.2). Обозначим через $z(x)$ решение интегрального уравнения (11.1). Предположим, что $n > r + 1$.

Лемма 19. *Если функция* $k_n(x,t)$ *определяется формулой* (10.3), *то*

$$(12.1) \qquad \left| \int_{-1}^{1} [k(x,t) - k_n(x,t)]\, z(t)\, dt \right| < c_9\, n^{-r-\alpha} \ln n \qquad (- \leqq x \leqq 1)\,.$$

Доказательство. Функция $\int_{-1}^{1} k(x,t)\, z(t)\, dt$ имеет r-тую производную, удовлетворяющую условию Липшица с показателем α. Это следует из равенства (11.4) и предположений, сделанных о функциях $f_k(x)$ В силу этих предположений и дифференциального уравнения (1.1) функция $y(x)$ имеет $2m + r$ непрерывных производных. Поэтому функции $y^{(k)}(x)$ при $k = 0, 1, \ldots, 2m - 2$ имеют r-тую непрерывную производную, удовлетворяющую условию Липшица с показателем 1.

С другой стороны

$$\int_{-1}^{1} k_n(x,t)\, z(t)\, dt = \int_{-1}^{1} L_n' \Big[\int_{1}^{x} k(s,t)\, ds, x \Big] z(t)\, dt =$$

$$(12.2) \qquad = \int_{-1}^{1} z(t) \sum_{i=0}^{n} l_i'(x) \int_{1}^{x_i} k(s,t)\, ds\, dt = \sum_{i=0}^{n} l_i'(x) \int_{1}^{x_i} \int_{-1}^{1} k(s,t)\, z(t)\, dt\, ds =$$

$$= L_n' \Big[\int_{-1}^{x} \int_{-1}^{1} k(s,t)\, z(t)\, dt\, ds, x \Big]\,.$$

Принимая во внимание лемму 12, получаем (12.1).

Лемма 20. *Если имеет место* (1.8) *и* (10.4), *то выполняется* (12.1) *с* c_{10} *вместо* c_9.

Доказательство отличается от предыдущего лишь тем, что вместо (12.2) используется равенство

$$\int_{-1}^{1} k_n(x,t)\, z(t)\, dt = H_n'\Big[\int_{1}^{x}\int_{-1}^{1} k(s,t)\, z(t)\, dt\, ds, x\Big],$$

а вместо леммы 12 лемма 13.

Лемма 21. *Если имеет место* (1.7) *и* (10.5), $r \geqq 1$, *то выполняется* (12.1) *с* c_{11} *вместо* c_9.

Доказательство. Теперь используется формула

$$\int_{-1}^{1} k_n(x,t)\, z(t)\, dt = H_n\Big[\int_{-1}^{1} k(x,t)\, z(t)\, dt, x\Big]$$

и лемма 14.

13. Лемма 22. *Пусть*

$$f_n(x) = L_n'\Big[\int_{1}^{x} f(s)\, ds, x\Big]. \tag{13.1}$$

Если функция $k_n(x,t)$ *определяется формулой* (10.3), *то при достаточно больших* n *существует единственное решение интегрального уравнения*

$$z_n(x) - \lambda \int_{-1}^{1} k_n(x,t)\, z_n(t)\, dt = f_n(x) \tag{13.2}$$

и

$$|z(x) - z_n(x)| < c_{12}\, n^{-r-\alpha} \ln n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1). \tag{13.3}$$

Доказательство. Из доказательства теоремы, опубликованной на стр. 157 книги Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [8], видно, что если λ не является собственным значением интегрального уравнения (11.1) и последовательность $k_n(x,t)$ равномерно сходится к функции $k(x,t)$ на квадрате $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq t \leqq 1$, то при достаточно больших n интегральное уравнение (13.2) имеет единственное решение и на отрезке $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} |z(x) - z_n(x)| \leqq c_{13}\Big(&\max_{-1\leq x\leq 1}\Big|\int_{-1}^{1}[k(x,t) - k_n(x,t)]\, z(t)\, dt\Big| + \\ &+ \max_{-1\leq x\leq 1}|f(x) - f_n(x)|\Big). \end{aligned} \tag{13.4}$$

В нашем случае λ не является собственным значением уравнения (11.1) в силу леммы 18, а $k_n(x,t)$ сходится к $k(x,t)$ по лемме 15. Полагая в лемме 12

$$h(x) = \int_{1}^{x} f(s)\, ds,$$

получаем неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < c_9\, n^{-r-\alpha} \ln n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1). \tag{13.5}$$

Отсюда, из (12.1) и (13.4) следует (13.3). (Число c_9 в формуле (9.1) зависит от функции $h(x)$. Поэтому числа c_9 в (12.1) и (13.5), вообще говоря, различны. c_{12} есть произведение их суммы на c_{13}.

Лемма 23. *Пусть*

$$f_n(x) = H'_n\left[\int_1^x f(s)\,ds, x\right]. \tag{13.7}$$

Если имеет место (1.8) *и* (10.4), *то при достаточно больших n существует единственное решение уравнения* (13.2) *и имеет место* (13.3).

Доказательство отличается от предыдущего лишь тем, что вместо леммы 15 используется лемма 16, вместо леммы 12- лемма 13, вместо (12.1) — лемма 20.

Лемма 24. *Пусть выполняются равенства* (1.7), (10.5) *и*

$$f_n(x) = H_n[f(x), x]. \tag{13.8}$$

Если $r \geqq 1$, то при достаточно больших n существует единственное решение уравнения (13.2) *и имеет место* (13.3).

Доказательство этой леммы опирается на леммы 17, 21 и 14. В последней полагаем

$$h(x) = f(x).$$

14. Интегральные уравнения (11.1) можно приближенно решать методом подобластей, методом А и методом В. В первом случае приближенное решение $z_n(x)$ есть многочлен $n-1$-ой степени, коэффициенты которого определяются из уравнений

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[z_n(x) - \lambda\int_{-1}^{1} k(x,t)\,z_n(t)\,dt - f(x)\right]dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14.1}$$

Во втором случае степень многочлена $z_n(x)$ равна $2n$ и кроме уравнений (14.1) должны выполняться условия

$$z_n(x_i) - \lambda\int_{-1}^{1} k(x_i, t)\,z_n(t)\,dt = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{14.2}$$

В третьем случае степень $z_n(x)$ равна $2n+1$ и должны выполняться уравнения (14.2) и

$$z'_n(x_i) - \lambda\int_{-1}^{1} k'(x_i, t)\,z_n(t)\,dt = f'(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{14.3}$$

Лемма 25. *Определение многочлена $z_n(x)$ методом подобластей и из уравнения* (13.2), *где используются обозначения* (10.3) *и* (13.1), *равносильно.*

Доказательство. Пусть $z_n(x)$ есть решение уравнения (13.2). Так как $k_n(x, t)$ и $f_n(x)$ многочлены $n-1$-ой степени переменной x, то $z_n(x)$ такойже многочлен.

Проинтегрируем уравнение (13.2):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[z_n(x) - \lambda\int_{-1}^{1} k_n(x,t)\,z_n(t)\,dt - f_n(x)\right]dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{14.4}$$

Здесь

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_n(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_n'\Big[\int_1^x f(s)\,ds, x\Big]\,dx = L_n\Big[\int_1^x f(s)\,ds, x_i\Big] -$$

$$- L_n\Big[\int_1^x f(s)\,ds, x_{i-1}\Big] = \int_1^{x_i} f(x)\,dx - \int_1^{x_{i-1}} f(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$

и аналогичным образом

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} k_n(x,t)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x,t)\,dx.$$

Используя это равенство, имеем:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{-1}^{1} k_n(x,t)\,z_n(t)\,dt\,dx = \int_{-1}^{1} z_n(t)\int_{x_{i-1}}^{x_i} k_n(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} z_n(t)\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x,t)\,dx\,dt = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{-1}^{1} k(x,t)\,z_n(t)\,dt\,dx.$$

Мы видим, что из равенств (14.4) следуют формулы (14.1), поэтому решение уравнения (13.2) удовлетворяет этим формулам.

Пусть теперь $z_n(x)$ есть многочлен степени $n-1$, удовлетворяющий уравнениям (14.1). Сложим j из них и полученные таким образом равенства

$$\int_1^{x_j}\Big[z_n(x) - \lambda\int_{-1}^{1} k(x,t)\,z_n(t)\,dt - f(x)\Big]\,dx = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n) \tag{14.5}$$

помножим на $l_j'(x)$. Сложив полученные произведения, мы получим формулу

$$\sum_{j=0}^{n} l_j'(x)\int_1^{x_j}\Big[z_n(x) - \lambda\int_{-1}^{1} k(x,t)\,z_n(t)\,dt - f(x)\Big]\,dx = 0.$$

Перепишем ее в виде

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} l_j'(x)\int_1^{x_j} z_n(x)\,dx - \lambda\int_{-1}^{1} z_n(t)\sum_{j=0}^{n} l_j'(x)\int_1^{x_j} k(x,t)\,dx\,dt &= \\ = \sum_{j=0}^{n} l_j'(x)\int_1^{x_j} f(x)\,dx,&\end{aligned} \tag{14.6}$$

Здесь

$$\sum_{j=0}^{n} l_j'(x)\int_1^{x_j} z_n(x)\,dx = L_n'\Big[\int_1^x z_n(s)\,ds, x\Big] = \Big(\int_1^x z_n(s)\,ds\Big)' = z_n(x),$$

$$\sum_{j=0}^{n} l_j'(x)\int_1^{x_j} k(x,t)\,dx = L_n'\Big[\int_1^x k(s,t)\,ds, x\Big] = k_n(x,t),$$

$$\sum_{j=0}^{n} l_j'(x)\int_1^{x_j} f(x)\,dx = L_n'\Big[\int_1^x f(s)\,ds, x\Big] = f_n(x).$$

Поэтому формула (14.6) может быть переписана в виде (13.2), т.е. $z_n(x)$ является решением этого уравнения.

Мы видим, что функция $z_n(x)$ одновременно является решением уравнения (13.2) и приближенным решением уравнения (11.1), полученным методом подобластей, что мы и хотели доказать.

Лемма 26. *Определение многочлена* $z_n(x)$ *методом А и из уравнения* (13.2), *где используются обозначения* (10.4) *и* (13.7), *равносильно.*

Доказательство. Пусть $z_n(x)$ есть решение уравнения (13.2). Тогда он является многочленом $2n$-той степени, снова удовлетворяющим уравнениям (14.1). Он удовлетворяет также условиям (14.2), так как

$$f_n(x_i) = H_n' \Big[\int_1^x f(s)\, ds, x_i \Big] = \Big(\int_1^x f(s)\, ds \Big)'_{x=x_i} = f(x_i)\,,$$

аналогичным образом

$$k_n(x_i\,, t) = k(x_i\,, t)$$

и поэтому

$$\int_{-1}^{1} k_n(x_i\,, t)\, z_n(t)\, dt = \int_{-1}^{1} k(x_i\,, t)\, z_n(t)\, dt\,,$$

следовательно из (13.2) следует (14.2).

Пусть теперь $z_n(x)$ есть многочлен степени $2n$, удовлетворяющий условиям (14.1) и (14.2). Из (14.5) и (14.2) следует уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} \Big\{ A_k'(x) \int_1^{x_j} \Big[z_n(x) - \lambda \int_{-1}^{1} k(x, t)\, z_n(t)\, dt - f(x) \Big] dx +$$
$$+ B_k'(x) \Big[z_n(x_j) - \lambda \int_{-1}^{1} k(x_j, t)\, z_n(t)\, dt - f(x_j) \Big] \Big\} = 0\,.$$

Его нетрудно переписать в виде (13.2), если ввести обозначения (10.4) и (13.7).

Лемма 27. *Определение многочлена* $z_n(x)$ *методом В и из уравнения* (13.2), *где использованы обозначения* (10.5) *и* (13.8), *равносильно.*

Доказательство. Пусть $z_n(x)$ есть решение уравнения (13.2). Подставив в уравнение узлы x_i, получим уравнения (14.2), так как

$$f_n(x_i) = H_n[f(x), x_i] = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)\,,$$
$$k_n(x_i\,, t) = H_n[k(x, t), x_i] = k(x_i\,, t) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)\,.$$

Дифференцируя (13.2) по x и полагая $x = x_i$, получаем уравнения (14.3). Так как $z_n(x)$ есть многочлен степени $2n + 1$, то он является приближенным решением уравнения (11.1), полученным методом В.

Если $z_n(x)$ такое приближенное решение, то умножая (14.2) на $A_i(x)$ и (14.3) на $B_i(x)$ и складывая полученные произведения, получим равенство

$$\sum_{i=0}^{n} \Big\{ A_i(x) \Big[z_n(x_i) - \lambda \int_{-1}^{1} k(x_i\,, t)\, z_1(t)\, dt - f(x_i) \Big] +$$
$$+ B_i(x) \Big[z_n'(x_i - \lambda \int_{-1}^{1} k'(x_i\,, t)\, z_n(t)\, dt - f'(x_i) \Big] \Big\} = 0\,,$$

совпадающее с (13.2), где использованы обозначения (10.5) и (13.8).

15. Лемма 28. *Решение граничной задачи* (1.1)—(1.2) *методом подобластей равносильно решению интегрального уравнения* (11.1) *методом подобластей и использованию формулы*

$$y_n(x) = \int_{-1}^{1} g(x, t)\, z_n(t)\, dt\,. \tag{15.1}$$

Доказательство. Обозначим через $y_n(x)$ приближенное решение граничной задачи и пусть

$$z_n(x) = y_n^{(2m)}(x)\,. \tag{15.2}$$

Так как степень многочлена $y_n(x)$ равна $n - 1 + 2m$, то степень $z_n(x)$ равна $n - 1$. Из (15.2) следует (15.1) и равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, y^{(k)}(x) &= \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x) \int_{-1}^{1} g^{(k)}(x, t)\, z_n(t)\, dt = \\ &= \int_{-1}^{1} z_n(t) \sum_{k=0}^{2m-2} f_k(x)\, g^{(k)}(x, t)\, dt = \int_{-1}^{1} k(x, t)\, z_n(t)\, dt\,. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Поэтому и в силу (15.2) из уравнений (1.3) следуют уравнения (14.1). Мы видим, что приближенное решение граничной задачи может быть получено и из приближенного решения интегрального уравнения с помощью формулы (15.1).

Пусть теперь $z_n(x)$ есть приближенное решение интегрального уравнения (11.1), полученное методом подобластей, и имеет место (15.1). Так как $z_n(x)$ есть многочлен степени $n - 1$, то $y_n(x)$ есть многочлен степени $n - 1 + 2m$, удовлетворяющий граничным условиям (1.2). Имеет место (15.2) и из (14.1) следует (1.3). Мы видим, что преобразуя с помощью формулы (15.1) приближенное решение интегрального уравнения, мы получаем приближенное решение граничной задачи.

Лемма 29. *Решение граничной задачи* (1.1)—(1.2) *методом А равносильно решению методом А интегрального уравнения* (11.1) и *использованию формулы* (15.1).

Доказательство леммы аналогично предыдущему. Степень $z_n(x)$ равна $2n$, а степень $y_n(x)$ равна $2n + 2m$. Из (15.2) и (15.3) следует и равносильность условий (1.4) и (14.2).

Лемма 30. *Решение граничной задачи* (1.1)—(1.2) *методом В равносильно решению интегрального уравнения* (11.1) *методом В и применению формулы* (15.1).

Доказательство аналогично доказательству леммы 28. Степень многочлена $z_n(x)$ равна $2n + 1$, а степень $y_n(x)$ равна $2n + 1 + 2m$. В силу (15.2) и (15.3) условия (1.5) и (14.3) равносильны.

16. Теперь мы можем завершить доказательсто теоремы. Мы предположили, что λ не является собственным значением граничной задачи. В силу леммы 18 λ не является поэтому собственным значением интегрального уравнения (11.1). Следовательно по лемме 22 при достаточно больших n существует единственное решение уравнения (13.2), где использованы обозначения (10.3) и (13.1), и имеет место (13.3). По лемме 25 это решение можно получить и методом подобластей, примененному к интегральному уравнению

(11.1). А в силу леммы 28 функция (15.1) является единственным приближенным решением граничной задачи, полученным методом подобластей. Так как производные $g^{(k)}(x, t)$ при $0 \leqq k \leqq 2m - 1$ ограничены и в силу (11.3) и (15.1)

$$y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(x) = \int_{-1}^{1} g^{(k)}(x, t)\,[z(t) - z_n(t)]\,dt \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m - 1),$$

то из (13.3) следует (1.9) (если $k = 2m$, то (1.9) следует из (13.3), (11.2) и (15.2).) Относящиеся к методу подобластей утверждения теоремы доказаны.

В связи с методом А следует ссылаться не на лемму 22, а на лемму 23, не на формулы (10.3) и (13.1), а на формулы (10.4) и (13.7). Вместо лемм 25 и 28 используются леммы 26 и 29.

В случае метода В используются леммы 24, 27, 30 и формулы (10.5) и (13.8).

(Поступила: 30 сентября 1963 г.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Биценко, К. Б. — Граммель, Р.: *Техническая динамика*, т. I. Москва, гостехиздат, 1950.

[2] Петерсен, И.: «О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений.» *Известия академии наук ЭССР.* **10** (1961) 3—12.

[3] Берман, Д. Л.: «О некоторых линейных операциях.» *ДАН* **73** (1950) 249—252.

[4] Натансон, И. П.: *Конструктивная теория функций*. Москва, гостехиздат, 1949.

[5] Берман, Д. Л.: «Решение одной экстремальной задачи теории интерполяции.» *ДАН* **87** (1952) 167—170.

[6] Берман, Д. Л.: «К вопросу о наилучшей системе узлов параболической интерполяции.» *Известия высших учебных заведений, математика* **4** (1963) 20—25.

[7] Тиман, А. Ф.: *Теория приближения функций действительного переменного*. Москва. физматгиз, 1960.

[8] Канторович, Л. В. — Крылов, В. И.: *Приближенные методы высшего анализа*, Москва, гостехиздат, 1950.

ÜBER INTERPOLATORISCHE METHODEN ZUR LÖSUNG VON RANDWERTAUFGABEN GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

K. FANTA und O. KIS

Es wird folgender Satz bewiesen: Sind die Funktionen $f(x)$, $f_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2m - 2)$ in $-1 \leqq x \leqq 1$ r-mal stetig differentierbar und genügen ihre r-ten Ableitungen einer Lipschitz-Bedingung L_α $(0 < \alpha < 1)$, existiert kein Polynom höchstens $2m - 1$-ten Grades mit (1.2), ist ferner λ kein Eigenwert der Randwertaufgabe (1.1) — (1.2) und besteht (1.8), so existiert für genügend großes n ein einziges Polynom $n - 1 + 2m$-ten Grades, welches (1.2) und (1.3) erfüllt. Es besteht (1.9) mit einer von n und x unabhängigen Konstante c_4.

Es werden noch zwei weitere Sätze von ähnlichen Charakter bewiesen.

ON THE ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF THE MEAN OF DISTINCT UNITS IN SAMPLING FROM A FINITE POPULATION[1]

by

P. K. PATHAK[3] and J. SETHURAMAN[2]

1. Introduction

For each integer k, $S_{N_k} = \{1, 2, \ldots, N_k\}$ is a finite population of N_k units with characteristics $\{Y_{k,1}, Y_{k,2}, \ldots, Y_{k,N_k}\}$. A simple random sample, S_{n_k}, of size n_k is drawn with replacement from S_{n_k}. The set of distinct units in S_{n_k} is denoted by s_{m_k} and it contains m_k units. Let

$$\bar{y}_k = \frac{1}{m_k} \sum_{i \in s_{m_k}} Y_{k,i} \, .$$

This note is concerned with the asymptotic distribution of $\bar{y}_k$. In section 3, we show this to be normal by the following device. The conditional distribution of s_{m_k} when m_k is fixed is that of a simple random sample without replacement from S_{N_k}. The mean of a simple random sample without replacement and m_k are known to be asymptotically normal. These facts and the theorem SETHURAMAN [3] quoted in Section 2 (Lemma 3), establish the result.

2. Preliminaries

Let
$$\overline{Y}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i \in S_{N_k}} Y_{k,i}$$

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{m_k} \cdot \frac{N_k - m_k}{N_k} \cdot \frac{1}{N_k - 1} \cdot \sum_{i \in S_{N_k}} (Y_{k,i} - \overline{Y}_k)^2 \, .$$

We now define two conditions:

Condition A.

For each $\tau > 0$

$$\frac{\sum_{i \in S(\tau)} (Y_{k,i} - \overline{Y}_k)^2}{\sum_{i \in S_{N_k}} (Y_{k,i} - \overline{Y}_k)^2} \to 0$$

[1] This work was partially supported by the National Science Foundation, Grant G-18976.

[2] Michigan State University.

[3] University of Illinois.

where

$$S(\tau)=\Big\{i: |Y_{k,i}-\overline{Y}_k| \geqq \tau\sqrt{\sum_{i\in S_{N_k}} (Y_{k,i}-\overline{Y}_k)^2}\Big\}.$$

Condition B.

$$N_k e^{-\frac{n_k}{N_k}}\left(1-\left(1+\frac{n_k}{N_k}\right)e^{-\frac{n_k}{N_k}}\right)\to\infty .$$

When $\frac{n_k}{N_k}\to \alpha$, finite or infinite, condition (B) is equivalent to the following:

$$\text{either } \frac{n_k}{N_k}\to\alpha,\ 0<\alpha<\infty$$

$$\text{or}\qquad \frac{n_k}{N_k}\to 0 \text{ and } \frac{n_k^2}{N_k}\to\infty$$

$$\text{or}\qquad \frac{n_k}{N_k}\to\infty \text{ and } N_k e^{-\frac{n_k}{N_k}}\to\infty .$$

The following lemma is due to A. RÉNYI [2].

Lemma 1 (RÉNYI).

If condition B is satisfied then

$$\mathbf{P}\{\eta_k\leqq y\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp\,(-t^2/2)\,dt .$$

where

$$\eta_k=\frac{m_k-N_k\left(1-e^{-\frac{n_k}{N_k}}\right)}{\sqrt{N_k e^{-\frac{r_k}{N_k}}\left(1-\left(1+\frac{n_k}{N_k}\right)e^{-\frac{n_k}{N_k}}\right)}}. \tag{1}$$

For each θ, let $\{m_k(\theta)\}$ be a sequence of integers such that the following condition holds.

Condition C.

$$m_k(\theta) \text{ and } N_k-m_k(\theta)\to\infty \text{ uniformly in } \theta.$$

Let $s_{m_k(\theta)}$ be a simple random sample of size $m_k(\theta)$ drawn from S_{N_k} without replacement. Let

$$\overline{y}_k(\theta)=\frac{1}{m_k(\theta)}\sum_{i\in s_{m_k(\theta)}} Y_{k,i}$$

and

$$\sigma_k^2(\theta)=\frac{1}{m_k(\theta)}\cdot\frac{N_k-m_k(\theta)}{N_k-1}\cdot\frac{1}{N_k}\cdot\sum_{i\in S_{N_k}}(Y_{k,i}-\overline{Y}_k)^2,$$

Let

$$\xi_k(\theta)=\frac{\overline{y}_k(\theta)-\overline{Y}_k}{\sigma_k(\theta)}.$$

Lemma 2 (Hájek).
Under conditions (A) and (C)

$$\mathbf{P}\{\xi_k(\theta) \leq x\} \to \frac{1}{\sqrt{2x}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\, dt$$

uniformly in θ.

Proof. J. Hájek [1] has shown that the above convergence holds for any fixed θ. A few simple modifications of this proof, which will not be recounted here, establish the required uniformity in convergence.

Definition. A sequence of random variables $\{\xi_k(\theta)\}$ is said to converge to $\{\xi(\theta)\}$ in the *UC** sense relative to θ in a bounded interval on the real line if

$$\mathbf{E}[g(\xi_k(\theta))] \to \mathbf{E}[g(\xi(\theta))] \text{ uniformly in } \theta$$

and

$\mathbf{E}[g(\xi(\theta))]$ is continuous in θ for every bounded continuous function $g(x)$.

We shall make use of the following lemma due to J. Sethuraman [3], Theorem 3 in the next section.

Lemma 3 (Sethuraman).

Let (ξ_k, η_k), $k = 0, 1, \ldots$ be a sequence of random variables. Let the conditional distribution of ξ_k given that $\eta_k = \eta$ converge in the UC sense to the conditional distribution of ξ_0 given that $\eta_0 = \eta$ relative to η in any bounded interval. Let the distribution of η_k converge to the distribution of η_0 in law. Then the joint distribution of (ξ_k, η_k) converges to the joint distribution of (ξ_0, η_0) in law.*

3. Main theorem

Define
$$\xi_k = \frac{\bar{y}_k - \overline{Y}_k}{\sigma_k}$$

and let η_k be as in (1).

Theorem. *Under conditions* (A) *and* (B)

$$\mathbf{P}\{\xi_k \leq x, \eta_k \leq y\} \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{1}{2}(t^2 + u^2)\right) dt\, du\,. \tag{2}$$

In particular,

$$\mathbf{P}\{\xi_k \leq x\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\, dt\,. \tag{3}$$

Proof. The conditional distribution of s_{m_k} given that $\eta_k = \eta$, that is, given

$$m_k = m_k(\eta) = N_k\left(1 - e^{-\frac{n_k}{N_k}}\right) + \eta \sqrt{N_k e^{-\frac{n_k}{N_k}} \left(1 - \left(1 + \frac{n_k}{N_k}\right) e^{-\frac{n_k}{N_k}}\right)}$$

is the conditional distribution of a simple random sample of size $m_k(\eta)$ drawn from S_{N_k} without replacement. Further ξ_k is the normalized mean of this sample.

Under condition (B), $m_k(\eta)$ and $N_k - m_k(\eta) \to \infty$ uniformly in any bounded interval of η. This fact together with condition (B) yield the following from Lemma 2. The conditional distribution of ξ_k given that $\eta_k = \eta$ converges in the UC^* sense to the standard normal distribution relative to η in any bounded interval. Lemma 1 states that the distribution of η_k converges to the standard normal distribution in law. The relation (2) now follows from Lemma 3. Relation (3) is immediate from relation (1).

4. Remarks

It would be interesting to find out whether results like Lemmas 1 and 2 can be obtained when sampling with unequal probabilities. Some results on the lines of Lemma 1 are now under investigation and the results shall be published elsewhere.

(Received October 1, 1963)

REFERENCES

[1] Hájek, J.: "Limiting distributions in simple random sampling from a finite population". *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960) 361—374.
[2] Rényi, A.: "Three new proofs and a generalization of a theorem of Irving Weiss", *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1962) 203—214.
[3] Sethuraman, J.: "Some limit theorems for joint distributions". *Sankhya, Series A* (1961) 379—386.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДНЕГО РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ВЫБОРКЕ ИЗ КОНЕЧНОЙ ПОПУЛАЦИИ

P. K. PATHAK и J. SETHURAMAN

Резюме

Воспользуется теорема Sethuraman-a [3], чтобы получить асимптотическую нормальность различных значений в простой случайной выборке с возвращением из конечной популяции.

ÜBER DIE EINDEUTIGKEIT DER LÖSUNG DES HAMBURGER–STIELTJES-SCHEN MOMENTENPROBLEMS

von

GÉZA FREUD

§ 1. Einleitung

Es sei

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$$

eine Folge nichtnegativer Zahlen, für welche alle Determinanten

$$(1) \qquad |\mu_0|, \quad \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \ldots$$

positiv sind. Nach einem bekannten Satze von H. HAMBURGER [1] gibt es dann eine in $(-\infty, +\infty)$ definierte nicht abnehmende Funktion $\alpha(x)$, so dass

$$(2) \qquad \mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\alpha(x)$$

ist. Wir nennen zwei nicht abnehmende Funktionen $\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(x)$ äquivalent, wenn es eine Konstante k gibt, so dass in allen Punkten x, in welchen $\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(x)$ stetig sind, $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) + k$ ist. Äquivalente Funktionen erzeugen offenbar dieselbe Momentenfolge $\{\mu_n\}$. Wir normieren die Belegungsfunktionen durch die Vereinbarung $\alpha(-\infty) = 0$; dann nehmen äquivalente Belegungsfunktionen in Stetigkeitspunkten gleiche Werte an.

Wir sagen, die Lösung des Momentenproblems (2) ist eindeutig, falls aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\alpha_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\alpha_2(x) = \mu_n$$

die Äquivalenz von $\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(x)$ folgt. Ist

$$P(x) = \sum a_\nu x^\nu$$

ein beliebiges Polynom, dann ist der Wert

$$\mu(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \, d\alpha(x) = \sum a_\nu \mu_\nu$$

durch die Momentenfolge $\{\mu_\nu\}$ eindeutig bestimmt, hängt also nicht davon ab, welche Lösung $\alpha(x)$ des Momentenproblems (2) gewählt wurde.

Es sei ξ eine reelle Zahl, Π_ξ die Klasse der Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, für welche $P(\xi) = 1$ ist, $\alpha(x)$ eine Lösung von (2), und

$$\lambda(\xi) = \inf_{P \in \Pi_\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)\, d\alpha(x)\,. \tag{3}$$

Der Wert von $\lambda(\xi)$ hängt laut voriger Bemerkung nur von der Momentenfolge $\{\mu_n\}$ ab und ist unabhängig davon, welche Lösung $\alpha(x)$ des Momentenproblems (2) in Formel (3) eingesetzt wurde. Dann gilt folgender

Satz. *Ist für einen einzigen Wert ξ $\lambda(\xi) = 0$, dann ist die Lösung des Momentenproblems (2) eindeutig. Ist umgekehrt die Lösung von (2) eindeutig, dann ist in jedem Punkte ξ, wo $\alpha(x)$ stetig ist (also für alle reellen Werte mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen) $\lambda(\xi) = 0$ gültig.*

Dieser Satz wurde zuerst von H. HAMBURGER [1] bewiesen; ein zweiter, recht bekannter Beweis dieses Satzes stammt von M. RIESZ [4]. Der Beweis von HAMBURGER ist auf eine umfangreiche Theorie der quadratischen Formen

$$\sum \mu_{i+j} x_i x_j$$

gebaut. Der Beweis von M. RIESZ ist direkt, aber keineswegs einfach.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist, einen neuen Beweis dieses Satzes zu geben. Wir hoffen dabei, mit unseren Beweise auch den Inhalt des Satzes besser erklären zu können.

In § 2 und § 3 sind einige wohlbekannte Ergebnisse dargestellt, welche die Grundlage des Beweises bilden.

Der Beweis des Satzes (und auch die neue Idee, welche es vereinfacht) ist in § 4 enthalten.

§ 2. Die Markoff-Possesche Ungleichung

Es sei $\{p_n(x)\}$ die Folge der zur Belegungsfunktion $\alpha(x)$ gehörenden Polynome, d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x)\, p_m(x)\, d\alpha(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } n = m \\ 0 \text{ für } n \neq m \end{cases}$$

und $p_n(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades mit reellen Koefficienten. Für ein beliebiges reelles ξ betrachten wir das quasiorthogonale Polynom $\psi_n(x, \xi) = p_{n-1}(\xi)\, p_n(x) - p_n(\xi)\, p_{n-1}(x)$ (vgl. M. RIESZ [4]). Es ist bekannt, dass sämtliche Nullstellen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n'}$$

von ψ_n als Funktion von x betrachtet reell und einfach sind; es ist also $n' = n$ für $p_{n-1}(\xi) \neq 0$ und $n' = n - 1$ für $p_{n-1}(\xi) = 0$.[1] Dabei ist ξ einer der Zahlen ξ_i. Für ein beliebiges Polynom höchstens $\nu = n + n' - 2$-ten Grades P_ν gilt die verallgemeinerte Gauss—Jacobische Quadraturformel

$$\int_{-\infty}^{-\infty} P_\nu(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n'} \lambda_{kn} P_\nu(\xi_k)\,;$$

[1] Es ist wohlhabenkannt, dass $p_n(x)$ und $p_{n-1}(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben.

die λ_{kn} sind die Christoffelschen Zahlen dieser Quadraturformel. Es sei nun $\xi_j = \xi$ und $\lambda_{jn} = \lambda_n(\xi)$. Es sei $\Pi_{n',\xi}$ die Klasse der Polynome höchstens n'-ten Grades $P_{n'}(x)$ mit $P_{n'}(\xi) = 1$. Dann ist aus der Quadraturformel leicht zu sehen, dass

$$\lambda_{in} = \min_{P \in \Pi_{n',\xi_i}} \int_{-\infty}^{\infty} P^2(x)\, d\alpha(x) \tag{4}$$

und

$$\lambda_n(\xi) = \min_{P \in \Pi_{n',\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} P^2(x)\, d\alpha(x)$$

ist. Es folgt weiter

$$\lambda(\xi) = \lim_{n \to \infty} \lambda_n(\xi)\,. \tag{5}$$

Folgender Hilfssatz ist eine von C. Posse [3] herrührende Verallgemeinerung der Ungleichung von Markoff und Stieltjes:

Hilfssatz I. *Es sei $f(x)$ eine auf der reellen Zahlengerade definierte unbeschränkt differenzierbare Funktion, und*

$$f(x) \geqq 0, f'(x) \geqq 0, \ldots, f^{(n)}(x) \geqq 0, \ldots;$$

dann ist

$$\sum_{i:\,\xi_i<\xi} \lambda_{in} f(\xi_i) \leqq \int_{-\infty}^{\xi} f(x)\, d\alpha(x) \leqq \sum_{i:\,\xi_i \leqq \xi} \lambda_{in} f(\xi_i)\,. \tag{6}$$

Der wichtigste Spezialfall dieser Ungleichung entsteht für $f(x) \equiv 1$:

$$\sum_{i:\,\xi_i<\xi} \lambda_{in} \leqq \alpha(\xi) \leqq \sum_{i:\,\xi_i \leqq \xi} \lambda_{in}\,. \tag{7}$$

Das ist die wohlbekannte Markoff—Stieltjessche Ungleichung.

Die Grössen λ_{in}, $\lambda_n(\xi)$ und $\lambda(\xi)$ hängen nach Formeln (4) und (5) nur von der Momentenfolge $\{\mu_n\}$ ab, und sind von der Wahl der Lösung $\alpha(x)$ von (2) unabhängig.

§ 3. Beweis der Eideutigkeit der Lösung für ein endliches Intervall

Hilfssatz II. *Ist $\lambda(\xi) = 0$, dann sind die Werte $\alpha(\xi)$ sämtlicher Lösungen $\alpha(x)$ des Momentenproblems (2) einander gleich.*

Bemerkung. Es muss dann jede Lösung $\alpha(x)$ von (2) für $x = \xi$ stetig sein, denn an einer Sprungstelle ξ von $\alpha(x)$ könnte $\alpha(x)$ entgegen Hilfsatz II. jeden Wert zwischen $\alpha(\xi - 0)$ und $\alpha(\xi + 0)$ annehmen.

Beweis. Die Differenz der beiden äusseren Seiten der Ungleichung (7) ist gleich $\lambda_n(\xi) \to \lambda(\xi) = 0$; also haben sowohl die linke wie die rechte Seite einen Grenzwert für $n \to \infty$ und es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i:\,\xi_i<\xi} \lambda_{in} = \alpha(\xi)\,.$$

Dieser Ausdruck hängt nur von $\{\mu_\nu\}$, aber nicht von der Wahl von $\alpha(x)$ ab, w. z. b. w.

Gibt es für eine Belegungsfunktion zwei endliche Werte a und b, so dass $\alpha(a) = \alpha(-\infty)$ und $\alpha(b) = \alpha(+\infty)$ ist, dann hängen die Stieltjeschen Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\alpha(x)$$

nur von den Werten von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ ab. Wir sagen dann, »die Belegungsfunktion $\alpha(x)$ erzeugt eine Belegung in $[a, b]$«, bzw., falls die Werte a und b selbst nicht wesentlich sind, »$\alpha(x)$ erzeugt eine endliche Belegung«.

Hilfssatz III. *Erzeugt $\alpha(x)$ eine endliche Belegung, dann ist die Lösung des entsprechenden Momentenproblems (2) bis auf Äquivalenz eindeutig.*

Dieser Hilfsatz ist eine triviale Konsequenz des Weierstrass-schen Approximationssatzes (vgl. etwa I. P. NATANSON [2]); es folgt aber auch sehr leicht aus Hilfssatz II:

Es erzeuge $\alpha(x)$ ein Belegung in $[a, b]$. Nach Hilfssatz II genügt es zu zeigen, dass in jedem Punkte ξ, wo $\alpha(x)$ stetig ist, $\lambda(\xi) = 0$ ist.

a) $\xi \notin [a, b]$: Es sei $\varphi_1(x)$ eine lineare Funktion mit $\varphi_1(\xi) = 1$ und $\max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi_1(x)| < 1$. Dann ist nach (3)

$$\lambda(\xi) \leqq \lim_{m\to\infty} \int_a^b \varphi_1^{2m}(x)\, d\alpha(x) = 0\,.$$

b) $\xi \in [a, b]$ eine Stetigkeitstelle von $\alpha(x)$: Es sei $\varphi_2(x)$ ein Polynom, für welches $\varphi_2(\xi) = 1$ und $|\varphi_2(x)| < 1$ für $x \in [a, b] - \{\xi\}$ ist. Dann ist für jedes $\delta > 0$

$$\lambda(\xi) \leqq \overline{\lim_{m\to\infty}} \int_a^b \varphi_2^{2m}(x)\, d\,\alpha(x) \leqq \lim_{m\to\infty} \int_a^{\xi-\delta} \varphi_2^{2m}(x)\, d\alpha(x) +$$

$$+\alpha(\xi+\delta) - \alpha(\xi-\delta) + \lim_{m\to\infty} \int_{\xi+\delta}^{b} \varphi_2^{2m}(x)\, d\alpha(x) = \alpha(\xi+\delta) - \alpha(\xi-\delta)$$

da $\max\limits_{x\in[a,b]-(\xi-\delta,\xi+\delta)} |\varphi(x)| < 1$ ist. Aus der Stetigkeit von $\alpha(x)$ für $x = \xi$ folgt weiter $\lambda(\xi) = 0$, w. z. b. w.

Nach Hilfssatz II sind allso sämtliche Lösungen des entsprechenden Momentenproblems (2) äquivalent, w. z. b. w.

§ 4. Beweis des Hauptsatzes

Es sei $\{\mu_n\}$ eine Folge, für welche die Determinanten (1) positiv sind, $\alpha(x)$ eine Lösung von (2), und an der Stelle ξ sei $\lambda(\xi) = 0$. Wir wenden Ungleichung (6) auf $f(x) = e^{qx}$, $q \geqq 0$ an:

$$\sum_{i:\,\xi_i<\xi} \lambda_{in} e^{q\xi_i} \leqq \int_{-\infty}^{\xi} e^{qx}\, d\alpha(x) \leqq \sum_{i:\,\xi_i\leqq\xi} \lambda_{in} e^{q\xi_i}\,.$$

Die Differenz der beiden äusseren Seiten ist $\lambda_n(\xi)\, e^{q\xi} \to 0$, also streben diese Ausdrücke gegen den von n unabhängigen Wert

$$\int_{-\infty}^{\xi} e^{qx}\, d\alpha(x):$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i:\,\xi_i\leqq\xi} \lambda_{in} e^{q\xi_i} = \int_{-\infty}^{\xi} e^{qx}\, d\alpha(x) = M_q\,.$$

Der Wert von M_q ist also durch die Momentenfolge $\{\mu_n\}$ allein mit Hilfe dieser Formel eindeutig bestimmt. Wir setzen $e^x = y$, $\alpha(x) = \beta(y)$; dann ist

$$M_q = \int_0^{e^\xi} y^q \, d\beta(y) \, ; \qquad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Nach Hilfssatz III bestimmt diese Gleichungsfolge die Belegungsfunktion $\beta(y)$ in $[0, e^\xi]$ bis auf Äquivalenz eindeutig; es ist also auch $\alpha(x) = \beta(e^x)$ für $-\infty < x < \xi$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Die Belegungsfunktion $\alpha^*(x) = \alpha(\infty) - \alpha(-x)$ hat die Momente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\alpha^*(x) = (-1)^n \mu_n$$

und es ist mit der Transformation $u = -x$

$$\lambda^*(-\xi) = \inf_{P \in \Pi_{-\xi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(n) \, d\alpha^*(n) =$$

$$= \inf_{P \in \Pi_\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x) \, d\alpha(x) = \lambda(\xi) = 0 \, .$$

Aus der letzten Überlegung ergibt sich also, dass $\alpha^*(x)$ in $(-\infty, -\xi)$ durch die Momentenfolge $\{\mu_n\}$ allein bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist, d. h. dass $\alpha(x)$ als Lösung von (2) auch für $\xi < x < \infty$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

Um die Eindeutigkeit, von $\alpha(x)$ einzusehen, bleibt noch übrig zu beachten, dass nach Hilfsatz II und Bemerkung dazu jede Lösung $\alpha(x)$ von (2) an der Stelle ξ stetig ist und den eindeutig bestimmten Wert

$$\alpha(\xi) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \, : \, \xi_i \leq \xi} \lambda_{in}$$

annimt. Damit sind wir mit dem Beweise des ersten Teiles des Hauptzatses fertig.

Um den zweiten Teil des Satzes einzusehen, genügt folgendes zu zeigen:

Hilfssatz IV. *Ist* $\lambda(\xi) \neq 0$, *dann gibt es eine Lösung* $\alpha^*(x)$ *des Momentenproblems, so dass* $x = \xi$ *eine Sprungstelle von* $\alpha^*(x)$ *ist.*

Beweis. Es sei

$$\alpha_n^*(x) = \sum_{i \, : \, \xi_i < x} \lambda_{in} \, . \tag{8}$$

Ist $\alpha(x)$ eine beliebige Lösung von (2), dann gilt die Gauss—Jacobische Quadraturformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \, d\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \, d\alpha_n^*(x) \, , \tag{9}$$

alls der Grad von $P(x)$ höchstens gleich $n + n' - 2$ ist. Nach dem Auswahlsatze von E. Helly, besitzt $\{\alpha_n^*(x)\}$ eine konvergente Teilfolge

$$\alpha_{n_k}^*(x) \to \alpha^*(x) \, ; \qquad -\infty < x < \infty$$

und infolge des Konvergenzsatzes von E. HELLY folgt aus (9) für beliebige Polynome $P(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,d\alpha^*(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,d\alpha^*_{n_k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,d\alpha(x)\,,$$

also auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\,d\alpha^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\,d\alpha(x) = \mu_n\,; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Es ist also $\alpha^*(x)$ tatsächlich eine Lösung des Momentenproblems (2).

Aus (8) folgt, dass $\alpha^*_n(\xi+0) - \alpha^*_n(\xi-0) = \lambda_n(\xi) \geqq \lambda(\xi)$ ist. Es muss dann wegen $\alpha^*_{n_k}(x) \to \alpha^*(x)$ auch $\alpha^*(\xi+0) - \alpha^*(\xi-0) \geqq \lambda(\xi)$ sein, w. z. b. w.

(Eingegangen: 13. November, 1963)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] HAMBURGER, H.: »Über eine Erweiterung des Stieltjes-schen Momentenproblems«. *Mathematische Annalen* **81** (1920) 235—319; **82** (1921) 120—164 und 168—187.

[2] NATANSON, I. P.: *Konstruktive Theorie der Funktionen*, Akademie Verl., Berlin,

[3] POSSÉ, C.: *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, St. Petersburg, 1886.

[4] RIESZ, M.: «Sur le problème des moments». *Arkiv för Matematik* **16** (12) (1921), **16** (19) (1922), **17** (16) (1923).

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

G. FREUD

Резюме

Из исследования H. HAMBURGER-а [1] и M. RIESZ-а [4] известна следующая теорема:

Пусть означает Π_ξ класс тех рациональных многочленов, для которых $P(\xi) = 1$, и пусть будет

$$\lambda(\xi) = \inf_{P\in\Pi_\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)\,d\alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ не убывающая функция, все моменты которой

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\,d\alpha(x) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

существуют. Если $\lambda(\xi) = 0$ для хотя бы одного вещественного ξ, тогда последовательность $\{\mu_n\}$ однозначно определяет $\alpha(x)$ в точках непрерывности, несмотря на аддитивную константу. Обратно, если $\{\mu_n\}$ однозначно определяет функцию $\alpha(x)$ несмотря на так получаемую эквиваленцию, тогда

для всех ξ, в которых $\alpha(x)$ непрерывна, мы имеем $\lambda(\xi) = 0$. В настоящей работе автор дает новое доказательство для этой теоремы.

Эскиз доказательства:

а) Если для некоторого ξ мы имеем $\lambda(\xi) = 0$, тогда последовательность $\{\mu_n\}$ определяет однозначно значение $\alpha(\xi) - \alpha(-\infty)$, принадлежащее этому ξ. Доказательство этого факта получается из обобщенного неравенства Маркова — Sieltjes-а (7) (как пердел выражений, участвующих в нем.) Числа ξ_i являются корнями квазиортогонального многочлена

$$p_{n-1}(\xi)\, p_n(x) - p_n(\xi)\, p_{n-1}(x)$$

и числа λ_{in} — числа Christoffel-а формулы квадратуры, принадлежащей базисным точкам ξ_i; все эти могут быть определены, если дана последовательность $\{\mu_n\}$.

б) Используя предыдущего результата легко получается известная теорема: если $\alpha(x)$ порождает конечное распределение (т. е. для некоторых чисел a, b мы имеем $\alpha(a) = \alpha(-\infty)$, $\alpha(b) = \alpha(+\infty)$, тогда $\alpha(\xi) - \alpha(-\infty)$ определяется однозначно во всех точках ξ непрерывности функций $\alpha(x)$.

в) Если в некоторой точке ξ мы имеем $\lambda(\xi) = 0$ тогда подставляя в неравенство Posse (6) $f(x) = e^{qx}$ интегралы

$$M_q = \int_{-\infty}^{\xi} e^{qx}\, d\alpha(x)\,; \qquad q = 0, 1, 2, \ldots$$

при данной последовательности $\{\mu_n\}$ определяемы однозначно.

г) Подставляя $e^x = y$, $\alpha(x) = \beta(y)$, на основании в)

$$M_q = \int_0^{e^\xi} y^q d\beta(y)\,, \qquad q = 0, 1, \ldots$$

Последовательность $\{M_q\}$, согласно результату б) определяет однозначно функцию $\beta(y) = \alpha(x)$.

д) Если $\alpha(\xi) = 0$, тогда рассмотрим сходящуюся подпоследовательность последовательности (8) (существующую согласно теореме Helly) которая сходится к $\alpha^*(x)$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, d\alpha^*(x) = \mu_n$$

и

$$\alpha^*(\xi + 0) - \alpha^*(\xi - 0) \geqq \lambda^*(\xi) > 0\,.$$

ON THE REPRESENTATION OF DIRECTED GRAPHS AS UNIONS OF ORDERINGS

by

P. ERDŐS and MOSER L.[1]

Introduction

Consider an $m \times n$ matrix in which each row consists of a permutation of the integers $1, 2, \ldots, n$. Such matrices will be called R-matrices (they really should have been called $m \times n$ R-matrices, but where there is no danger of confusion we omit the $m \times n$). Corresponding to such a matrix R we define an oriented graph on the vertices $1, 2, \ldots, n$, in which there is an edge oriented from i to j (notation: $i \to j$) provided i precedes j in a majority of the rows of R. If i precedes j as often as j precedes i the vertices i and j are not joined by an edge. It has been known for some time [1] that every directed graph in which every pair of vertices are joined by at most one oriented edge can be realized as a graph associated with some R-matrix in this manner. The principal object of this paper is to obtain relatively sharp estimates for the smallest number $m(n)$ such that every oriented graph on n vertices corresponds to some $m \times n$ matrix of the type described.

This as well as some related problems which we will treat arise from questions concerning methods of combining individual transitive preferences on a set of alternatives by means of majority decisions. Thus we may think of the rows of the matrix R as representing orderings by individual voters, of a set of n candidates $1, 2, \ldots, n$ in order of preference. Although each voter thus expresses a set of transitive preferences, the majority opinion need not be transitive and indeed we will prove that every preference pattern (ties permitted) may be achieved by no more than $c_1 n/\log n$ voters, (c_1 a fixed constant), i.e. $m(n) \leq c_1 n/\log n$. On the other hand it was shown in a relatively simple way by STEARNS [2] that some preference patterns on n candidates cannot be schieved by $c_2 n/\log n$ voters (where c_2 is another fixed positive constant) so that $m(n) > c_2 n/\log n$.

In § 1 we consider the following problem: What is the largest number $f(n)$ such that every oriented graph on n vertices in which every pair of distinct vertices is jointed by a directed edge has at least one subgraph of $f(n)$ vertices in which the orientation is transitive, i.e. in which $i \to j$ and $j \to k$ implies $i \to k$. Our result here is that $f(n) \leq 2[\log_2 n] + 1$. STEARNS has shown that $f(n) \geq [\log_2 n] + 1$.

In § 2 we will develop some lemmas concerning oriented graphs which can be represented by $2 \times n$ R-matrices. In the voting terminology this means

[1] University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada. This paper was written while P. Erdős was visiting the University of Alberta in Edmonton.

that we study the preference patterns of candidates that can be achieved by a pair of voters — we will call them a couple. The point in considering such pairs of voters is that by balancing their transitive preferences in a certain way the pair of voters can achieve a preference between certain pairs of candidates in the manner in which these pairs are to be preferred by the majority, while with respect to all other pairs the preferences of the couple cancel one another.

In § 3 we relate the graph theoretic lemmas of § 2 to the problem of estimating $m(n)$ and obtain the result

$$c_1\, n/\log n > m(n) > c_2\, n/\log n\,.$$

We conclude with a number of unsolved problems.

§ 1.

The problem discussed and partially solved here is independent of our main problem the estimation of $m(n)$. By a complete oriented graph or complete paired comparison we mean a graph in which every pair of vertices is joined by one oriented edge. As mentioned in the introduction, STEARNS has proved that every such graph on n vertices contains a subgraph on $[\log_2 n] + 1$ vertices on which the orientation is transitive. For the sake of completeness we sketch the relevant argument: Consider a complete oriented graph on n vertices. Let $w(i)$ be the number of edges oriented away from vertex i. Relabel the vertices so that $w(1) \geqq w(2) \geqq \ldots \geqq w(n)$. Since every pair of vertices contributes 1 to $\Sigma\, w(i)$ we have $\sum\limits_{i=1}^{n} w(i) = \binom{n}{2}$ so that $w(1) \geqq \frac{n-1}{2}$. To construct a transitive chain of $[\log_2 n] + 1$ vertices place vertex 1 at the beginning of the chain and use induction to find in the subgraph of $\frac{n-1}{2}$ vertices which are joined to 1 by edges oriented avay from 1, a transitive subset of $\left[\log_2\left(\frac{n-1}{2}\right)\right] + 1$ vertices. These together with the vertex 1 form the required set.

To obtain a lower bound for the largest transitive set in some complete oriented graph on n vertices, assume that every such graph has a transitive subset of k elements. Now such a transitive subset must be one of $\binom{n}{k}$ subsets of k of the vertices, and any one of these subsets in order to be transitive, can be ordered in $k!$ ways. Having fixed the transitive subset (including its order) we observe that such a transitive subset can appear in exactly $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ complete directed graphs, since the complete graph is determined by the orientations on its $\binom{n}{2}$ edges, $\binom{k}{2}$ of which have already been fixed. Finally, since each of the $2^{\binom{n}{2}}$ oriented graphs has a transitive subgraph of k vertices we have

$$\binom{n}{k} k\,!\, 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \geqq 2^{\binom{n}{2}},$$

and using $\binom{n}{k} \leqq n^k/k\,!$ we are lead to

$$k \leqq \frac{2 \log n}{\log 2} + 1$$

which completes the proof of

Theorem 1.

$$[\log_2 n] + 1 \leqq f(n) \leqq 2[\log_2 n] + 1\,.$$

We remark that $f(7) = 3$. That $f(7) \geqq 3$ follows from the left hand side of the inequality above while $f(7) \leqq 3$ is obtained by considering the directed graph on 1, 2, ..., 7 in which $i \to j$ iff the number $i - j$ is a quadratic residue (mod 7). We would like to call the attention of the reader to the fact that we have been unable to disprove the conjecture that $f(n) = [\log_2 n] + 1$. In particular we cannot decide if $f(15) = 4$.

§ 2.

In what follows G will denote a directed graph in n vertices, not necessarily complete, i.e. each pair of vertices is joined by at most one directed edge. The graph H will be called bipartite and unidirected if the vertices of H can be split into two disjoint subsets A and B (one of which can be empty) such that every vertex of A is joined to every vertex of B in the direction from A to B and no other edges exist in H. Suppose the vertices of A are $a_1, \ldots, a_k$ and those of B are $b_1, b_2, \ldots, b_l$ $(k + l = p)$. A and B will be called the levels of our subgraph (A the top level, B the lower level).

Lemma 1. *A bipartite and unidirected graph H can be represented by a $2 \times p$ R-matrix.*

Proof. Consider the matrix

$$\begin{pmatrix} a_1\, a_2 & \ldots\, a_k\; b_1\, b_2 & \ldots\, b_l \\ a_k\, a_{k-1} & \ldots\, a_1\; b_l\, b_{l-1} & \ldots\, b_1 \end{pmatrix}.$$

The graph induced by this matrix has edges directed from each vertex in A to each vertex in B. However there are no edges joining vertices of A to vertices of A (or vertices of B to vertices of B) since for $i, j < k$, a_i precedes a_j in one row and follows it in the other.

Next, if a graph H can be decomposed into disjoint bipartite and undirected graphs it will be called bilevel.

Lemma 1 can be generalized to yield

Lemma 2. *A bilevel graph H with n vertices can be represented by a $2 \times n$ R-matrix.*

Proof. If the top level of H consists of the disjoint sets of vertices $A_1, A_2, \ldots, A_u$ and the lower level of the corresponding sets $B_1, B_2, \ldots, B_u$ and if $A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots\}$, $B_i = \{b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots\}$ then the required matrix has first row consisting of the elements of A_1 in some order followed by those of B_1 in some order. These are followed by the elements of A_2 in some order and the elements of B_2 in some order, etc. In the second row we have first the elements of A_n in the reverse order to that which they had in the first row, followed by the elements of B_n again in reverse order. Then come the elements of A_{n-1} followed by those of B_{n-1} again in the order opposite to that in which they appeared in the first row. We continue in this way up to the elements of A_1 in the reverse order to that in the first, row, followed finally by the elements of B_1 in reverse order. It is easily seen that this matrix induces the required graph.

We proceed to prove

Lemma 3. *If G is a directed graph with n vertices and e edges with*

$$\frac{n^2}{2^{2r+4}} < e \leq \frac{n^2}{2^{2r+1}} \quad \textit{where} \quad \frac{\log n}{20\,r+1} \geq 1$$

then G contains a bipartite unidirected graph with levels A and B having $[\sqrt{n}]$ and $\left[\dfrac{\log n}{20r+1}\right]$ vertices respectively, and in which the valences of the vertices of A in the graph G do not exceed $16n/2^r$.

Proof. Consider first the vertices of G (if any) of valence at least $16n/2^r$. If their number is x then we must clearly have $x \cdot 16n/2^r \leq 2n^2/2^{2r+1}$ or $x \leq n/2^{r+4}$. Thus the number of edges containing two such vertices does not exceed $\binom{x}{2} \leq n^2/2^{2r+9}$. Hence if we omit all these edges there remain more than $n^2/2^{2r+5}$ edges at least one endpoint of which has valence $< 16n/2^r$. Denote the vertices of valence $< 16n/2^r$ (in G) by $v_1, v_2, \ldots, v_t$ and let their valences be $y_1, y_2, \ldots, y_t$. Clearly

$$n(1 - 2^{-(r+4)}) \leq t \leq n$$

and

$$\sum_{i=1}^{t} y_i > \frac{n^2}{2^{2r+5}}$$

Without loss of generality we may assume that

$$\sum_{i=1}^{t} y'_i > \frac{n^2}{2^{2r+6}}$$

where y'_i is the number of edges directed away from v_i. Let $k (k \geq 1)$ be an indeterminate for the time being. A k-tuple of vertices will be said to belong to v_i $(1 \leq i \leq t)$ if every vertex of the k-tuple is adjoined to v_i by an edge directed away from v_i. There are exactly $\binom{y'_i}{k}$ k-tuples belonging to v_i. Denote by S the system of k-tuples belonging to one of the v_i $(1 \leq i \leq t)$ (if a k-tuple belongs to exactly r v's it occurs in S r-times). Clearly S has $\sum_{i=1}^{t}\binom{y'_i}{k}$ elements. Now $\sum_{i=1}^{t}\binom{y'_i}{k}$ will be a minimum if all the y'_i are equal and if t is as large as possible. This is achieved by letting $t = n$ and $y'_i = \left[\dfrac{n}{2^{2r+6}}\right]$. Thus

$$\sum_{i=1}^{t}\binom{y'_i}{k} \geq n \binom{\left[\frac{n}{2^{2r+6}}\right]}{k} > \frac{n^{k+1}}{k!\,(2^{2r+7})^k}.$$

Now the total number of k-tuples that can be chosen from n points equals $\binom{n}{k} \leqq \frac{n^k}{k!}$ so that the same k-tuple must occur in S at least $\frac{n}{2^{(2r+7)k}}$ times. If $k = \left[\frac{\log n}{20r+1}\right]$ a simple computation shows that the same k-tuple will occur at least $[\sqrt{n}]$ times, or there will be at least $[\sqrt{n}]$ vertices form a set A each connected to each vertices of a set B which has $\left[\frac{\log n}{20\,r+1}\right]$ elements.

Note that the set A was chosen from the vertices whose valences did not exceed $16n/2^r$ so the lemma is proved.

We next prove the crucial

Lemma 4. *Let $n > n_0$. If G is a directed graph with n vertices and e edges where*

$$\frac{n^2}{2^{2r+3}} < e \leqq \frac{n^2}{2^{2r+1}} \quad \text{and} \quad r < 10 \operatorname{loglog} n$$

then G contains a bilevel graph of at least $\frac{n \log n}{(r+1)\,2^{r+15}}$ edges.

Proof. First we omit all edges connecting vertices with valences at least $16n/2^r$. As before the number of omitted edges is at most $\frac{n^2}{2^{2r+9}}$ Hence we are left with at least

$$\frac{n^2}{2^{2r+1}}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^8}\right) > \frac{n^2}{2^{2r+\frac{7}{2}}}$$

edges and by Lemma 3 we have a bipartite unidirected subgraph (A_1, B_1) with levels A_1 and B_1 previously described. Since the vertices of A_1 have valence $\leq 16n/2^r$ and those of B_1 have valence $\leq n-1$ and since $r < 10 < \operatorname{loglog} n$ the number of edges incident to $A_1 \cup B_1$ is at most

$$n\left(\frac{16\sqrt{n}}{2^r} + \log n\right) < \frac{20\,n^{3/2}}{2^r}.$$

We remove these edges and there still remain

$$\frac{n^2}{2^{2r+\frac{7}{2}}} - \frac{20\,n^{3/2}}{2^r} > \frac{n^2}{2^{2r+4}}$$

edges, provided $n > n_0$. Lemma 3 can therefore be used again and we obtain a bipartite unidirected graph (A_2, B_2) with levels A_2 and B_2 of the required type. (In the bipartite graphs (A_i, B_i) it is not necessarily assumed that the edges go from A_i to B_i, their direction may depend on i). Now we repeat the procedure and omit the edges incident to $A_2 \cup B_2$. If we repeat this procedure $\left[\frac{\sqrt{n}}{20 \cdot 2^{r+6}}\right]$ times we are left with a graph which has at least

$$\frac{n^2}{2^{2r+\frac{7}{2}}} - \frac{20n^{3/2}}{2^r}\left[\frac{\sqrt{n}}{20 \cdot 2^{r+6}}\right] > \frac{n^2}{2^{2r+}}$$

edges. We can therefore apply Lemma 3 once more and thus obtain a bilevel graph with the components (A_i, B_i)

$$1 \leqq i \leqq \left[\frac{\sqrt{n}}{20 \cdot 2^{r+6}}\right] + 1$$

of at least

$$\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{20 \cdot 2^{r+6}}\right] + 1\right)\sqrt{n}\left[\frac{\log n}{20\, r + 1}\right] > \frac{n \log n}{(r+1)\, 2^{r+15}}$$

edges and the proof of the lemma is complete.

Lemma 5. *Let G be a connected directed graph of m vertices. Then G has a bilevel subgraph of* $\left[\frac{m-1}{4}\right]$ *edges.*

Proof. We prove first that if T is a directed tree then it can be decomposed into four bilevel graphs. For this purpose consider first the corresponding undirected tree T^*. Let x_1 be an vertex of T^*. Number I all edges of T^* which can be reached from x_1 in an odd number of steps. Number II all edges which can be reached from x_1 in an even number of steps. The edges labelled I form a union of disjoint stars (a star is a tree in which all but one vertex has valency 1) which can be split into two bilevel graphs and similarly for the edges labelled II. The lemma now follows by considering for G a spanning tree T, i.e. a tree whose edges are a subset of the edges of G and which contains all the vertices of G. Such a tree clearly has $n - 1$ edges.

Lemma 6. *Let G be a directed graph of e edges. Then G contains a bilevel graph of at least* $\frac{\sqrt{e}}{8}$ *edges.*

Proof. A graph G of e edges must have at least $[\sqrt{2e}]$ vertices. Consider the connected components G_i of G having u_i vertices, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Now by Lemma 5, each G_i contains a bilevel graph of $\frac{u_i - 1}{4}$ edges, so that G contains a bilevel graph of

$$\sum\left[\frac{u_i - 1}{4}\right] \geqq \frac{\sqrt{e}}{8}$$

edges.

We are now ready to prove our main result, namely that every preference pattern on n candidates can be achieved by not more than $c_1\, n/\log n$ voters. For this purpose it will suffice, by Lemma 2, to show that the directed graph G corresponding to the preference pattern can be decomposed into edge-disjoint bilevel graphs $G_1, G_2, \ldots, G_t$, the set of whose vertices is identical with the set of vertices of G, and $t < c_1\, n/(2 \log n)$.

We are going to define the graphs

$$G_i \text{ and } G^{(i)} \quad 1 \leqq i \leqq \left[2^{16} \frac{n}{\log n}\right]$$

by induction. We will put $G^{(i)} = G - G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_i$ (i.e. we obtain $G^{(i)}$ by omitting from G the edges of $G_1, G_2, \ldots, G_i$). G_1 is one of the bilevel subgraphs of G having the maximun number of edges and if $G_1, \ldots, G_i$ are already defined then G_{i+1} is one of the bilevel subgraphs of $G^{(i)}$ having the maximum number of edges. Denote by e_i the number of edges of $G^{(i)}$. Let r run through the integers $r = 0, 1, \ldots, [10 \log\log n]$. Denote by i_r the smallest integer for which

$$e_{i_r} \leqq \frac{n^2}{2^{2r+1}}.$$

We shall prove that for $r \leqq [10 \log\log n]$

$$i_{r+1} - i_r \leqq 2^{15} \cdot \frac{r+1}{2^{r+1}} \cdot \frac{n}{\log n}. \tag{1}$$

If $e_{i_r} \leqq \frac{n^2}{2^{2r+3}}$ then $i_{r+1} - i_r = 0$ and (1) is satisfied thus we can assume $e_{i_r} > \frac{n^2}{2^{2r+3}}$. Let $i_r \leqq j < i_{r+1}$ then $e_j > \frac{n^2}{2^{2r+3}}$ and hence by Lemma 4 $G^{(j)}$ contains a bilevel subgraph of at least

$$\frac{n \log n}{(r+1)\, 2^{r+15}}$$

edges and hence by the maximality property of G_j

$$e_j - e_{j+1} \geqq \frac{n \log n}{(r+1)\, 2^{r+15}} \tag{2}$$

(2) immediately implies (1).

From (1) we obtain that by the removal of at most

$$\sum_{0 \leqq r \leqq [10 \log\log n]} (i_{r+1} - i_r) < \frac{2^{15} n}{\log n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r+1}{2^{r+1}} = \frac{2^{16} n}{\log n}$$

bilevel graphs G_i, $1 \leqq i \leqq \left[\frac{2^{16} n}{\log n}\right]$ we obtain a

$$G^{(t)} = G - \bigcup G_i, \quad 1 \leqq i \leqq \left[\frac{2^{16} n}{\log n}\right]$$

where $G^{(t)}$ has fewer than

$$\frac{n^2}{2^{20 \log\log n}} < \frac{n^2}{(\log n)^{13}}$$

edges.

To complete the main result we need to show that a graph with this many edges is the union of $o\left(\dfrac{n}{\log n}\right)$ edge — disjoint bilevel graphs and this is an almost immediate consequence of Lemma 6.

As already stated the proof of $m(n) > c_2\, n/\log n$ is relatively simple but we include it for completeness. Since each voter can vote in $n\,!$ ways the number of distinct ways in which m voters can vote is $(n!)^m$.

The number of preference patterns on n candidates is (since ties are permitted) $3^{\binom{n}{2}}$. If all these patterns can be achieved we must have $(n\,!)^m > 3^{\binom{n}{2}}$ from which the required result follows by a simple computation.

One might conjecture that that $m(n) \log n/n$ tends to a limit but this conjecture is clearly well beyond the methods used in this paper. We cannot even prove that $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ m(n) \log n/n > \dfrac{\log 3}{2}$.

Still another problem suggested by the present considerations is to obtain good estimates for the largest number $s = s(e)$ such that every ordinary graph of e edges contains a bilevel (undirected) graph of s edges. By more complicated arguments than those used here we can prove $s > c\sqrt{e} \log e$.

(Received November 25, 1963)

REFERENCES

[1] McGarvey, D. C.: "A theorem on the construction of voting paradoxes". *Econometrica* **21** (1963) 608—610.
[2] Stearns, R.: "The voting problem". *Amer. Math. Monthly* **66** (1959) 761—763

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРАФОВ СИСТЕМАМИ ПЕРЕСТАНОВОК

P. ERDŐS и L. MOSER

Резюме

Рассматриваем матрицу с n стольбцами и с m строками, каждая строка которой — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.. С этой матрицей мы соединим упорядоченный граф следующим образом: вершины графа будут числа $1, 2, \ldots, n$. Если в большинстве строк матрицы i предшествует j, тогда граф содержит ребро упорядоченное от i до j. Если i предшествует j в стольких же строках, в скольких j предшествует i, тогда i и j не соединяются. Пусть $m(n)$ обозначает наименьшее число, такое, что из матриц с $m(n)$ строчками представимы таким образом все графы с n вершинами, в которых каждая пара вершин соединенна не более одной вершиной Stearns [2] доказал, что $m(n) > c_2\, n/\log n$.

Главный результат настоящей работы доказательство неравенства

$$m(n) \leq c_1\, n/\log n$$

(c_1 и c_2 положительные константы).

ON CLASSICAL OCCUPANCY PROBLEMS II
(Sequential Occupancy)

by

ANDRÁS BÉKÉSSY

1. Introduction. We consider, as in Part I [1], a random distribution of balls in n cells, assuming that the balls are randomly and independently dropped into the cells with the same probability $1/n$. In Part I the number of the balls was taken to be fixed, and the "state" of the set of cells was regarded a random variable. Suppose now that certain parameters, characterising a "state" of cells, are fixed, while the random variable is the number of balls necessary to reach that given state. Let be k the number of cells, which contain less than $m + 1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ balls, and let be $\nu(n, m, k)$ the number of independent throws.

Most results concern the random variable $\nu(n, 0, k)$ i.e. the number of balls needed to obtain at least one ball in each, except k cells $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Probability distributions, moments and limiting distributions related to $\nu(n, 0, k)$ have been determined [2], [3]. D. J. NEWMANN and L. SHEPP and later on P. ERDŐS and A. RÉNYI have dealt with the expectation and with the limiting distribution of $\nu(n, m, 0)$ [4], [5].[1]

In the present paper two theorems on the limiting distribution of $\nu(n, m, k)$ are given.

2. Probability generating function. The first statement is that for $k < n$ the generating function

$$\sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu(n, m, k) = N\} \cdot x^N$$

can be expressed in the integral form

$$n\binom{n-1}{k}\int_0^{\infty} \exp\left\{nu\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}(1-K_m(u))^{n-k-1}(K_m(u))^k H_m(u)\,du, \tag{1}$$

where

$$H_m(x) = \frac{x^m e^{-x}}{m!}, \quad K_m(u) = \sum_{\mu=0}^{m} H_\mu(u) = \frac{1}{m!}\int_u^{\infty} t^m e^{-t}\,dt.$$

[1] Let p_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ denote the probability of a ball falling into the j-th cell. Papers discussing $\nu(n, m, k)$ under the more general assumption that the p_j's may be different from each other, will be referred later.

Proof. The probability of the event that after the N-th throw there remain $k+1$ cells occupied by not more than m balls, while the $N+1$-th ball is falling into a cell, which contains m balls already, depends only on the number of cells occupied by m and that occupied by less than m balls. Let $p(n, N, m, l_1, l_2)$ be the probability that after N throws there remain l_1 cells having m and l_2 cells having less than m balls. This probability can be expressed by the G-function (13, Part I); it is easy to see that the G-function of $p(n, N, m, l_1, l_2)$ defined as

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(nz)^N}{N!} \cdot \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} p(n, N, m, l_1, l_2)\, x_1^{l_1} x_2^{l_2}$$

is equal to

$$e^{nz}\,[1 + (x_1 - 1)\, H_m(z) + (x_2 - 1)\, K_{m-1}(z)]^n ,$$

hence

$$\sum_{N=0}^{\infty} p(n, N, m, l_1, l_2) \frac{(nz)^N}{N!} =$$

(2)

$$= \frac{n!}{l_1!\, l_2!\, (n - l_1 - l_2)!}\, e^{nz} (1 - K_m(z))^{n-l_1-l_2} (K_{m-1}(z))^{l_2} (H_m(z))^{l_1} .$$

Since the probability $q(n, N+1, m, k)$ of the event

$$\nu\,(n, m, k) = N + 1$$

is equal to

$$\sum_{l_1+l_2=k+1} p(n, N, m, l_1, l_2) \cdot \frac{l_1}{n} ,$$

it follows from (2) that

$$\sum_{N=0}^{\infty} q(n, N+1, m, k) \frac{(nz)^N}{N!} = \binom{n-1}{k} e^{nz} (1 - K_m(z))^{n-k-1} (K_m(z))^k H_m(z) . \tag{3}$$

The function on the left-hand side of (3) being the Borel-transform of the probability generating function, the latter can be written as

$$\binom{n-1}{k} \int_0^{\infty} e^{nzt} (1 - K_m(zt))^{n-k-1} (K_m(zt))^k H_m(zt)\, e^{-t}\, dt \tag{4}$$

so that the final result (1) now immediately follows.

Putting $K_m(u) = v$, integral (1) takes the form

$$n \binom{n-1}{k} \int_0^1 v^k (1 - v)^{n-k-1} \exp\left\{ n u_m(v) \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right\} dv , \tag{5}$$

where $u_m(v)$ is the inverse of $v = K_m(u)$.

From (5) the expectations $\mathbf{E}\{\nu(n, m, k)\}$ and $\mathbf{E}\{\nu^2(n, m, k)\}$ are

$$n^2\binom{n-1}{k}\int_0^1 u_m(v)\, v^k(1-v)^{n-k-1}\,dv \tag{6a}$$

and

$$n^3\binom{n-1}{k}\int_0^1 (u_m(v))^2\, v^k(1-v)^{n-k-1}\,dv - \mathbf{E}\{\nu(n, m, k)\} \tag{6b}$$

respectively.

3. The first limit theorem. *If* $n \to \infty$, $m = \text{const.}$, $k = \text{const.}$, *then*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu(n,m,k)}{n} - \log n - m \log\log n - \log\frac{1}{m!} < x\right\} \to$$

$$\to \exp\{-e^{-x}\}\cdot \sum_{\mu=0}^{k} \frac{e^{-\mu x}}{\mu!}$$

holds.

Proof. Introducing the moment generating function by putting $x = e^s$ in (5), and taking for brevity $\vartheta = n(1 - e^{-s/n})$ the relation

$$\begin{aligned}\Psi\left(\frac{s}{n}\right) &= n\binom{n-1}{k}\int_0^\infty v^k(1-v)^{n-k-1} e^{\vartheta u_m(v)}\,dv \sim \\ &\sim \frac{\Gamma(k+1-s)}{\Gamma(k+1)} \exp\left\{s\left(\log n + \text{m loglog}\, n + \log\frac{1}{m!}\right)\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

has to be proved for $-{}^1\!/_2 \leq s \leq +{}^1\!/_2$ according to CURTISS' theorem used already in Part I.

The asymptotic behaviour of the integral (7) is determined by the values taken up by the integrand in the close vicinity of $v = +0$. Let us divide the integral (7) in two parts:

$$\int_0^\infty = \int_0^\delta + \int_\delta^\infty = I_1 + I_2, \tag{8}$$

where $\delta > 0$ is some constant. In I_2 the variable v cannot be smaller than δ and ϑ being bounded from above as $n \to \infty$, it follows

$$I_2(n) < C(\delta)\,(1-\delta)^n, \tag{9}$$

where $C(\delta)$ may depend on δ but not on n.

In order to determine I_1, the behaviour of the function $u_m(v)$ for $v \to +0$ has to be found. From the definition it is easy to get

$$u_m(v) = \log\frac{1}{v} + m \text{ loglog}\,\frac{1}{v} - \log m! + \eta(v) \tag{10}$$

with $\eta(v) = o(1)$ for $v \to +0$. Hence putting $w = nv$ we have from (7) and (8)

$$I_1 = \frac{(\log n)^{m\vartheta}}{(m!)^\vartheta n^{k+1-\vartheta}} \int_0^{\delta n} w^{k-\vartheta} \left(1 - \frac{w}{n}\right)^{n-k-1} dw +$$

$$+ \frac{(\log n)^{m\vartheta}}{(m!)^\vartheta n^{k+1-\vartheta}} \int_0^{\delta n} w^{k-\vartheta} \left(1 - \frac{w}{n}\right)^{n-k-1} \left[\left(1 - \frac{\log w}{\log n}\right)^{m\vartheta} e^{\vartheta\eta(w/n)} - 1\right] dw = I_{11} + I_{12}.$$

Since ϑ tends to s uniformly in $-1/2 \leq s \leq +1/2$ for $n \to \infty$, Laplace's method applied to I_{11} gives

$$(11) \quad I_{11} \sim \frac{(\log n)^{ms}}{(m!)^s n^{k+1-s}} \int_0^{\infty} w^{k-s} e^{-w} dw = \frac{\Gamma(k+1-s)}{n^{k+1}} e^{s(\log n + m \log\log n - \log m!)},$$

while the modulus of the term I_{12} is not larger than

$$\frac{(\log n)^{m\vartheta}}{(m!)^\vartheta n^{k+1-\vartheta}} \zeta(\delta)$$

with $\lim\limits_{\delta \to 0} \zeta(\delta) = 0$, by the obvious inequality

$$(12) \quad \left|\left(1 - \frac{\log w}{\log n}\right)^{m\vartheta} e^{\eta\vartheta} - 1\right| \leq \left| m\,\vartheta \frac{\log w}{\log n} e^{\eta\vartheta} \right| e^{|m\vartheta \log w/\log n|} + |e^{\eta\vartheta} - 1|.$$

Now, although the value of δ must be kept constant while $n \to \infty$, it may be taken arbitrarily small such that from (11) and (12) we obtain

$$(13) \qquad I_1 \sim I_{11} \quad (n \to \infty)$$

and the summarizing of the partial results (9), (11) and (13) leads to (7) we wanted to prove.

4. The second limit theorem. *If* $n \to \infty$, $m = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, $(0 < \beta < 1)$, $k = n\beta$ *then*

$$(14) \qquad \mathbf{P}\left\{\frac{\nu(n, m, k) - E}{D} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

with

$$(15) \qquad \begin{cases} E = n\, u_m(\beta), \\ D^2 = n\big(\beta(1-\beta)(u_m'(\beta))^2 - u_m(\beta)\big), \end{cases}$$

where the function $u_m(x)$ *is the inverse of* $x = K_m(u)$ *and* $u_m'(x)$ *is the derivative.*

The quantity D^2 is positive, because it is the asymptotic value of the variance $\mathbf{D}^2\{\nu(n, m, k)\}$ for $n \to \infty$ under the assumptions on k and m mentioned above. This can be seen by deducing asymptotic expressions for

$\mathbf{E}\{\nu(n, m, k)\}$ and $\mathbf{E}\{\nu^2(n, m, k)\}$ (6a, 6b). Laplace's method gives in the present case (see [6])

$$\mathbf{E}\{\nu(n, m, k)\} = nu_m(\beta) + (1-\beta)\, u_m'(\beta) + \frac{1}{2}\beta(1-\beta)\, u_m''(\beta) + O(n^{-1})$$

and

$$\mathbf{E}\{\nu^2(n, m, k)\} = n^2 u_m^2(\beta) + 2\, n(1-\beta)\, u_m(\beta)\, u_m'(\beta) + \\ + n\,\beta(1-\beta)\, u_m(\beta)\, u_m''(\beta) - nu_m(\beta) + O(1)$$

hence

$$\mathbf{D}^2\{\nu(n, m, k)\} = \mathbf{E}\{\nu^2\} - (\mathbf{E}\{\nu\})^2 = n\,\beta(1-\beta)\,\big(u_m'(\beta)\big)^2 - nu_m(\beta) + O(1)$$

follows.

Introducing the moment generating function, the statement to be proved will be

$$\Psi\left(\frac{s}{D}\right) = n\binom{n-1}{k}\int_0^\infty e^{nSu}\big(1-K_m(u)\big)^{n(1-\beta)-1}\big(K_m(u)\big)^{n\beta} H_m(u)\, du \sim \\ \sim \exp\left\{\frac{Es}{D} + \frac{s^2}{2}\right\}. \tag{16}$$

where $S = 1 - e^{-s/D}$. By the definition (15) of D we have

$$S = \frac{s}{D} - \frac{s^2}{2\,D^2} + O(n^{-3/2})\,. \tag{17}$$

Putting

$$f(u) = \beta \log K_m(u) + (1-\beta)\log\big(1-K_m(u)\big)\,,$$

the moment generating function (16) can be rewritten as

$$\Psi\left(\frac{s}{D}\right) = n\binom{n-1}{k}\int_0^\infty e^{nSu+nf(u)}\,\frac{H_m(u)}{1-K_m(u)}\, du\,. \tag{18}$$

It is easy to show that the function $f'(u)$ is decreasing in $0 \leq u < \infty$, whereas $\lim\limits_{u\to+0} f'(u) = +\infty$, $\lim\limits_{u\to\infty} f'(u) = -\beta$ such that for sufficiently large n there exists a "saddle point" b defined by

$$f'(b) = -S\,. \tag{19}$$

Equation (19) leads to

$$S = H_m(b)\,\frac{\beta - K_m(b)}{K_m(b)\big(1-K_m(b)\big)} \tag{20}$$

or to

$$K_m(b) = \beta - \frac{K_m(b)\big(1-K_m(b)\big)}{H_m(b)}\cdot s = \beta + O(n^{-1/2})\,. \tag{21}$$

— since $S = O(n^{-1/2})$, and since the factor $K_m(b)\,(1 - K_m(b))/H_m(b)$ is bounded from above. This means that the point b lies in the close vicinity of $u_m(\beta)$.

Let us now write $\Psi(s/D)$ in the form

$$\Psi(s/D) = F.J, \tag{22}$$

where the two factors are

$$F = \sqrt{2\pi n}\binom{n-1}{k}\exp\{nSb + nf(b)\} \tag{23}$$

and

$$J = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_0^\infty \exp\{nS(u-b) + nf(u) - nf(b)\}\,\frac{H_m(u)}{1-K_m(u)}\,du\,. \tag{24}$$

The calculations on F, leading to

$$F \sim \beta^{-1/2}(1-\beta)^{1/2}\exp\left\{\frac{Es}{D} + \frac{s^2}{2}\right\} \qquad (n \to \infty) \tag{25}$$

are rather elementary but somewhat cumbersome, so that it doe $_\infty$ not seem to be superfluous to give some details. First, using Stirling's formula to the factor $\binom{n-1}{k}$ and taking logarithms in (23) we obtain

$$\log F = \log\left(\beta^{-1/2}(1-\beta)^{1/2}\right) + nbS - n\,\beta\log\left(1 + S\,\frac{1-K_m(b)}{H_m(b)}\right) -$$
$$- n(1-\beta)\log\left(1 - S\,\frac{K_m(b)}{H_m(b)}\right) + o(1)$$

and then, expanding the logarithms in powers of S up to S^2, we have

$$\begin{aligned}\log F &= \log\left(\beta^{-1/2}(1-\beta)^{1/2}\right) + nbS - nS\,\frac{\beta - K_m(b)}{H_m(b)} + \\ &+ \frac{nS^2}{2}\left(\beta\,\frac{(1-K_m(b))^2}{(H_m(b))^2} + (1-\beta)\,\frac{(K_m(b))^2}{(H_m(b))^2}\right) + o(1)\,.\end{aligned} \tag{26}$$

With regard to (20), the term $(\beta - K_m(b))/H_m(b)$ in (26) may be replaced by $SK_m(b)\,(1 - K_m(b))/(H_m(b))^2$, and, since by (19) the quantity $K_m(b)$ differs from β only by an $O(n^{-1/2})$ term, the latter can be substituted to the former in (26). Thus the expression (26) for F becomes

$$\log F = \log\left(\beta^{-1/2}(1-\beta)^{1/2}\right) + nb\,S - \frac{nS^2}{2}\,\frac{\beta(1-\beta)}{H_m(b)^2} + o(1)\,. \tag{27}$$

Let us now consider the variable b. From (20) b is equal to

$$u_m\left(\beta - S\,\frac{K_m(b)\,(1-K_m(b))}{H_m(b)}\right),$$

which can be expanded to give

$$b = u_m(\beta) + \frac{\beta(1-\beta)}{(H_m(b))^2} S + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{28}$$

having substituted $\beta + O(n^{-1/2})$ for $K_m(b)$ and $-(H_m(b))^{-1} + O(n^{-1/2})$ for $u'_m(\beta)$. Replacing b in (27) by the right-hand expression of (28) and then S by $s/D - s^2/2D^2 + O(n^{-3/2})$, the asymptotic relation (25) now easily follows.

The integral J defined in (24) can be rewritten as

$$J = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_0^\infty e^{ng_n(u)} \frac{H_m(u)}{1 - K_m(u)} du, \tag{29}$$

hence, Laplace's method gives

$$J \sim \frac{H_m(b)}{1 - K_m(b)} \cdot \frac{1}{\sqrt{-g''_n(b)}} \sim \beta^{1/2}(1-\beta)^{-1/2}, \qquad (n \to \infty), \tag{30}$$

and from (25) and (30) we obtain

$$\Psi\left(\frac{s}{D}\right) = F \cdot J \sim \exp\left\{\frac{Es}{D} + \frac{s^2}{2}\right\}$$

as stated in (16).

When applying Laplace's method to J, care must be taken, because the function $g_n(u) = S(u - b) + f(u) - f(b)$ slightly depends on n through S and b. The fact, however, that $S = O(n^{-1/2})$ and $b = \text{const.} + O(n^{-1/2})$ makes possible to carry out the routine estimating procedures.

5. Remark. The proof of the second theorem is now complete, it may be, however, conjectured that the condition implied upon k is too strong; the standardized variable $\nu(n, m, k)$ tends to be normally distributed for $n \to \infty$, $k \to \infty$ even if only $D \to \infty$. In the simple special case $m = 0$ this can be shown as follows.

For $m = 0$ the corresponding expressions will be (see (1), (5), (15))

$$\begin{cases} H_0(u) = K_0(u) = e^{-u}, \quad u_0(v) = \log\dfrac{1}{v}; \\[2ex] \Psi\left(\dfrac{s}{D}\right) = \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)} \cdot \dfrac{\Gamma(k+1-nS)}{\Gamma(n+1-nS)}, \quad S = 1 - e^{-s/D}; \\[2ex] E = n \log\dfrac{1}{\beta}, \quad D^2 = n\left(\dfrac{1}{\beta} - 1 - \log\dfrac{1}{\beta}\right), \quad \beta = \dfrac{k}{n}; \end{cases} \tag{31}$$

— where now β is not supposed to be constant.

By Stirling's formula we have

$$\log \Psi\left(\frac{s}{D}\right) = (n + 1/2)\log n - (k + 1/2)\log k + \tag{32}$$

$$+ (k + 1/2 - nS)\log(k - nS) - (n + 1/2 - nS)\log(n - nS) + o(1).$$

If $\limsup_{n\to\infty} \beta < 1$, then $S = O(n^{-1/2})$ and the calculations leading to

$$\log \Psi\left(\frac{s}{D}\right) = \frac{Es}{D} + \frac{s^2}{2} + o(1)$$

are obvious, however, if $\beta \to 1$, — since $nS^3 = o(1)$ does not hold in that case — we have to transform (32) by putting $\beta^* = (1-\beta)/\beta$ in order to lend it the form

$$\log \Psi\left(\frac{s}{D}\right) = nS \log \frac{n}{k} + k(1 - S - \beta^* S) \log \left(1 - \frac{\beta^* S}{1-S}\right) -$$
$$- k\,\beta^* \log(1-S) + o(1)\,.$$

Since now the estimates

$$n\,\beta^{*2} S^3 = O(D^{-1}) = o(1)\,,$$
$$k\,\beta^{*3} S^3 = O(n^{-1/2})$$

are valid, it will be enough to expand the logarithmic term containing $\beta^* S/(1-S)$ up to $(\beta^* S)^2/(1-S)^2$. With regard to

$$D = O(n^{1/2}\beta^*)\,, \quad S = \frac{s}{D} - \frac{s^2}{2\,D^2} + O(n^{-3/2}\beta^{*-3})$$

after some simple calculations we obtain

$$\log \Psi\left(\frac{s}{D}\right) = (1 - e^{-s/D})\left(n \log \frac{1}{\beta} - k\,\beta^*\right) + \frac{k\,\beta^* s}{D} + \frac{1}{2}\,\frac{k\,\beta^{*2} s^2}{D^2} + o(1) =$$
$$= \frac{Es}{D} - \frac{1}{2}\,\frac{s^2}{D^2}\left(n \log \frac{1}{\beta} - k\,\beta^*\right) + \frac{1}{2}\,\frac{k\,\beta^{*2} s^2}{D^2} + o(1) =$$
$$= \frac{Es}{D} + \frac{1}{4}\,\frac{k\,\beta^{*2} s^2}{D^2} + o(1)\,,$$

thus the normal limit distribution law holds, if only D^2 is asymptotically equal to $k\,\beta^{*2}/2$. In fact, for $\beta \to 1$ the expression (31) of D^2 is asymptotically equal to $k\,\beta^{*2}/2$.

(Received November 26, 1963)

LITERATURE

[1] Békéssy, A.: "On Classical Occupancy Problems I." *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **8** (1963) 59—71.

[2] Barton, E. E.—David, F. N.: "Sequential Occupancy". *Biometrica* **46** (1959) 218—223.

[3] Barton, E. E.—David, F. N.: *Combinatorial Chance*. London, 1962 (Griffin).

[4] Newman, D. J.—Shepp, L.: "The double dixie cup problem." *The American Mathematical Monthly*, **67** (1960) 58—61.

[5] Erdős, P.—Rényi, A.: "On a classical problem of probability theory." *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **6** (1961) 215—220.

[6] Фукс, Б. А. — Левин, В. И.: *Функции комплексного переменного и их приложения.* Москва 1951 (ГТТИ).

О КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЗАПОЛНЕНИЯ ЯЧЕЕК II
(Последовательные проблемы заполнения)

A. BÉKÉSSY

Резюме

Разыгрываем шарики в n ячеек независимо друг от друга и от состояний ячеек. Каждый шарик может попасть в каждую ячейку с вероятностью $1/n$. Пусть будет $\nu(n, m, k)$ случайная величина — число шариков, расположенных в ячейках, в тот момент, когда система ячеек первый раз принимает состояние, в котором хотя бы $n - k$ ячеек содержат хотя бы по $m + 1$ шариков. Рассмотрим предельное распределение $\nu(n, m, k)$, когда n безгранично растёт. Согласно первой предельной теореме, если $n \to \infty$; k; m константы, тогда

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu(n, m, k)}{n} - \log n - m \log\log n - \log\frac{1}{m!} < x\right\} \to \exp\{-e^{-x}\} \sum_{\mu=0}^{k} \frac{e^{-\mu x}}{\mu!}.$$

Согласно второй предельной теореме, если $n \to \infty$, $k = n\beta$, $\beta =$ константа, $(0 < \beta < 1)$; $m =$ константа $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ тогда

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu(n, m, k) - E}{D} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

где

$$E = n u_m(\beta)$$

$$D^2 = n\big(\beta(1-\beta)\,(u_m'(\beta))^2 - u_m(\beta)\big)$$

$$u_m(\beta) \text{ — обратная функция функции } \beta = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{u^\mu}{\mu!} e^{-\mu}$$

$$u_m'(\beta) \text{ — производная функций } u_m(\beta).$$

E — ассимптотическое значение математического ожидания величины $\nu(n, m, k)$ а D^2 — ассимптотическое значение дисперсии этой величины согласно предельному распределению, данному во второй теореме.

Вышеупомянутые теоремы являются обобщениями теорем, известных в литературе [2], [3], [4], [5]. Доказательства исходят из интегралной формы производящей функции моментов величины $\nu(n, m, k)$ доказанной во втором параграфе, и в них основную роль играет метод Лапласа.

RANDOM SPACE-FILLING IN ONE DIMENSION

by

DAVID MANNION[1]

1. Introduction

We construct a model of a random car-parking procedure as follows. Take the segments $[0, x]$ $(x \geqq 0)$ of the x-axis. If $x < 1$, this segment is considered to be a "gap". If $x \geqq 1$, choose a random number $t_1 \in [0, x-1]$ (i.e. t_1 is a random variable, uniformly distributed over $[0, x-1]$). We now consider the unit interval $[t_1, t_1+1]$ to be "covered" and so turn our attention to the remaining segments $[0, t_1]$, $[t_1+1, x]$. If $t_1 \geqq 1$, choose a random number $t_2 \in [0, t_1-1]$ and then regard the unit interval $[t_2, t_2+1]$ as "covered". If $t_1 < 1$, then the segment $[0, t_1]$ is left "uncovered" and we regard this segment as a "gap". Similarly, if $x - t_1 - 1 \geqq 1$, choose a random number $t_3 \in [t_1+1, x-1]$ and so "cover" the unit interval $[t_3, t_3+1]$. If $x - t_1 - 1 < 1$, we regard the segment $[t_1+1, x]$ as a "gap". We continue to "cover", in this random way, all the remaining segments with unit intervals until each such remaining segment is of length strictly less than one. Let $n(x)$ denote the number of unit intervals so placed on the segment $[0, x]$. Note that the possibility of overlapping of the unit intervals, either between themselves or over the ends of the original segment $[0, x]$, has been excluded. We have also made the convention that when one of the remaining segments, as yet "uncovered", is of length equal to one, then in a deterministic way we regard this segment as "covered" at the next stage of the process.

AMBARTSUMIAN [1], BÁNKÖVI [2], GRIFFITHS [3], NEY [4], RÉNYI [5], ROBBINS and DVORETZKY [6] and SMALLEY [7] have all studied this problem, AMBARTSUMIAN, GRIFFITHS and SMALLEY reproducing some of the results first proved by RÉNYI. RÉNYI has derived equations for both the expectation and the variance of the random variable $n(x)$, and he obtained an asymptotic expression for the expectation, valid as $x \to \infty$. It should be noted that D. G. KENDALL has pointed out a mistake in RÉNYI's equation, 5. 4, for the variance, which however does not affect any of his conclusions. It is RÉNYI's work which is the most relevant to this present paper.

This paper is only part of work done to prove that, asymptotically, the distribution of $n(x)$ is normal. The proof was based on a study of the moments of $n(x)$. However ROBBINS and DVORETZKY also claim to have proved the asymptotic normality, and are about to publish their proof.[2] (We have not, as yet, seen their work.) We shall therefore content ourselves

---

[1] University of Cambridge.

[2] Cf. the paper of ROBBINS and DVORETZKY in this issue, pp. 209.

here with a study of the second moment of $n(x)$, which is, of course, of special interest. The study of the higher moments is rather similar.

Results of a Monte Carlo experiment, which simulated the parking procedure, will also be recorded.

2. Asymptotic behaviour of the variance of n(x)

The main result obtained by RÉNYI was that for any positive integer m

$$\mathbf{E}\{n(x)\} = cx + c - 1 + O(1/x^m) \qquad (x \to \infty)\,, \tag{1}$$

where $\mathbf{E}$ denotes expectation and

$$c = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt\right) ds \approx 0.74759\,.$$

The computing of this estimate of the number c was carried out by the Mathematical Laboratory, University of Cambridge.

Put

$$n(x) = cx + c - 1 + r(x)\,. \tag{2}$$

Since $n(x) \leq x$ for $x > 1$, $n(1) = 1$, and $n(x) = 0$ for $0 \leq x < 1$, we observe that $|\,r(x)\,| \leqq x$ for $x \geqq 1$, and $|\,r(x)\,| < 1$ for $0 \leqq x < 1$, whence $\mathbf{E}\,|\,r(x)\,|^k < 1 + x^k$ for all $x \geqq 0$. We then deduce from RÉNYI's result (1) that

$$\mathbf{E}[n(x) - \mathbf{E}\{n(x)\}]^2 = \mathbf{E}[r(x) - \mathbf{E}\{r(x)\}]^2 = \mathbf{E}\{r(x)\}^2 + o(1) \qquad (x \to \infty)\,.$$

It turns out that $\mathbf{E}\{r(x)\}^2 = R_2(x)$, say, is much easier to deal with than $\mathbf{E}\{n(x)\}^2$. We also write $\mathbf{E}\{r(x)\} = R_1(x)$. Denote by $r(x\,|\,t)$ the number $r(x)$ $(x \geqq 1)$ conditional on t being the first random number chosen in the model described in the introduction. Then

$$r(x+1\,|\,t) = r(t) + r(x-t) \qquad (0 \leq t \leq x)\,,$$

where $r(t)$ and $r(x-t)$ are independent. It follows that for $x > 0$,

$$\begin{aligned} R_2(x+1) = \mathbf{E}\{r(x+1)\}^2 &= \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x \mathbf{E}\{r(x+1\,|\,t)\}^2\,dt = \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x \mathbf{E}\{r(t) + r(x-t)\}^2\,dt = \\ &= \frac{2}{x}\int_0^x [R_2(t) + R_1(t)\,R_1(x-t)]\,dt\,. \end{aligned}$$

Thus

$$R_2(x) = (1 - c - cx)^2 \qquad (0 \leqq x < 1)$$

$$R_2(1) = 4(1 - c)^2$$

$$(3) \qquad R_2(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x R_2(t)\,dt + \frac{2}{x}\int_0^x R_1(t)\,R_1(x-t)\,dt \qquad (x > 0)\,.$$

(3) is a much simplified and corrected version of RÉNYI's equation [1] for the variance. Similarly it is easy to see that $R_1(.)$ satisfies

$$R_1(x) = 1 - c - cx \qquad (0 \leqq x < 1)$$

$$R_1(1) = 2(1 - c)$$

$$(4) \qquad R_1(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x R_1(t)\,dt \qquad (x > 0)\,.$$

We see from these formulae that $R_k(x)$ $(k = 1, 2)$ is continuously differentiable in the intervals $(0 \leqq x < 1)$, $(1 < x < 2)$, $(2 < x < \infty)$. There is a simple jump discontinuity at $x = 1$, with $R_k(1+) = R_k(1)$ and

$$R_k(1+) - R_k(1-) = (2 - 2c)^k - (1 - 2c)^k = j_k > 0\,.$$

$R_k(x)$ is continuous but not differentiable at $x = 2$.

Put

$$\Phi_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx} R_k(x)\,dx \qquad (s > 0;\ k = 1,2)\,.$$

This integral exists since $|R_k(x)| < x^k + 1$ $(0 \leqq x < \infty)$. Now

$$e^s\left[\Phi_2(s) - \int_0^1 e^{-sx} R_2(x)\,dx\right] = e^s \int_1^\infty e^{-sx} R_2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} R_2(x+1)\,dx =$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-sx}\frac{dx}{x}\left[\int_0^x R_2(t)\,dt + \int_0^x R_1(t)\,R_1(x-t)\,dt\right].$$

Since

$$\int_0^\infty \frac{de^{-sx}}{ds}\frac{dx}{x}\left[\int_0^x R_2(t)\,dt + \int_0^x R_1(t)\,R_1(x-t)\,dt\right]$$

is uniformly convergent for $0 < s < \infty$, we may differentiate the above equation to obtain

$$\frac{d}{ds}\left\{e^s\left[\Phi_2(s) - \int_0^1 e^{-sx} R_2(x)\, dx\right]\right\} = -2\int_0^\infty e^{-sx}\, dx\left[\int_0^x R_2(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^x R_1(t)\, R_1(x-t)\, dt\right].$$

The repeated integral on the right hand side is absolutely convergent, hence, by Fubini's theorem, we may invert the order of integration. Thus

$$\frac{d}{ds}\left\{e^s\left[\Phi_2(s) - \int_0^1 e^{-sx} R_2(x)\, dx\right]\right\} = \frac{-2\,\Phi_2(s)}{s} - 2\,\Phi_1^2(s)\,.$$

Observing that $\exp\left(-2\int_s^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt\right)$ is an integrating fatcor for this equation, we see that

$$\frac{d}{ds}\left\{e^s\left[\Phi_2(s) - \int_0^1 e^{-sx} R_2(x)\, dx\right]\exp\left(-2\int_s^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt\right)\right\} =$$

$$= \left[-\frac{2}{s}\int_0^1 e^{-sx} R_2(x)\, dx - 2\,\Phi_1^2(s)\right]\exp\left(-2\int_s^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt\right).$$

Denoting the right hand side of this equation by $Y(s)$ and integrating both sides from u to u' $(0 < u < u')$

$$\left[e^s\left[\Phi_2(s) - \int_0^1 e^{-sx} R_2(x)\, dx\right]\exp\left(-2\int_s^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt\right)\right]_u^{u'} = \int_u^{u'} Y(s)\, ds\,.$$

We then note that

$$\lim_{u'\to\infty} e^{u'}\left[\Phi_2(u') - \int_0^1 e^{-u'x} R_2(x)\, dx\right]\exp\left(-2\int_{u'}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt\right) = 0\,,$$

so that

$$-\,e^u\left[\Phi_2(u) - \int_0^1 e^{-ux} R_2(x)\, dx\right]\exp\left(-2\int_u^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt\right) = \int_u^\infty Y(s)\, ds\,.$$

Thus

(5) $$u^2 e^u[\Phi_2(u) - \int_0^1 e^{-ux} R_2(x)\, dx] =$$

$$= \int_u^\infty \big(2s \int_0^1 e^{-sx} R_2(x)\, dx + 2 s^2 \Phi_1^2(s)\big)\, A(u,s)\, ds\,,$$

where $A(u,s) = \exp\left(-2 \int_u^s \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt\right)$.

Similarly

(6) $$u^2 e^u \left[\Phi_1(u) - \int_0^1 e^{-ux} R_1(x)\, dx\right] = \int_u^\infty 2s \left(\int_0^1 e^{-sx} R_1(x) dx\right) A(u,s)\, ds\,.$$

Put

$$c(u) = \int_u^\infty \exp\left(-2\int_u^s \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt\right) ds\,.$$

Then

$$c(u) = c + (2c - 1)\, u + \left(\frac{3}{2} c - 1\right) u^2 + O(u^3) \qquad (u \downarrow 0)\,.$$

Now

$$u^2 e^u \,[\Phi_1(u) - \int_0^1 e^{-ux} R_1(x)\, dx] = c(u) - c + (1 - 2c)\, u\,.$$

Thus, it is easy to see that

$$\lim_{u \downarrow 0} \Phi_1(u) = 0\,.$$

For small s the integrand on the right hand side of (5) is $O(s)$, (when $s > 0$). Thus

$$\lim_{u\downarrow 0} u^2 \Phi_2(u) = 2 \int_0^\infty \{s \int_0^1 e^{-sx} R_2(x)\, dx + s^2 \Phi_1^2(s)\}$$

$$\exp\left(-2 \int_0^s \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt\right) ds\,.$$

We note that the integrand here is strictly positive for $s>0$. Hence $\lim_{u\downarrow 0} u^2\Phi_2(u) =$ $= c_2$(say), where $0 < c_2 < \infty$; in fact we have

$$c_2 \approx 0.035672,$$

this estimate having been computed from the above formula by Mrs. M. O. Mutch of the Mathematical Laboratory, University of Cambridge. I am particularly indebted to Mrs. Mutch since the computing of c_2 proved to be a very delicate matter, involving a great deal of patience and ingenuity.

3. Asymptotic behaviour of the variance of n(x) (continued)

We may not immediately deduce, from the fact that

$$u^2\,\Phi_2(u) \sim c_2 \qquad (u \downarrow 0)\,,$$

that

$$R_2(x) \sim c_2 x \qquad (x \to \infty)\,.$$

We need some monotonicity property of $R_2(x)$. This we shall proceed to establish.

RÉNYI showed that for any positive integer m,

$$R_1(x) = O\left(\frac{1}{x^m}\right) \qquad (x \to \infty)\,, \tag{7}$$

$$R_1'(x) = O\left(\frac{1}{x^m}\right) \qquad (x \to \infty)\,. \tag{8}$$

For $x > 1$ we may differentiate (3) to obtain

$$\begin{aligned} x\,R_2'(x+1) + R_2(x+1) = 2\,R_2(x) + 2(1-c)\,R_1(x) + 2\,R_1(x-1) \\ + 2\oint_0^x R_1(t)\,R_1'(x-t)\,dt\,, \end{aligned} \tag{9}$$

where $\oint_0^x$ denotes integration over $([0, x] - \{1, 2\})$. Thus from (7) and (8) we see that, for any positive integer m,

$$\frac{x^2}{2}\,R_2'(x+1) = x\,R_2(x) - \int_0^x R_2(t)\,dt + O(1/x^m) \qquad (x \to \infty)\,.$$

Put

$$f(x) = x\,R_2(x) - \int_0^x R_2(t)\,dt\,,$$

Then

$$f'(x) = x\,R_2'(x) \qquad (x > 2)\,,$$

and f' will be continuous for $x > 2$. Thus

$$\frac{x^2 f'(x+1)}{2(x+1)} = f(x) + O(1/x^m) \qquad (x \to \infty)\,. \tag{10}$$

Now

$$u\int_0^\infty e^{-ux}\,R_2(x)\,dx = \oint_0^\infty e^{-ux}\,R_2'(x)\,dx + (3-4\,c)\,e^{-u} + (1-c)^2.$$

Also, for $2 < A < \infty$,

$$\lim_{u\downarrow 0} u\oint_0^\infty e^{-ux}\,R_2'(x)\,dx = \lim_{u\downarrow 0} u\int_A^\infty e^{-ux}\,R_2'(x)\,dx\,.$$

Thus

$$\lim_{u \downarrow 0} u \int_A^\infty e^{-ux} R_2'(x)\, dx = c_2 , \tag{11}$$

Let $0 < \lambda < c_2$. Suppose that, for all $x > A$,

$$R_2'(x) \leqq \lambda .$$

Then

$$\lim_{u \downarrow 0} u \int_A^\infty e^{-ux} R_2'(x)\, dx \leqq \lambda .$$

This is impossible from (11); thus we may assert that for any $A > 2$, there is an $x > A$ such that

$$R_2'(x) > \lambda .$$

Denote the remainder term in (10) by $h(x)$. Then

$$\frac{x^2 f'(x+1)}{2(x+1)} = f(x) + h(x) . \tag{12}$$

Let $\varepsilon > 0$. We may certainly choose $A_\varepsilon > 1$ such that, for all $x > A_\varepsilon$,

$$| h(x) | < \varepsilon .$$

We now choose x_0 such that

(i) $x_0 > A_\varepsilon + 4$,

(ii) $\dfrac{(x_0 - 4)^2}{2(x_0 - 1)} \left[\dfrac{(x_0 - 2)^2}{2\, x_0} \left\{ \dfrac{\lambda\, x_0^2}{2} - 2\, \varepsilon \right\} - 2\, \varepsilon \right] - \varepsilon > x_0^3$,

(iii) $R_2'(x_0 + 1) > \lambda$.

Thus $f'(x_0 + 1) > \lambda\, (x_0 + 1) > 0$. From (iii) and (12) we see that

$$f(x_0) + h(x_0) > \frac{\lambda\, x_0^2}{2} .$$

Thus, from (ii),

$$f(x_0) - \varepsilon > \frac{\lambda\, x_0^2}{2} - 2\, \varepsilon > 0 .$$

Let us suppose that, for all $x \in [x_0, x_0 + 1], f'(x) > 0$. Then, for all $x \in [x_0, x_0 + 1]$,

$$f(x) + h(x) > f(x_0) - \varepsilon > 0 ,$$

and so, for all $x \in [x_0 + 1,\ x_0 + 2]$,

$$f'(x) > 0 .$$

If $f'(x) \leqq 0$ for some $x > x_0 + 2$, then $f'(x)$ must (by continuity) vanish for some such x, in which case we write

$$z = \inf \{x : x > x_0 + 2,\ f'(x) = 0\}.$$

Then, from (12), $f(z-1)+h(z-1)=0$. Yet since $f'(x)>0$ $(x_0 \leqq x < z)$, we also have

$$f(x)+h(x) > f(x_0)-\varepsilon > 0 \qquad (x_0 \leqq x < z),$$

which, in particular, implies that $f(z-1)+h(z-1)>0$. This is a contradiction: we thus deduce that if $f'(x)>0$, for all $x \in [x_0, x_0+1]$, then $f'(x)>0$ for all $x \geqq x_0$. We proceed to show that this is in fact the case. We recall that $f'(x)$ is positive at x_0+1, and if it is not positive throughout $[x_0, x_0+1]$ then, by continuity, it must vanish at at least one point in this interval.

Suppose then that there is an x_1 $(x_0 \leqq x_1 < x_0+1)$ such that $f'(x_1)=0$. Then, from (12), $f(x_1-1)+h(x_1-1)=0$. Also by the first mean-value theorem, there is an x_2 $(x_1-1<x_2<x_0)$ such that

$$f'(x_2)=\frac{f(x_0)-f(x_1-1)}{x_0-x_1+1} > f(x_0)-\varepsilon > \frac{\lambda x_0^2}{2}-2\varepsilon > 0,$$

Hence, from (12),

$$f(x_2-1)+h(x_2-1) > \frac{(x_2-1)^2}{2x_2}\left(\frac{\lambda x_0^2}{2}-2\varepsilon\right).$$

Thus, from (ii),

$$f(x_2-1)-\varepsilon > \frac{(x_0-2)^2}{2x_0}\left(\frac{\lambda x_0^2}{2}-2\varepsilon\right)-2\varepsilon > 0.$$

It is now impossible for $f'(x)$ to be positive throughout $[x_2-1, x_2]$, since otherwise, by a repetition of the preceding argument, $f'(x)$ would be positive for all $x \geqq x_2-1$, and we have assumed that $f'(x_1)=0$ (and $x_1 > x_2-1$). Thus there is an x_3 $(x_2-1 \leqq x_3 < x_2)$ such that $f'(x_3)=0$, by continuity and the fact that $f'(x_2)>0$. Then, from (12), $f(x_3-1)+h(x_3-1)=0$. Again, from the first mean-value theorem, there is an x_4 $(x_3-1<x_4<x_2-1)$ such that

$$f'(x_4)=\frac{f(x_2-1)-f(x_3-1)}{x_2-x_3} > f(x_2-1)-\varepsilon > 0.$$

Thus, from (12) and (ii),

$$\begin{aligned} f(x_4-1) &> \frac{(x_4-1)^2}{2x_4}[f(x_2-1)-\varepsilon]-\varepsilon > \\ &> \frac{(x_0-4)^2}{2(x_0-1)}\left[\frac{(x_0-2)^2}{2x_0}\left\{\frac{\lambda x_0^2}{2}-2\varepsilon\right\}-2\varepsilon\right]-\varepsilon > \\ &> x_0^3 \\ &> (x_4-1)^3, \end{aligned}$$

where $x_4-1>A_\varepsilon>1$. But we see from the definition of $f(x)$, and the fact that $0 \leqq R_2(x) \leqq x^2$ $(x \geqq 1)$, that $f(x) \leqq x^3$ $(x \geqq 1)$. We thus have a contradiction, and we conclude that $f'(x)$, and hence $R_2'(x)$, is positive for all $x \geqq x_o$.

Put

$$\begin{aligned} R(x) &\equiv R_2(x) \qquad && (x \geqq x_0) \\ &\equiv R_2(x_0) \qquad && (0 \leqq x < x_0) \end{aligned}$$

so that R is a monotonic increasing function on $[0, \infty)$. Also, when $s \downarrow 0$,

$$c_2 + o(1) = s^2 \Phi_2(s) =$$

$$= s \int_0^\infty R_2(x)\, d(-e^{-sx}) =$$

$$= sR_2(0) + s \int_0^\infty e^{-sx}\, dR_2(x) =$$

$$= sR_2(0) + s\int_0^{x_0} e^{-sx}\, d\big(R_2(x) - R(x)\big) + s \int_0^\infty e^{-sx}\, dR(x) =$$

$$= o(1) + s \int_0^\infty e^{-sx}\, dR(x)\,.$$

Thus, from KARAMATA's Tauberian theorem ([8], Chapter V, Th. 4.3) we conclude that

$$R(x) \sim c_2 x \qquad (x \to \infty)\,,$$

and hence that

$$R_2(x) \sim c_2 x \qquad (x \to \infty)\,.$$

We also see, from (9), that

$$R_2'(x) \to c_2 \qquad (x \to \infty)\,.$$

It follows then that

$$\mathbf{D}^2[n(x)] \sim c_2 x \qquad (x \to \infty)\,,$$

where it will be recalled that

$$c_2 \approx 0.035672.$$

Note also that $\mathbf{D}^2[n(x)]$ is ultimately an increasing function of x, since

$$\mathbf{D}^2[n(x)] = R_2(x) - [R_1(x)]^2,$$

and, from (7) and (8)

$$\frac{d}{dx} \mathbf{D}^2[n(x)] = R_2'(x) - 2\, R_1(x)\, R_1'(x) \to c_2 > 0 \qquad (x \to \infty)\,.$$

In a rather similar piece of work (which we do not intend to publish) we have proved that

$$M_{2k-1}(x) = o(x^{k-\frac{1}{2}}) \qquad (x \to \infty)$$

and that

$$M_{2k}(x) \sim \frac{(2\,k)!\; c_2^k\, x^k}{k!\; 2^k} \qquad (x \to \infty)\,,$$

$(k = 1, 2, \ldots)$ where

$$M_r(x) = \mathbf{E}[n(x) - \mathbf{E}\{n(x)\}]^r.$$

It is then an immediate consequence of the moments convergence theorem of FRÉCHET and SHOHAT that

$$\frac{n(x) - cx}{\sqrt{c_2 x}}$$

is asymptotically $(x \to \infty)$ normally distributed with mean zero and standard deviation one.

4. The „Monte Carlo" experiment

A "Monte Carlo" experiment, simulating the parking procedure described in the introduction, was performed by Edsac II, until recently the electronic computer of the Mathematical Laboratory, University of Cambridge. The machine's "random" numbers were supplied by a pseudo-random-number mechanism. This mechanism takes an assigned number (chosen from a "table of random numbers" and fed into the machine), raises it to a high power and selects the middle portion of the number obtained as the first generated "random" number. In this way also, the second generated "random"number is obtained from the first, the third from the second, and so on. We took $x = 1000$ and 2000 runs were performed. The results are shown, in histogram form, in Figure 1. The sample mean, m, and sample variance, s^2, were respectively 747,447 and 38,5000. The shape of the histogram for $n(1000)$ is very nearly normal. Assuming that $n(1000)$ is, in fact, normal with mean 747,5 and variance s^2, we calculated a value of χ^2 from our observations, which were grouped into 31 parts. We obtained

$$\chi^2_{28} = 32{,}408.$$

Since the upper 5 per cent level for χ^2 with 28 degrees of freedom is 41,337, there is no significant evidence here for non-normality.

If we assume that $n(1000)$ is normally distributed, we may inquire into the question of whether our asymptotic formulae are, in practice, usable when $x = 1000$. Let us assume then that $n(1000)$ is normally distributed. Write $\mu = \mathbf{E}[n(1000)]$. Then we have the following 95 per cent confidence interval for μ:

$$747{\cdot}17 < \mu < 747{\cdot}72.$$

Since $\mu^* \equiv 1000c + c - 1 = 747{,}34$ lies in the above interval, it is not unreasonable to suppose that the approximate formula

$$\mathbf{E}[n(x)] \doteqdot cx + c - 1 \qquad (x \geqq 1000)$$

is quite accurate, as the order of RÉNYI's remainder term would suggest.

Again, still supposing that $n(1000)$ is normally distributed, we know then that $(n-1)\, s^2/\sigma^2$ has a x^2 distribution with $n - 1$ degrees of freedom, where $n = 2000$ and $\sigma^2 = \mathbf{D}^2[n(1000)]$. Since n is large, we may suppose that

$$\sqrt{2(n-1)\, s^2/\sigma^2} - \sqrt{2(n-1) - 1}$$

is normally distributed with zero mean and unit variance. This gives the following 95 per cent confidence interval for σ:

$$6{,}02 < \sigma < 6{,}41.$$

However $\sigma^* \equiv \sqrt{1000c_2} = 5{,}97$, and so there is an indication that the uninvestigated remainder term in the approximation $\sigma \approx \sqrt{c_2 x}$ is not quite negligible when $x = 1000$.

It is not surprising that so haphazard a method of space-filling should lead to about a 25 per cent wastage of the space available, but it may be thought curious that when $x = 1000$ the standard deviation of the number of cars accomodated should be less than one per cent of the expected number of cars. The space filling process seems to have more rigidity than one would intuitively ascribe to it.

Acknowledgements

I am indebted to Professor D. G. KENDALL for many helpful comments, to Mrs. M. O. MUTCH for computing c_2, to Mr. J. OLIVER who introduced me to the computer Edsac II and helped me in the programming of the Monte Carlo experiment, and to the Department of Scientific and Industrial Research for their financial support.

(Received November 29, 1963)

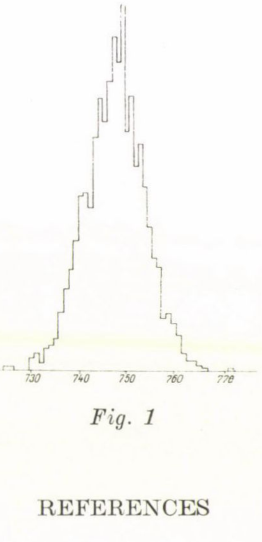


Fig. 1

REFERENCES

[1] АМБАРЦУМЯН, Р.: «К задаче о заполнении прямой последовательно бросаемыми отрезками» *Proc. VIIth All-Union Conf. Math. Statist. and Probab., Tbilisi* (1963).
[2] BÁNKÖVI, G.: „On gaps generated by a random space-filling procedure." *Publ. of the Math. Inst. of the Hungarian Academy of Sciences* **7** (1962) 395—407.
[3] GRIFFITHS, J. S.: "Packing of equal O-spheres." *Nature* **196** (1962) 764.
[4] NEY, P. E.: "A random interval filling problem." *Annals of Math. Stat.*, **33** (1962) 702—718.
[5] RÉNYI, A.: "On a one-dimensional problem concerning random space-filling". *Publ. of the Math. Inst. of the Hungarian Academy of Sciences* **3** (1958). 109—127.
[6] DVORETZKY, A.—ROBBINS, H.: "On the "parking" problem". *This issue*, pp. 209—226
[7] SMALLEY, I. J.: Packing of equal O-spheres. *Nature*, **194** (1962) 1271.
[8] WIDDER, D. V.: *The Laplace Transform*. Princeton, 1946.

СЛУЧАЙНОЕ ЗАПОЛНЕНИЕ ИНТЕРВАЛА

D. MANNION

Резюме

В работе проводятся дальнейшие исследования проблемы случайного заполнения интервала изучаемой A. RÉNYI и др. Пусть $n(x)$ означает числа интервалов длины 1 при случайном заполнении с такими интервалами интервала длины x. Автор показывает, что $\mathbf{D}^2(n(x))$ монотонно растет, а $\mathbf{D}^2(n(x)) \sim c_2 x$, где $c_2 = 0{,}035672\ldots$

В связи с этой асимптотической формулой в работе разобраны результаты одних вычислений, проведенных по методу Монте-Карло ($x = 1000$, 2000 опытов).

ON THE LOTTERY PROBLEM

by

H. HANANI[1], D. ORNSTEIN[2] and VERA T. SÓS[3]

The general form of the lottery-game — as it is well known — is the following:

On each lottery-ticket there are the integers $1, 2, \ldots, n$ from which one has to select k numbers. After this l numbers are drawn out from $1, 2, \ldots, n$. If the set of numbers selected on a lottery ticket has exactly d common elements with the set of l numbers which have been drawn ($d \leq l \leq k$), we say, that we obtained a d-hit on the lottery-ticket.

The so-called lottery-problem in question is the following: what is the minimal of lottery-tickets, so, that suitably selecting the k numbers on them, we can be sure to have at least one d-hit? (In the case of the lottery in Hungary $n = 90$, $k = l = 5$, $1 \leq d \leq 5$).

The general combinatorial problem according to this is the following:

Let k, l, d, n be positive integers, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq n$, $1 \leq d \leq \min(k, l)$ and E a set with n elements. We call a subset of k elements of the set E a k-tuple of E. Let S be a system of k-tuples of E. We say, that S *has property* P, if to each l-tuple L of E there exists at least one k-tuple of E belonging to S, which has at least d common elements with L. (We can say, that the d-tuples of the k-tuples belonging to S represent all l-tuples of E.) Denote by N the number of k-tuples belonging to S. The problem is as follows:

What is the minimum of N, depending on n, k, l, d?

We call an S-system with property P a minimal-system $S_0(n, k, l, d)$, if for this the value $N_0(n, k, l, d)$ is the possible smallest.

We give in this paper a lower bound for N_0 in case $d = 2$, and an asymptotic formula for it in case for fixed k, l, $d = 2$ and $n \to \infty$. We can determine the exact value of N_0 and the minimal system S_0 only in the case $k \leq 5$ $d = 2$ and for special values of n satisfying some congruences. (For example for the case $n = 84$ or $n = 100$ and $k = 5$). So we can consider the lottery-problem essentially solved only in the case, when we want to be sure of a 2-hit.

Theorem. *Given a set E of n elements, integers $k, l \geq 2$ and a minimal-system S_0 $(n, k, l, 2)$ (with property P) then for the number N_0 of k-tuples in S_0 we have the inequality*

$$N_0 \geq \frac{n(n-l+1)}{k(l-1)^2} \tag{1}$$

---

[1] Technion, Haifa

[2] Stanford University, Stanford.

[3] University of Budapest.

and

$$\lim_{n\to\infty} N_0 \Big/ \frac{n(n-l+1)}{k(l-1)^2} = 1 \tag{2}$$

If $k \leqq 5$ *and* $\dfrac{n}{l-1}$ *is integer, further*

$$\frac{n}{l-1} \equiv 1 \bmod k(k-1)$$

(3) *or*

$$\frac{n}{l-1} \equiv k \bmod k(k-1)$$

hen there exists a minimal-system S_0 *for which the equality*

$$N_0 = \frac{n(n-l+1)}{k(l-1)^2} \tag{4}$$

holds.[4]

Proof. For the proof we use the following three results:

1. *Theorem of* TURÁN P. ([1]): (in a specialized form). Let E be a set with n elements, and let an integer l be prescribed ($3 \leqq l \leqq n$, $l-1|n$). If B is a system of N pairs of elements from E with the property, that each subset of E with l elements contains at least one pair belonging to B, then the inequality

$$N \geqq (l-1)\binom{\frac{n}{l-1}}{2}$$

holds.

Equality holds for and only for the following system B: we divide the elements of E into mutually disjoint subsets each having $\dfrac{n}{l-1}$ elements. The minimal system B_0 contains all pairs (and only those) whose elements are from the same class.

2. *Theorem of* HANANI ([2]): Let the set E have m elements and let H be a system of k-tuples of E with the property, that each pair of elements from E is contained at least in one k-tuple of H. Then from the number M of k-tuples in H we have obviously

$$M \geqq \frac{m(m-1)}{k(k-1)} \tag{5}$$

If $k \leqq 5$ and

$$m \equiv 1 \bmod k(k-1)$$

---

[4] Equality holds also in the case $k = p$, and $\dfrac{n}{l-1} = p^\nu$ or $k = p+1$ and $\dfrac{n}{l-1} + p + p^\nu$ where p is a power of a prime and ν an arbitrary positive integer. The proof goes on the same way only instead of HANANI's theorem in [2] we have to use a result from [5].

or

$$m \equiv k \bmod k\,(k-1)$$

then there exist minimal systems H_0 for which equality holds in (5)[5].

3. *Theorem of* ERDÖS—HANANI [3] (see also [6]): With the above notations when M_0 is the number of k-tuples in a minimal-system H_0:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{M_0}{\dfrac{m(m-1)}{k(k-1)}} = 1.$$

To prove our theorem, let us suppose that we have a system S of k-tuples with property P. Then, if we consider all the pairs of elements in these k-tuples; they represent all the l-tuples of E; i.e. each l-tuple of E contains at least one pair from these. But then, according to Turán's theorem, the number of different pairs in the k-tuples of S is at least $(l-1).\begin{pmatrix}\dfrac{n}{l-1}\\ 2\end{pmatrix}$. Equality can hold only in the case, if these pairs are the following: We divide the n numbers into $l-1$ equal classes, and the k-tuples in S contain all the pairs — and only these — the two elements of which belong to the same class. Since each k-tuple contains $\binom{k}{2}$ pairs, and the "best" case is, when all the pairs in the k-tuples are different — (no two k-tuple in S has two common elements) — S has obviously at least

$$\frac{(l-1)\begin{pmatrix}\dfrac{n}{l-1}\\ 2\end{pmatrix}}{\dbinom{k}{2}}$$

k-tuples. This proves (1).

In case when (3) holds, using Hanani's theorem and constructing a minimal-system H_0 with $m = \dfrac{n}{l-1}$, for each of the $l-1$ classes we get a minimal-system S_0 which has

$$\begin{pmatrix}\dfrac{n}{l-1}\\ 2\end{pmatrix} \Big/ \binom{k}{2}$$

k-tuples, and this proves (4).

As to the asymptotic case, using the theorem of ERDŐS and HANANI again for each of the $l-1$-classes and $m = \dfrac{n}{l-n}$ we get (2).

[5] For the construction of such a system see [2]. Evidently for such a minimal system each pair of elements of E is contained in exactly one k-tuple of H.

Remark. If in the lottery-problem we want to construct in a similar way a minimal-system S which assure a 3,4 or 5-hit, we would need a generalization of TURÁN's theorem[6] and a generalisation of HANANI's theorem and construction.

(Received December 6, 1963)

REFERENCES

[1] TURÁN, P.: „Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról". *Mat.-Fiz. Lapok*, **48** (1941).
[2] HANANI, H.: "The existence and construction of balanced incomplete block design." *Annals of Math. Statistics* **32** (1961) No. 2.
[3] ERDŐS, P.—HANANI, H.: "On a limit theorem in combinatorial analysis". *Publicationes Mathematicae* (in print).
[4] TURÁN, P.: Research problems. *Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci.* **6** (1961) (Problem 3).
[5] MANN, H. B.: *Analysis and design of experiments*, New York, Dover, 1949.
[6] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On some combinatorial problems". *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956) 398—406.

О ЛОТЕРНОЙ ЗАДАЧЕ

H. HANANI, D. ORNSTEIN и V. T. SÓS

Резюме

Пусть будут k, l, d, n положительные целые, $1 \leqq k, l \leqq n$, $1 \leqq d \leqq \min(k, l)$ и E — множество, состоящее из n элементов. Пусть будет s некоторая система подмножеств E, состоящих из k элементов. Мы говорим, что s имеет «представительное свойство», если для каждого подмножества L, состоящего из l элементов от E, существует элемент от s, который имеет с L общие элементы не меньше d. Пусть обозначает $N_0 = N_0(n, k, l, d)$ наименьшее число элементов s с «представительным свойством». В случае $d = 2$ доказана.

Теорема.

$$N_0 \geqq \frac{n(n-l+1)}{k(l-1)^2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_0}{\frac{n(n-l+1)}{k(l-1)^2}} = 1 .$$

Если $k \leqq 5$, $\frac{n}{l-1}$ целое, и

$$\frac{n}{l-1} \equiv 1 \pmod{k(k-1)}$$

тогда

$$N_0 = \frac{n(n-l+1)}{k(l-1)^2} .$$

[6] The necessity of generalizing TURÁN's theorem, which is raised in [4], turned up already in several questions.

ON $\mathbf{PC}_\Delta$-CLASSES IN THE THEORY OF MODELS

by

MIHÁLY MAKKAI

Introduction

In this paper we present some results concerning certain special $\mathbf{PC}_\Delta$-classes.[1]

In § 1 we enumerate notations, definitions and some wellknown results to be used in the paper.

In § 2 we expose a generalization of a theorem of KLEENE [5]. KLEENE's theorem asserts the following. Let Σ be a set of sentences in the first order predicate calculus over a language $\mathbf{L}$ containing only finitely many predicate and function symbols and suppose that Σ satisfies the following conditions: (a) Σ contains its all consequences, (b) Σ is recursively enumerable with respect to a natural Gödel numbering. In this case the theory Σ is „finitely axiomatizable using additional predicate symbols" i.e. we can give a formula F in an enlarged language $\mathbf{L}' \supset \mathbf{L}$, such that for any formula G of the original language $\mathbf{L}$ G is derivable from F if and only if $G \in \Sigma$. The derivability notion used here is based upon a usual formal system of the first order predicate calculus; the identity symbol is treated as the other predicate symbols.

A first step in strengthening KLEENE's theorem would be to require from the class of the $\mathbf{L}$-reducts of all models of F to be identical with the class of all models of Σ in the language $\mathbf{L}$. This strong form is not true, only the weaker statement that an F exists such that the *infinite* relational systems of the two mentioned classes are the same.

We make also a second step in the generalization essential for the applications, namely allow Σ to contain denumerable infinitely many additional symbols besides the finitely many symbols of $\mathbf{L}$. Our requirement that Σ is recursively enumerable has to have the meaning that Σ is recursively enumerable under a natural Gödel numbering based upon an enumeration of the additional symbols, in which the number of arguments of the i-th predicate is a recursive function of i. In this way we shall introduce the class $\mathbf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}}$ of classes of relational systems as follows. $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}}$. if $\mathbf{K}$ is the class of the $\mathbf{L}$-reducts of the models of a recursively enumerable set Σ of sentences of an enlarged language $\mathbf{L}'$. The recursive enumeration mentioned in this definition is based upon an enumeration of the symbols of $\mathbf{L}'$ as above.

So we can formulate our generalization of KLEENE's theorem as follows (Theorem 1 in § 2). *If* $\mathbf{L}_0$ *is a finite language*, $\mathbf{K}$ *is a class of relational systems*

[1] See [6] and § 1 of the present paper for a definition of $\mathbf{PC}$ and $\mathbf{PC}_\Delta$-class.

of $\mathbf{L}_0$, *and* $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}}$ *then* $\mathbf{K}^{\infty} \in \mathsf{PC}$ *where* $\mathbf{K}^{\infty}$ *is the class of the infinite systems of* $\mathbf{K}$.

In later sections there will be applications of this theorem.

Our proof is based upon the same idea as KLEENE's proof, namely we treat formulae as elements which are able to form values of the individual variables by the help of a Gödel numbering. The main point in the construction of the above F is a reproduction of the inductive semantical definition of the notion of a sequence of elements satisfying a formula in a relational system.

A trivial example shows that the conclusion $\mathbf{K}^{\infty} \in \mathsf{PC}$ of the theorem cannot be improved in general to $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}$, even if we require Σ to be a recursive set of sentences of $\mathbf{L}$. However we do not know whether the similar improvements in Corollary 3, 5, 5′, 9 hold. Our conjecture is that they do not hold.

The main work in KLEENE [5] is devoted to a strictly constructive treatment. KLEENE proves also a variant of the mentioned theorem for the intuitionistic predicate calculus. Naturally our proof is of no constructive character, consequently our theorem does not imply KLEENE's results in a strict sense.

Our proof technically differs from KLEENE's one. We use ROBINSON's system as described in [4] to deal with recursive functions and predicates and thus we need to adjoin only eight new symbols to $\mathbf{L}_0$ to get $\mathbf{L}$.

In § 3 we introduce the following construction of relational systems. Let $\mathbf{L}$ be a language containing only predicate symbols and no function symbols. Let $\mathfrak{A}$ be a relational system, $F(x)$ a formula of the corresponding language containing no free variable except x. Let us denote by $\mathfrak{A} \,||\, F(x)$ the subsystem $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{A}$ whose domain is the set of those elements of the domain of $\mathfrak{A}$ which satisfy the formula $F(x)$ in $\mathfrak{A}$. We consider $\mathfrak{A} \,||\, F(x)$ as defined only if the latter set is not empty, i.e. if $(\exists x)\, F(x)$ holds in $\mathfrak{A}$. We put for a class $\mathbf{K}$ of systems $\mathbf{K} \,||\, F(x) = \{\mathfrak{A} \,||\, F(x) : \mathfrak{A} \in \mathbf{K}\}$. We prove (Theorem 2 (a) in § 3) that if $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}_{\Delta}$ then $\mathbf{K} \,||\, F(x) \in \mathsf{PC}_{\Delta}$ for any formula $F(x)$ of the corresponding language provided that $\mathbf{K} \,||\, F(x)$ is defined. Further we prove (Theorem 2 (b)) that if $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}$, then $\mathbf{K} \,||\, F(x) \in \mathsf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}}$. So we obtain (Corollary 3) that if $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}$, then $(\mathbf{K} \,||\, F(x))^{\infty} \in \mathsf{PC}$ (using Theorem 1 of § 2).

In § 4 we prove by using Theorem 2 (a), that if $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}_{\Delta}$ then $\mathsf{H}(\mathbf{K}) \in$ $\in \mathsf{PC}_{\Delta}$ (where $\mathsf{H}(\mathbf{K})$ denotes the class of the homomorphic images of the systems of $\mathbf{K}$) (Corollary 4'). The question whether this is true is left open in TARSKI [7] We have also the result that $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}$ implies $(\mathsf{H}(\mathbf{K}))^{\infty} \in \mathsf{PC}$ (Corollary 5′).

Let $\mathbf{K} \in \mathsf{EC}_{\Delta}$ (or $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}_{\Delta}$). The main content of § 4 is to give an axiomatization Σ for the class $\mathsf{H}(\mathbf{K})$ using additional function symbols so that each formula of Σ is in some normal form (Theorem 7). This normal form is established in such a way, that any set of sentences having this normal form is ,,preserved'' under homomorphism in a natural sense (see more precisely Theorem 6).

In the whole section we consider the more general notion of $\mathbf{F}$-homomorphism instead of (simple) homomorphism. This notion is defined in KEISLER [2].

In § 5 we deal with endomorphisms. The relational system $\mathfrak{A}$ is said to be an endomorphic image of $\mathfrak{B}$ if $\mathfrak{A}$ is a subsytem of $\mathfrak{B}$ and at the same time also a homomorphic image of $\mathfrak{B}$, $\mathsf{End}(\mathbf{K})$ will denote the class of all endomorphic images of the systems of $\mathbf{K}$. We state that if $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}_{\Delta}$ then

$\mathbf{End}(\mathbf{K}) \in \mathbf{PC}_\Delta$ and if $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}$ then $(\mathbf{End}(\mathbf{K}))^\infty \in \mathbf{PC}$ (Corollaries 8 and 9). The proofs are very similar to those of Corollaries 4 and 5 and are omitted. Next an analogon of LYNDON's theorem on homomorphisms is proved concerning endomorphisms and thus we obtain the corollary, that a first order sentence is preserved under endomorphism if and only if it is equivalent to a sentence of the form $\bigwedge_{i=1}^{n} (F_i^1 \wedge F_i^2)$ where F_i^1 is a positive sentence, F_i^2 is a universal sentence for each i (Corollary 11).

§ 1. Preliminaries

We shall distinguish between sets and classes but we shall consider also classes of classes as a third type. We shall use the usual set theoretical notations. We mention only that if A and B are sets then A^B denotes the set of all (unary) functions on A into B, 2^A denotes the set of all (unary) functions on A with possible values 0 and 1, A^n (where n is a natural number) denotes the set of ordered n-tuples of elements of A. We identify a (unary) function φ with the set all ordered pairs $(a, \varphi(a))$ where a is an element for which $\varphi(a)$ is defined, $\varphi(a)$ being the value of φ at the argument a. We make similar conventions for functions of more variables. If $\varphi \in A^B$ then we write sometimes $\varphi: A \to B$. If $\varphi: A \to B$, $\psi: B \to C$ then $\psi \circ \varphi$ denotes the composition of φ and ψ, i.e. $\psi \circ \varphi(a) = \psi(\varphi(a))$ for $a \in A$. If φ is a one-to-one function, φ^{-1} denotes its inverse.

The following well known set theoretical lemma is applied in § 4.

Lemma 1. *Let A be a set, let α be a function defined on A so that $\alpha(x)$ for $x \in A$ is a finite set. If X is an arbitrary finite subset of A* (i.e. $X \in A^{[\omega]}$) *let $\beta(X)$ be a set of unary functions defined on X* (the elements of $\beta(X)$ are the „good" functions defined on X) *and if $\varepsilon \in \beta(X)$ then $\varepsilon(x) \in \alpha(x)$ for $x \in X$,* (i.e. the good functions take values only from a fixed finite set $\alpha(x)$ for each argument $x \in A$). *Now suppose (a) for arbitrary $X \in A^{[\omega]}$, $\beta(X)$ is not empty, (b) if $X \subset Y \in A^{[\omega]}$, $\varepsilon \in \beta(Y)$ then $\varepsilon \restriction X \in \beta(X)$* (i.e. the restriction of a good function is a good one too). *Under these hypotheses then there is a function δ on A such that for each $X \in A^{[\omega]}$ $\delta \restriction X \in \beta(X)$.* (i.e. there exists a function defined on the whole set A whose restriction to each finite subset is a good function).

We shall mean by a *language* $\mathbf{L}$ a set of certain symbols certain of which are *predicate symbols*, the others are *function symbols*. Notations $P \in \mathbf{L}$ and $f \in \mathbf{L}$ will always imply that P is a predicate symbol and f is a function symbol of $\mathbf{L}$. To each $P \in \mathbf{L}$ and $f \in \mathbf{L}$ there is associated a natural number $\nu(P) \geq 0$ and $\nu(f) \geq 0$ and P and f are said to be a $\nu(P)$-ary predicate symbol and a $\nu(f)$-ary function symbol respectively. If $\nu(f) = 0$ then f is an *(individual) constant*. A *relational system* or more briefly a *system* $\mathfrak{A}$ *of* the language $\mathbf{L}$ is a pair (A, Δ) of a non empty set A and a function Δ defined on L such that $\Delta(P)$ is a $\nu(P)$-ary relation on the set A (i.e. an element of $2^{A^{\nu(P)}}$ [2]) and $\Delta(f)$ is a $\nu(f)$-ary function on A with values from A (i.e. an element of $A^{A^{\nu(f)}}$ for any $P, f \in \mathbf{L}$. A is said to be

[2] The relations are usually considered as truth functions. That will be consistent with our convention if we identify the truth value true and false with 1 and 0 resp. We write $R(a_1, \ldots, a_n)$ instead of $R(a_1, \ldots, a_n) = 0$ for a relation $R(x_1, \ldots, x_n)$.

the *domain* of $\mathfrak{A}$ and denoted by $|\mathfrak{A}|$ and we write $P_{\mathfrak{A}}, f_{\mathfrak{A}}$ for $\Delta(P)$ and $\Delta(f)$ respectively. If $\nu(f) = 0$ then $f_{\mathfrak{A}}$ is identified with an element of A. The class of all systems of $\mathbf{L}$ is denoted by $\mathfrak{S}(\mathbf{L})$. We say that the system $\mathfrak{A}$ is infinite if the set $|\mathfrak{A}|$ is infinite. For a class $\mathbf{K}$ of systems let $\mathbf{K}^{\infty}$ denote the subclass of $\mathbf{K}$ consisting of all infinite systems of $\mathbf{K}$. Sometimes we shall use notations of the form $(A; R, \ldots, \varphi, \ldots)$ to denote a system $\mathfrak{A}$ such that $|\mathfrak{A}| = A$ and $R = P_{\mathfrak{A}}, \ldots \varphi = f_{\mathfrak{A}}, \ldots$ where $P, \ldots, f, \ldots$ are given uniquely by the context.

We define the first order logic with equality associated with $\mathbf{L}$ in the well known way by fixing denumerable many *(individual) variables* $v_0, v_1, \ldots$, the propositional connectives $\neg$ (negation), $\wedge$ (and), $\vee$ (or), $\rightarrow$ (implies), $\leftrightarrow$ (equivalence), the quantifiers $(\exists x)$ (existential quantifier), (x) (universal quantifier) where x is a variable; and the identity symbol $=$. In § 2 we shall consider only $\neg, \wedge, (x)$ as primitive symbols, the other logical operations will be used as abbreviations in the well known way. The *terms* and *formulae of* $\mathbf{L}$ are defined in the usual way; a *prime formula of* $\mathbf{L}$ is a formula of the form $P(t_1, \ldots, t_{\nu(p)})$ or $t_1 = t_2$ ($P \in L$; $t_1, \ldots, t_{\nu(p)}$ are terms). The use of $P(t_1, \ldots, t_n)$ and $f(t_1, \ldots, t_n)$ always implies $n = \nu(P)$ and $n = \nu(f)$ respectively. The set of all formulae of L and the set of the formulae of $\mathbf{L}$ not containing any free variables (the *sentences* of $\mathbf{L}$) are denoted by $\mathfrak{F}(\mathbf{L})$ and $\mathfrak{F}_0(\mathbf{L})$ respectively. A formula is *open* if it contains no quantifier. If F is a formula $Cl(F)$ denotes the universal closure of F, i.e. the formula obtained by prefixing to F universal quantifiers (x_i) for each free variable x_i of F in some order. If Σ is a set of formulae, so $Cl(\Sigma) = \{Cl(F) : F \in \Sigma\}$.

If $F(x_1, \ldots, x_n)$ (briefly F) is a formula, $t(x_1, \ldots, x_n)$ (briefly t) is a term, $x_1, \ldots, x_n$ are distinct (free) variables or constants, then $F(t_1, \ldots, t_n)$ and $t(t_1, \ldots, t_n)$ denote the formula and the term respectively arising from F and t by substituting the term t_i for x_i for each $i = 1, \ldots, n$. We write

$$\left|\frac{x_1, \ldots, x_n}{t_1, \ldots, t_n}\right. F \quad \text{or} \quad \left|\frac{x_i}{t_i}\right. F \tag{1}$$

and

$$\left|\frac{x_1, \ldots, x_n}{t_1, \ldots, t_n}\right. t \quad \text{or} \quad \left|\frac{x_i}{t_i}\right. t \tag{2}$$

for $F(t_1, \ldots, t_n)$ and $t(t_1, \ldots, t_n)$ respectively.

Let $x_1, \ldots, x_n$ be distinct variables, let every free variable of F and t occur among $x_1, \ldots, x_n$. We write

$$\mathfrak{A}\left|\frac{x_1, \ldots, x_n}{a_1, \ldots, a_n}\right. F \quad \text{or} \quad \mathfrak{A}\left|\frac{x_i}{t_i}\right. F \tag{3}$$

for the statement that the elements $a_1, \ldots, a_n$ of $|\mathfrak{A}|$ *satisfy* the formula F *in* the system $\mathfrak{A}$ *under the correspondence* $x_1 \rightarrow a_1, \ldots, x_n \rightarrow a_n$ and

$$\mathfrak{A}\left|\frac{x_1, \ldots, x_n}{a_1, \ldots, a_n}\right. t \quad \text{or} \quad \mathfrak{A}\left|\frac{x_i}{a_i}\right. t \tag{4}$$

to denote the *value* of t in $\mathfrak{A}$ *under the correspondence* $x_1 \rightarrow a_1, \ldots, x_n \rightarrow a_n$.

The use of the notations (4) and (3) will always imply that our conditions hold for F, t, $x_1, \ldots, x_n$.

If F is a sentence, we write

(5) $$\mathfrak{A} \models F$$

for the statement that $\mathfrak{A}$ *satisfies* F or F *holds in* $\mathfrak{A}$ or $\mathfrak{A}$ is a *model of* F. We assume that the notion of satisfaction as used in (3) and (5) is known. We mention only that the interpretation of the identity symbol $\mathbf{=}$ is always the real identity $=$ in the case of relational systems. However we shall need occassionally so called pseudosystems. Roughly speaking a pseudosystem $\mathfrak{A}$ differs from a system only in that the realization $\mathbf{=}_{\mathfrak{A}}$ of the identity symbol is not necessarily the real identity. More precisely a *pseudosystem* $\mathfrak{A}$ *of* $\mathbf{L}$ is a pair (A, Δ) where A is a set $(A = |\mathfrak{A}|)$, Δ is a mapping of $L \cup \{\mathbf{=}\}$ such that $\Delta(P)$ $(= P_{\mathfrak{A}})$ and $\Delta(f)$ $(= f_{\mathfrak{A}})$ for $P, f \in \mathbf{L}$ are as before and $\Delta(\mathbf{=})$ denoted by $\mathbf{=}_{\mathfrak{A}}$ is a binary relation on $\mathfrak{A}$. In the case of pseudosystems we must modify the notation of satisfaction in the natural way. We shall use the notations (3), (4), (5) in connection with a pseudosystem $\mathfrak{A}$ in the appropriate sense.

Let Σ be a set of sentences of $\mathbf{L}$ (or *an axiom system of* $\mathbf{L}$). Let $\mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)$ denote the class of all models of Σ in the language $\mathbf{L}$, i.e. $\mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L}),$ $\mathfrak{A} \models F$ for every $F \in \Sigma\}$. We write $\mathbf{M}_{\mathbf{L}}(F)$ instead of $\mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\{F\})$. If $\mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)$ then we write $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}_\Delta$; if in addition $\Sigma = \{F\}$ then $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}$.

Let $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ be two languages, $\mathbf{L} \subset \mathbf{L}'$, let $\mathfrak{A}$ be a system or pseudosystem of $\mathbf{L}'$. Let $\mathfrak{A} \mid \mathbf{L}$ denote the uniquely determined system or pseudosystem $\mathfrak{B}$ of $\mathbf{L}$ such that $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|$, $P_{\mathfrak{B}} = P_{\mathfrak{A}}$, $f_{\mathfrak{B}} = f_{\mathfrak{A}}$ for any $P, f \in \mathbf{L}$ and $\mathbf{=}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{=}_{\mathfrak{B}}$ in the case of pseudosystems. Let $\mathbf{K}' \mid \mathbf{L} = \{\mathfrak{A} \mid \mathbf{L} : \mathfrak{A} \in \mathbf{K}\}$ for a class $\mathbf{K}' \subset \mathfrak{S}(\mathbf{L}')$. If in addition $\mathbf{K}' \in \mathbf{EC}_\Delta$ then $\mathbf{K} = \mathbf{K}' \mid \mathbf{L} \in \mathbf{PC}_\Delta$ (or $\mathbf{K}$ is a $\mathbf{PC}_\Delta$-class), and if $\mathbf{K}' \in \mathbf{EC}$ then $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}$.

If $\mathbf{K} \subset \mathfrak{S}(\mathbf{L})$ then $\mathbf{Th}(\mathbf{K})$ denotes the set of sentences of $\mathbf{L}$ holding in every system of $\mathbf{K}$; $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}) = \mathbf{Th}(\{\mathfrak{A}\})$.

A sentence F is a consequence of the set Σ of sentences or of the sentence G (notation: $\Sigma \vdash F$, $G \vdash F$ resp.) if every model of Σ or of G is a model of F. The set of all consequences of Σ is denoted by $\mathbf{Cn}(\Sigma)$. If F, G are formulae and $Cl(F \leftrightarrow G)$ is identically true, i.e. it is true in every system of the corresponding language then F and G are said to be equivalent and we write $F \sim G$. Besides we shall use the sign $\sim$ to denote the real equivalence, i.e. if A and B are statements (having truth values) $A \sim B$ will mean that A and B have the same truth value.

We shall denote languages by $\mathbf{L}$; relational systems or pseudosystems by $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$,; formulae by $E, F, G, H, \Gamma, \Phi, \Psi$; sets of formulae by Σ, Θ; predicate symbols by M, N, P, Q, R; function symbols by f, g, h, l; functions by φ, ψ, ε, δ, r; sets by A, B, U, V, W, X, Z; variables by v, w, x, y, z; terms by t, u; classes of relational systems by $\mathbf{K}$; natural numbers by i, j, k, l, m, n, s. All these notations can occur with indices or superscripts having similar meaning. In § 2 and § 3 we shall use several bold type letters to denote variables to emphasize their correspondence with certain elements.

Let $\mathfrak{A}$ be a pseudosystem of $\mathbf{L}$. $\mathbf{=}_{\mathfrak{A}}$ is said to be a *congruence relation on* $\mathfrak{A}$ if $\mathbf{=}_{\mathfrak{A}}$ is an equivalence relation and for any $P, f \in \mathbf{L}$ the closures of the formulas

$$x_1 \mathbf{=} y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \mathbf{=} y_n \rightarrow \big(P(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n)\big)$$
$$x_1 \mathbf{=} y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \mathbf{=} y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \mathbf{=} f(y_1, \ldots, y_n)$$

hold in $\mathfrak{A}$, ($x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ being distinct variables). In this case we define the factor system $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\equiv_{\mathfrak{A}}$ in the well known way as follows. $\mathfrak{B}$ is a relational system of $\mathbf{L}$, $|\mathfrak{B}|$ is the set of all equivalence classes $a/\equiv_{\mathfrak{A}}$ formed by elements a of $|\mathfrak{A}|$ with respect to the equivalence relation $\equiv_{\mathfrak{A}}$ and if $P, f \in \mathbf{L}$ then $P_{\mathfrak{B}}, f_{\mathfrak{B}}$ are defined by

$$P_{\mathfrak{B}}(a_1/\equiv_{\mathfrak{A}}, \ldots, a_n/\equiv_{\mathfrak{A}}) \sim P_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$$
$$f_{\mathfrak{B}}(a_1/\equiv_{\mathfrak{A}}, \ldots, a_n/\equiv_{\mathfrak{A}}) = f(a_1, \ldots, a_n)/\equiv_{\mathfrak{A}}.$$

Lemma 2. *If $\mathfrak{A}$ is a pseudosystem of $\mathbf{L}$, $\mathfrak{A}$ satisfies all sentences of the set $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(L)$ and $\equiv_{\mathfrak{A}}$ is a congruence relation on $\mathfrak{A}$ then $\mathfrak{A}/\equiv_{\mathfrak{A}} \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)$.*

A formula is said to be in prenex normal form (pnf) if it is of the following form:

$$(6) \qquad (x_1) \ldots (x_{k_1})(\exists y_1) \ldots (x_{k_{n-1}+1}) \ldots (x_{k_n})(\exists y_n)(x_{k_n+1}) \ldots (x_{k_{n+1}})\,\Phi$$

where Φ contains no quantifier. It can happen that for some $i = 1, \ldots n$ $k_i - k_{i-1} = 0$ i.e. no universal quantifier occurs between $(\exists y_{i-1})$ and $(\exists y_i)$, or that $n = 0$ i.e. no existential quantifier occurs in the prefix. To every formula F there exists a formula G of the same language so that G contains the same free variables as F, $G \sim F$ and G is in pnf. Let H be a sentence in pnf i.e. of the form (6). We define an open formula H^* in an enlarged language $\mathbf{L}_1^*$ as follows. Let f_i^H be new function symbols for $i = 1, \ldots, n$ with $\nu(f_i^H) = k_i$ Let

$$(7) \qquad F^* = \left|\frac{y_i}{f_i^H(x_1, \ldots, x_{k_i})}\right. \Phi .$$

Lemma 3. *If $\mathfrak{A}$ is a system or pseudosystem of $\mathbf{L}$ then $\mathfrak{A} \vdash H$ if and only if there exists a system or pseudosystem $\mathfrak{A}^*$ of $\mathbf{L}^*$ for which $\mathfrak{A}^* \vdash Cl(H^*)$ and* $\mathfrak{A}^* | \mathbf{L} = \mathfrak{A}$. That is the well known procedure of introducing the Skolem functions.

If $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$ then $\mathfrak{A}$ is said to be a subsystem of $\mathfrak{B}$ if and only if $|\mathfrak{A}| \subset |\mathfrak{B}|$, $P_{\mathfrak{A}} \subset P_{\mathfrak{B}}$ and $f_{\mathfrak{A}} \subset f_{\mathfrak{B}}$ for any $P, f \in \mathbf{L}$. In this case we write $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$. The class of all subsystems of a system $\mathfrak{B}$ is denoted by $\mathbf{S}(\mathfrak{B})$ and we put $\mathbf{S}(K) = \bigcup_{\mathfrak{B} \in K} \mathbf{S}(\mathfrak{B})$. If A is a non empty subset of $|\mathfrak{B}|$ and for any $a_1, \ldots, \ldots, a_n \in A$, $f \in \mathbf{L}$ we have $f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$ then $\mathfrak{B}[A]$ denotes the unique subsystem $\mathfrak{A}$ of $\mathfrak{B}$ for which $|\mathfrak{A}| = A$. We shall consider $\mathfrak{B}[A]$ holding defined only if our conditions.

If $\mathfrak{A}_n \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$ and $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_{n+1}$ for $n < \omega$ then $\bigcup_{n<\omega} \mathfrak{A}_n$ is the system $\mathfrak{B}$ for which

$$|\mathfrak{B}| = \bigcup_{n<\omega} |\mathfrak{A}_n|, \quad P_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{n<\omega} P_{\mathfrak{A}_n}, \quad f_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{n<\omega} f_{\mathfrak{A}_n}$$

for any $P, f \in \mathbf{L}$.

Let $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$. $\mathfrak{A}$ is an *elementary subsystem* of $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$), or $\mathfrak{B}$ is an *elementary extension* of $\mathfrak{A}$ if $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ and for any $F \in \mathfrak{F}(\mathbf{L})$ and $a_1, \ldots, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$

$$\mathfrak{A}\left|\frac{x_i}{a_i}\right. F \sim \mathfrak{B}\left|\frac{x_i}{a_i}\right. F$$

Let N be a predicate symbol. We shall abbreviate $(x)(N(x) \to F)$ as $(x)_N F$ and $(\exists x)(N(x) \wedge F)$ as $(\exists x)_N F$. F^N is said to be the *relativized of F* *to* N and F^N arises from F by replacing each quantifier (x) by $(x)_N$ and $(\exists x)$ by $(\exists x)_N$.

Lemma 4. *If* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$, $F \in \mathfrak{F}_0(L)$, $\{x: N_{\mathfrak{A}}(x)\} = B$ *and* $\mathfrak{A}[B]$ *is defined then* $\mathfrak{A}[B] \vdash F$ *if and only if* $\mathfrak{A} \vdash F^N$.

We shall need the possibility of replacing functions by predicates in the following form. We associate a new predicate symbol Q^f with each function symbol $f \in \mathbf{L}$ with $\nu(Q^f) = \nu(f) + 1$. Let $\overline{\overline{\mathbf{L}}}$ denote the language consisting of the predicate symbols of $\mathbf{L}$ and of the predicate symbols Q^f for all $f \in \mathbf{L}$. Now let $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$. The system $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ of $\overline{\overline{\mathbf{L}}}$ is defined by the following conditions: $|\overline{\overline{\mathfrak{A}}}| = |\mathfrak{A}|$, $P_{\overline{\overline{\mathfrak{A}}}} = P_{\mathfrak{A}}$ for $P \in \mathbf{L}$, $(Q^f)_{\overline{\overline{\mathfrak{A}}}}(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \sim f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}$ for any $a_1, \ldots, a_n, \ a_{n+1} \in |\mathfrak{A}|$, $f \in \mathbf{L}$. Let $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \{\overline{\overline{\mathfrak{A}}}: \mathfrak{A} \in \mathbf{K}\}$. Let now $F \in \mathfrak{F}_0(\mathbf{L})$. Let $\overline{\overline{F}}$ denote the formula obtained from F by „replacing" each $f \in \mathbf{L}$ by Q^f in a well known way such that $\mathfrak{A} \vdash F$ is equivalent to $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vdash \overline{\overline{F}}$. If Σ is a set of sentences of $\mathbf{L}$, we define $\overline{\overline{\Sigma}}$ as the set of the formulae $\overline{\overline{F}}$ for $F \in \Sigma$ and of the formulae

$$(x_1) \ldots (x_n)\, (\exists y)\, (z)\, (Q^f(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge (Q^f(x_1, \ldots, x_n, z) \rightarrow z = y))$$

for every $f \in \mathbf{L}$.

Lemma 5. $\overline{\overline{\mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)}} = \mathbf{M}_{\overline{\overline{\mathbf{L}}}}(\overline{\overline{\Sigma}})$.

Lemma 6. *If for a* $\mathbf{K} \subset \mathfrak{S}(\mathbf{L})$ *we have either* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} \in \mathbf{EC}_\Delta$ *or* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} \in \mathbf{EC}$ *or* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} \in \mathbf{PC}_\Delta$ *or* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} \in \mathbf{PC}$ *then the same holds for* $\mathbf{K}$. In order to obtain the desired axiom system for proving Lemma 6 we need only replace each part $Q^f(x_1, \ldots, x_n, y)$ of the corresponding formulae by $f(x_1, \ldots, x_n) = y$.

Let $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$. The mapping φ of $|\mathfrak{B}|$ onto $|\mathfrak{A}|$ is said to be a *homomorphism of* $\mathfrak{B}$ *onto* $\mathfrak{A}$, if for any $P, f \in \mathbf{L}$ and $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{B}|$ $P_{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ implies $P_{\mathfrak{A}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ and $\varphi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f_{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$. In this case $\mathfrak{A}$ is a homomorphic image of $\mathfrak{B}$, in notation $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}(\mathfrak{B})$. We write also $\mathbf{H}(\mathbf{K})$ for $\bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathbf{K}} \mathbf{H}(\mathfrak{B})$.

A sentence F is universal if $F = Cl(\Phi)$ where Φ contains no quantifier. F is positive if F does not contain $\neg, \rightarrow, \longleftrightarrow$. It is trivial and well known that universal sentences are preserved under taking subsystems and positive sentences are preserved under homomorphism. $\mathbf{Pos}(\Sigma)$ denotes the set of all positive consequences of Σ.

In § 5 we shall need a theorem of LYNDON [6].

Lemma 7. *(Theorem of* LYNDON*). If* $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L})$, $\mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)$ *and* $\mathfrak{A} \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\mathbf{Pos}(\Sigma))$ *then there exists an* $\mathfrak{A}'$ *for which* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$ *and* $\mathfrak{A}' \in \mathbf{H}(\mathbf{K})$.

In the following we briefly describe the notion of *ultrapower* and *strong limit ultrapower* to be used in § 5. These notions are special cases of important recent constructions in the theory of models. For more details we refer to [1] and [3].

Let $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$, $A = |\mathfrak{A}|$, I be a non empty set, D be an ultrafilter on I (i.e. a maximal dual ideal of the Boolean algebra of all subsets of I). For any function $\varphi, \psi \in A^I$ we write $\varphi \approx_D \psi$ if and only if $\{i \in I: \varphi(i) = \psi(i)\} \in D$. $\approx_D$ is an equivalence relation on the set A^I. For each $\varphi \in A^I$ let $\varphi/D = \{\psi: \varphi \approx_D \psi\}$ the equivalence class of φ with respect to $\approx_D$. We define

$A^I_D = \{\varphi/D : \varphi \in A^I\}$. We define the system $\mathfrak{A}^I_D$ of $\mathbf{L}$ as follows. Let $|\mathfrak{A}^I_D| = A^I_D$,

$$P_{\mathfrak{A}^I_D}(\varphi_1/D, \ldots, \varphi_n/D) \sim \{i \in I : P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1(i), \ldots, \varphi_n(i))\} \in D$$

and

$$f_{\mathfrak{A}^I_D}(\varphi_1/D, \ldots, \varphi_n/D) = f_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)/D .$$

Now we define an auxiliary notion to make easier the definition of strong limit ultrapower. Let c_a denote the constant function of A^I which takes the value $a \in A$ for each $i \in I$, let $A_{I,D}$ denote the set $\{c_a/D : a \in A\}$. It is well known that $\mathfrak{A}^I_D[A_{I,D}]$ is an elementary subsystem of $\mathfrak{A}^I_D$ and it is isomorphic to $\mathfrak{A}$ by the mapping $c_a/D \to a$. Let $A^{[I/D]} = (A^I_D - A_{I,D}) \cup A$ and let $d^{I,D}_A$ (briefly d) be the onto mapping $d : A^{[I/D]} \to A^I_D$ for which $d(\varphi/D) = \varphi/D$ if $\varphi \in A^I$ and $\varphi/D \notin A_{I,D}$ and $d(a) = c_a/D$ for $a \in A$. We define the system $\mathfrak{A}^{[I/D]}$ of $\mathbf{L}$ such that $d^{I,D}_A$ is an isomorphism from $\mathfrak{A}^{[I/D]}$ onto $\mathfrak{A}^I_D$. Consequently we have $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}^{[I/D]}$.

Lemma 8. *If $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$ and $\mathfrak{A}$ satisfies every universal sentence holding in $\mathfrak{B}$ then $\mathfrak{A}$ is isomorphic to a subsystem $\mathfrak{A}'$ of $\mathfrak{B}^{[I/D]}$ for some I and D as before.*

That is well known and is an immediate consequence of Theorem 1.15 of [1].

Now let $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$, let I_n be a non empty set, D_n an ultrafilter on I_n for $n < \omega$. We define by induction

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \tag{8}$$

$$\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{A}_n^{[I_n/D_n]} \; (n = 0, 1, \ldots) \tag{9}$$

Lemma 9. $\mathfrak{A} \prec \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{A}_n$.

Let $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(L)$, α be a mapping from $|\mathfrak{B}|$ into $|\mathfrak{A}|$. Let α^I_D denote the mapping of B^I_D into A^I_D ($A = |\mathfrak{A}|$, $B = |\mathfrak{B}|$) such that

$$\alpha^I_D(\varphi/D) = (\alpha \circ \varphi)/D \quad \text{for any } \varphi \in B^I$$

(we note that in this case $\alpha \circ \varphi \in A^I$) Further we define $\alpha^{[I/D]} : B^{[I/D]} \to A^{[I/D]}$ such that

$$d^{I,D}_A \circ \alpha^{[I,D]} = \alpha^I_D \circ d^{I,D}_B$$

We see that $\alpha^{[I/D]}(a) = \alpha(a)$ for $a \in B$, in other words $\alpha \subset \alpha^{[I/D]}$.

Now we put

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}_n^{[I_n/D_n]}$$

$$\alpha_0 = \alpha$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n^{[I_n/D_n]}$$

in addition to (8) and (9).

Lemma 10. *If α is a homomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$ then $\bigcup_{n<\omega} \alpha_n$ is a homomorphism of $\bigcup_{n<\omega} \mathfrak{B}_n$ onto $\bigcup_{n<\omega} \mathfrak{A}_n$.*

We shall use the following

Lemma 11. Compactness Theorem. *If $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L})$ and $F \in \mathbf{Cn}(\Sigma)$ then there is a finite subset Σ_0 of Σ for which $F \in \mathbf{Cn}(\Sigma_0)$.*

We suppose the notion of (general) recursive function, (general) recursive predicate of the natural numbers, recursive or recursively enumerable set of natural numbers to be known. The following axiom system called Robinson's system (see KLEENE [4], p. 197) will be used in § 2. It contains the constants $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ and the binary function symbols $+, \cdot$. Let the set of the letter be $\mathbf{L}^0$.

$$(R)\begin{cases}(x)\,(y)\,(x+\mathbf{1}=y+\mathbf{1}\rightarrow x=y)\\ (x)\,(x+\mathbf{0}=x)\\ (x)\,(y)\,(x+(y+\mathbf{1})=(x+y)+\mathbf{1})\\ (x)\,(\neg\, x+\mathbf{1}=\mathbf{0})\\ (x)\,(x\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0})\\ (x)\,(y)\,(x\cdot(y+\mathbf{1})=x\cdot y+x)\\ (x)\,(\exists y)\,(y+\mathbf{1}=x\vee x=\mathbf{0})\end{cases}$$

If k is a natural number, $\underline{k}$ will denote the corresponding *numeral*, i.e. if $k=0$ then $\underline{k}=\mathbf{0}$, and $\underline{k+1}=(\underline{k})+\mathbf{1}$. In the following lemma $\vdash_{(R)} F$ will mean that the sentence F is derivable from (R) in a usual formal system of the first order predicate calculus with equality axioms.

Lemma 12. (a) *For each recursive predicate* $R(x_1, \ldots, x_n)$ *there is a formula* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *of* $\mathbf{L}^0$ *such that for any natural numbers* $k_1, \ldots, k_n$

$$R(k_1, \ldots, k_n) \sim \vdash_{(R)} F(\underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_n)$$

$$\neg\, R(k_1, \ldots, k_n) \sim \vdash_{(R)} \neg F(\underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_n)$$

(b) *If specially* $R(x_1, \ldots, x_n)$ *is* $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n$ *for a number theoretic function* φ *then in addition to* (a) *we have for any natural numbers* $k_1, \ldots, k_{n-1}$ *and* $k_n = \varphi\ (k_1, \ldots, k_{n-1})$

$$\vdash_{(R)} (x)\big(F(\underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_{n-1}, x) \rightarrow x = \underline{k_n}\big)$$

(c) *For each natural number* n

$$\vdash_{(R)} (x)\big(x<\underline{n}\rightarrow(x=\mathbf{0}\vee x=\mathbf{1}\vee\ldots\vee x=\underline{n-1})\big)$$

where $x<y$ *is an abbreviation of* $(\exists z)\big((z+\mathbf{1})+x=y\big)$ (see [4] Corollary of Theorem 32 (p. 296) for (a), Theorem 32 (p. 295) for (b) and *166 (p. 197) or its proof for (c)).

§ 2. A generalization of a theorem of Kleene

For the sake of simplicity we assume in the following definition that $\mathbf{L}$ contains only predicate symbols and no function symbol.

Definition. The language $\mathbf{L}$ is said to be *recursive by* the enumeration $\mu = (P_i)_{i<\omega}$ of all predicate symbols of $\mathbf{L}$ if $r(i) = \nu(P_i)$ is a recursive function of i.

We define the Gödel number $Nu_\mu(F) = Nu(F)$ of formulae F of L by induction on the number of logical operations contained in F.

(i) If $F = v_i = v_j$ $(i, j < \omega)$ then let

$$Nu(F) = 2^1 \cdot 3^i \cdot 5^j$$

(ii) If $F = P_i\,(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{r(i)}})$ then let

$$Nu(F) = 2^1 \cdot \prod_{k=1}^{r(i)} p_{i+1}^{i_k}\,{}^{3}$$

(iii) If $F = \neg\, G$ then let

$$Nu(F) = 2^3 \cdot 3^{Nu(G)}$$

(iv) If $F = F_1 \wedge F_2$ then let

$$Nu(F) = 2^4 \cdot 3^{Nu(F_1)} \cdot 5^{Nu(F_2)}$$

(v) If $F = (v_i)\, G$ then let

$$Nu(F) = 2^5 \cdot 3^i \cdot 5^{Nu(G)}$$

We remark that only $\neg$, $\wedge$, (v_i) are considered as primitive operations, the others will be used as abbreviations. A set $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L})$ is said to be *recursively enumerable by* μ if $\{ Nu_\mu(F)\colon F \in \Sigma\}$ is recursively enumerable.

We define the class $\mathbf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}}$ of classes of relational systems as follows. Let $\mathbf{K} \subset \mathfrak{S}(\mathbf{L})$, $\mathbf{L}$ contain no function symbol.

Definition. $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}}$ *if and only if there exist a language* $\mathbf{L}'$ *recursive by an enumeration* μ *and a set* $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L}')$ *such that* $\mathbf{L} \subset \mathbf{L}'$ *and* Σ *is recursively enumerable by* μ *and* $\mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma) \mid \mathbf{L}$.

Theorem 1. *If* $\mathbf{L}_0$ *is a finite language,* $\mathbf{K} \subset \mathfrak{S}(\mathbf{L}_0)$ *and* $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}}$ *then* $\mathbf{K}^\infty \in \mathbf{PC}$ ($\mathbf{K}^\infty$ *being the class of infinite systems of* $\mathbf{K}$).

Proof. According to the hypothesis we have the language $\mathbf{L} \supset \mathbf{L}_0$, the enumeration $(P_i)_{i<\omega}$ of all predicate symbols of $\mathbf{L}$, the set Σ of sentences of $\mathbf{L}$ and the recursive predicate $R(n, m)$ such that $r(i) = \nu(P_i)$ is a recursive function of i, $\mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma) \mid \mathbf{L}_0$ and $n = Nu(F)$ for some $F \in \Sigma$ if and only if there exists a natural number m for which $R(n, m)$ holds. We may assume that the predicate symbols of $\mathbf{L}_0$ are $P_0, \ldots, P_{n_0-1}$. The language $\mathbf{L}_1$ is defined as the set of the predicate symbols $P_0, \ldots, P_{n_0-1}$ and of the following additional symbols:

$\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$	constants
$+$, $\cdot$	binary function symbols
N	unary predicate symbol
h	binary function symbol
l	unary function symbol
M	binary predicate symbol

Let us consider the relativization of Robinson's theory to the predicate N (see § 1), i.e. the following sentences

$N(\mathbf{0})$
$N(\mathbf{1})$
$(v_0)\,(v_1)\,\big(N(v_0) \wedge N(v_1) \rightarrow N(v_0 + v_1)\big)$
$(v_0)\,(v_1)\,\big(N(v_0) \wedge N(v_1) \rightarrow N(v_0 \cdot v_1)\big)$
$(v_0)_N\,(v_1)_N\,(v_0 + \mathbf{1} = v_1 + \mathbf{1} \rightarrow v_0 = v_1)$
$(v_0)_N\,(v_0 + \mathbf{0} = v_0)$

---

[3] p_i denotes the i-th prime number ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $\ldots$)

$$(v_0)_N\,(v_1)_N\,(v_0 + (v_1 + \mathbf{1}) = (v_0 + v_1) + \mathbf{1})$$
$$(v_0)_N(\neg\, v_0 + \mathbf{1} = \mathbf{0})$$
$$(v_0)_N\,(v_0 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0})$$
$$(v_0)_N\,(v_1)_N\,(v_0 \cdot (v_1 + \mathbf{1}) = v_0 \cdot v_1 + v_0)$$
$$(v_0)_N\,(\exists\, v_1)_N\,(v_1 + \mathbf{1} = v_0 \vee v_0 = \mathbf{0})$$

Let R^N denote the conjunction of these formulae.

Let us consider the following number theoretical predicates:

$Neg(n, m)$	$n = Nu(\neg\, \Phi)$, $m = Nu(\Phi)$ for some $\Phi \in \mathfrak{F}(L)$	$NEG(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$
$Conj(n, m_1, m_2)$	$n = Nu(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, $m_1 = Nu(\Phi_1)$ $m_2 = Nu(\Phi_2)$ for some $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{F}(L)$	$CONJ(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2)$
$Quant(n, m, i)$	$n = Nu((v_i)\Phi)$, $m = Nu(\Phi)$ for some $\Phi \in \mathfrak{F}(L)$	$QUANT(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{i})$
$Eq(n)$	$n = Nu(v_{j_0} \equiv v_{j_1})$ for some j_0, j_1	$EQ(\boldsymbol{n})$
$Pim(n, i)$	$n = Nu(P_i(v_{j_0}, \ldots, v_{j_{r(i)-1}})$ for some $j_0, \ldots, j_{r(i)-1}$	$PRIM(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i})$
$Eq(n, j, k)$	$n = Nu(v_{j_0} \equiv v_{j_1})$, $k = 0$ or $k = 1$, and $j = j_k$	$EQ(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$
$Prim(n, i, j, k)$	$n = Nu(P_i(v_{j_0}, \ldots, v_{j_{r(i)-1}})$ $0 \leq k \leq r(i) - 1, j = j_k$	$PRIM(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$
$Pr(n, i)$	$n = Nu(P_i(v_0, \ldots, v_{r(i)-1})$	$PR(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i})$
$k < i$		$S_0(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i})$
$k < r(i)$		$S_1(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i})$
$k \geq r(i)$		$S_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i})$
$k \geq lh(n)$	$n = Nu(\Phi)$ and the maximal natural number i for which v_i is a a free variable of Φ is $lh(n) - 1$	$S_3(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n})$
$\boldsymbol{i} = \max(j, k)$		$MAX(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$
$R(n, m)$		$RE(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$

Lemma 13. *The number theoretical predicates listed above are all recursive.*

That is trivial by the definition of $Nu(\Phi)$ and by our hypothesis that $r(i)$ is recursive. If n is a natural number then $\underline{n}$ denotes the corresponding numeral (formal term of $\mathbf{L}_1$) (see § 1).

Lemma 14. *Let $R(x_1, \ldots, x_n)$ be a recursive number theoretic predicate. Then there exists a formula $F^N(x_1, \ldots, x_n)$ of the language $\mathbf{L}^0 \subset \mathbf{L}_1$ such that for every model $\mathfrak{A}$ of R^N and for any natural numbers $k_1, \ldots, k_n$ $R(k_1, \ldots, k_n)$ is true if and only if $\mathfrak{A} \vdash F^N(\underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_n)$.*

Proof. Our assertion is a direct consequence of Lemma 12(a). The desired formula F^N can be obtained by relativizing the formula F of Lemma 12 to N.

The formula F^N to each of the predicates listed before Lemma 1 is denoted by the corresponding notation standing on the right side of the above list.

Lemma 15. *For every model* $\mathfrak{A}$ *of* R^N *and for arbitrary natural numbers* n, i, s

$$\mathfrak{A} \vdash (\boldsymbol{j})_N \big(S_0(\boldsymbol{j}, \underline{n}) \rightarrow (\boldsymbol{j} = \mathbf{0} \vee \boldsymbol{j} = \mathbf{1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{j} = \underline{n-1})\big) \tag{1}$$

$$\mathfrak{A} \vdash (\boldsymbol{k})_N \big(S_1(\boldsymbol{k}, \underline{i}) \rightarrow (\boldsymbol{k} = \mathbf{0} \vee \boldsymbol{k} = \mathbf{1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{k} = \underline{r(i)-1})\big) \tag{2}$$

$$\mathfrak{A} \vdash (\boldsymbol{k})_N \big(MAX(\boldsymbol{k}, \underline{s}, \underline{i}) \rightarrow \boldsymbol{k} = \underline{\max(s, i)}\big) \tag{3}$$

Proof. (1) follows from Lemma 12(*c*), (3) from Lemma 12(*b*), (2) follows from Lemma 12(b) and (c) if we specialize

$$S_1(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) = (\exists \boldsymbol{j})_N \big(S_0(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}) \wedge R_0^N(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})\big) \tag{4}$$

where $R_0(i,j)$ is a formula representing $j = r(i)$ as intended to get in Lemma 1 (b) i.e. we have

$$\mathfrak{A} \vdash R_0^N(\underline{i}, \underline{j}) \sim j = r(i) \tag{5}$$

and

$$\mathfrak{A} \vdash (\boldsymbol{k})_N \big(R_0^N(\underline{i}, \boldsymbol{k}) \rightarrow \boldsymbol{k} = \underline{r(i)}\big) \tag{6}$$

for natural numbers i, j.

For $S_1(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i})$ defined by (4) we must show (2), furthermore also

$$\mathfrak{A} \vdash S_1(\underline{k}, \underline{i}) \sim k < r(i) \tag{7}$$

i.e. that $S_1(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i})$ satisfies Lemma 14 too.

From (5) and Lemma 14 for $S_0(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j})$ it follows easily that $k < r(i)$ implies $\mathfrak{A} \vdash S_1(\underline{k}, \underline{i})$. Conversely if $\mathfrak{A} \vdash S_1(\underline{k}, \underline{i})$ then from (4) and (6) it follows that $\mathfrak{A} \vdash S_0(\underline{k}, \underline{r(i)})$ i.e. $k < r(i)$, consequently (7) is proved. (2) follows from (4), (6) and (1) similarly.

Now we give a finite axiom system Σ_1 for which we shall prove

$$\mathbf{K}^\infty = \mathbf{M}_{\mathbf{L}_1}(\Sigma_1) \,|\, \mathbf{L}_0 \tag{8}$$

We use the abreviations $m_i = Nu\big(P_i(v_0, \ldots, v_{r(i)-1})\big)$ $(i = 0, 1, \ldots)$; $e_0 = Nu(v_0 = v_1)$

A 1 R^N

A 2 $l(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

A 3 $(\boldsymbol{a})\, N(l(\boldsymbol{a}))$

A 4 $(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x})\,(\exists\, \boldsymbol{b})\big(l(\boldsymbol{b}) = l(\boldsymbol{a}) + \mathbf{1} \wedge (\boldsymbol{j})_N \big(S_0(\boldsymbol{j}, l(\boldsymbol{a})) \rightarrow$
$\rightarrow h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{j})\big) \wedge h\big(\boldsymbol{b}, l(\boldsymbol{a})\big) = \boldsymbol{x}\big)$

A 5 $(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{b})\,\{[l(\boldsymbol{a}) = l(\boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{j})_N \big(S_0(\boldsymbol{j}, l(\boldsymbol{a})) \rightarrow h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{j})\big)] \rightarrow$
$\rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\}$

A 6 $(\boldsymbol{a})\big(l(\boldsymbol{a}) = \underline{2} \rightarrow \big(M(\underline{e_0}, \boldsymbol{a}) \longleftrightarrow h(\boldsymbol{a}, \mathbf{0}) = h(\boldsymbol{a}, \mathbf{1})\big)$

A 7 $\bigwedge_{i=0}^{n_0-1} (\boldsymbol{a})\,[l(\boldsymbol{a}) = \underline{r(i)} \rightarrow (M(\underline{m_i}, \boldsymbol{a}) \longleftrightarrow P_i(h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}), \ldots, h(\boldsymbol{a}, \underline{r(i)-1})))]$

A 8 $(\boldsymbol{n})_N (\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{b})\,\{[EQ(\boldsymbol{n}) \wedge S_2(l(\boldsymbol{a}), \underline{2}) \wedge S_2(l(\boldsymbol{b}), \underline{2}) \wedge$
$\wedge\, (\boldsymbol{j})_N (\boldsymbol{k})_N ((EQ(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \wedge S_0(\boldsymbol{j}, l(\boldsymbol{a})) \wedge (\boldsymbol{k} = \boldsymbol{1} \vee \boldsymbol{k} = \underline{2})) \rightarrow$
$\rightarrow h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}) = h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}))] \rightarrow (M(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) \longleftrightarrow M(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{b}))\}$

A 9 $(\boldsymbol{n})_N (\boldsymbol{m})_N (\boldsymbol{i})_N (\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{b})\,\{[PRIM(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}) \wedge PR(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{i}) \wedge S_2(l(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{i}) \wedge$
$\wedge\, S_2(l(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{i}) \wedge (\boldsymbol{j})_N (\boldsymbol{k})_N ((PRIM\,(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \wedge S_0(\boldsymbol{j}, l(\boldsymbol{a})) \wedge$
$\wedge\, S_1(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i})) \rightarrow h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}) = h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}))] \rightarrow (M(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) \longleftrightarrow M(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{b}))\}$

A 10 $(\boldsymbol{n})_N (\boldsymbol{m})_N (\boldsymbol{a})\,[NEG(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) \wedge S_3(l(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{n}) \rightarrow$
$\rightarrow (M(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) \longleftrightarrow \neg\, M(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{a}))]$

A 11 $(\boldsymbol{n})_N (\boldsymbol{m}_1)_N (\boldsymbol{m}_2)_N (\boldsymbol{a})\,[CONJ\,(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2) \wedge S_3(l(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{n}) \rightarrow$
$\rightarrow (M(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) \longleftrightarrow (M(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{a}) \wedge M(\boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{a}))]$

A 12 $(\boldsymbol{n})_N (\boldsymbol{m})_N (\boldsymbol{i})_N (\boldsymbol{a})\,[QUANT(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{i}) \wedge S_3(l(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{n})) \rightarrow$
$\rightarrow [M(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) \longleftrightarrow (\boldsymbol{b})\,(\{MAX(l(\boldsymbol{b}), l(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{i}) \wedge$
$\wedge\, (\boldsymbol{k})_N ((\neg\, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \wedge S_0(\boldsymbol{k}, l(\boldsymbol{a}))) \rightarrow h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}) = h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}))\} \rightarrow$
$\rightarrow M(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{b}))]]$

A 13 $(\boldsymbol{n})_N (\boldsymbol{m})_N (RE(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) \rightarrow M(\boldsymbol{n}. \boldsymbol{0}))$

I. Proof of

(9) $$\mathbf{M}_{\mathbf{L}_1}(\Sigma_1) \,|\, \mathbf{L}_0 \supset \mathbf{K}^\infty$$

Let $\mathfrak{A}_0 \in \mathbf{K}^\infty$, i.e. let $|\,\mathfrak{A}_0\,|$ be infinite and $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \,|\, \mathbf{L}_0$ for $\mathfrak{A} \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)$

We have to define $\mathfrak{A}_1$ such that

(10) $$\mathfrak{A}_1 \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}_1}(\Sigma_1)$$

and

(11) $$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1 \,|\, \mathbf{L}_0$$

Let B be a subset of A of power ω and let $N_{\mathfrak{A}_1}(a)$ be true if and only if $a \in B$.

Let $\mathbf{0}_{\mathfrak{A}_1}$, $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}_1}$ be two elements of B, $\boldsymbol{+}_{\mathfrak{A}_1}$, $\cdot_{\mathfrak{A}_1}$ binary functions on $A = |\,\mathfrak{A}_0\,|$ so that $\mathfrak{B} = (A;\ \mathbf{0}_{\mathfrak{A}_1}, \mathbf{1}_{\mathfrak{A}_1}, \boldsymbol{+}_{\mathfrak{A}_1}, \cdot_{\mathfrak{A}_1})\ [B]$ is defined and isomorphic to $(\omega;\ 0, 1, +, \cdot\,)$ where the latter is the system of the natural numbers with the usual constants and operations. We may and shall suppose that $\mathfrak{B}$ is identical with $(\omega;\ 0, 1, +, \cdot)$. If $a, b \in A$ and $a \notin \omega$ or $b \notin \omega$ then $a \boldsymbol{+}_{\mathfrak{A}_1} b$, $a \cdot_{\mathfrak{A}_1} b$ can be defined arbitrarily, e.g. $a \boldsymbol{+}_{\mathfrak{A}_1} b = a \cdot_{\mathfrak{A}_1} b = 0$.

We establish a one-to-one mapping φ of $A - \{0\}$ onto the set of all finite sequences (with at least one element) of A. Let $l_{\mathfrak{A}_1}(0) = 0$ and $l_{\mathfrak{A}_1}(a) =$ the length of $\varphi(a)$ ($=$ the number of elements of the sequence $\varphi(a)$) for $a \in A - \{0\}$. We say that a *represents* the sequence $\varphi(a)$.

If $\varphi(a) = (a_0, \ldots, a_{s-1})$ and $k \in \omega$, $k < s$ then let $h_{\mathfrak{A}_1}(a, k) = a_k$. Otherwise let $h_{\mathfrak{A}_1}(a, b) = 0$.

Let Φ be an arbitrary formula of $\mathbf{L}$, $n = Nu(\Phi)$, $a \in A$, $l(a) \geq lh(n)$, $\varphi(a) = (a_0, \ldots, a_{s-1})$. We define

$$M_{\mathfrak{A}_1}(n, a) \sim \mathfrak{A} \left| \frac{v_0, \ldots, v_{lh(n)-1}}{a_0, \ldots, a_{lh(n)-1}} \right. \Phi$$

Specially if $a = 0$ and Φ is a closed formula

$$M_{\mathfrak{A}_1}(n, 0) \sim \mathfrak{A} \vdash \Phi$$

In all other cases $x, y \in A$ $M_{\mathfrak{A}_1}(x, y)$ may be arbitrary, e.g. $M_{\mathfrak{A}_1}(x, y) = 0$.

Considering (11) $\mathfrak{A}_1$ has been completely defined.

We have to verify that $\mathfrak{A}_1$ satisfies the axioms $A1-A13$. This verification is straightforward. We give only a sketch of it. We make advantage of the fact that the special formulae listed before Lemma 13 take the same truth value as the corresponding number theoretic predicates for natural number arguments (i.e. for elements a of A satisfying $N_{\mathfrak{A}_1}(a)$).

A1 is true because the system of the natural numbers with the usual operations satisfies the axioms of Robinson's theory (and see Lemma 4 in § 1). A4 expresses that for every sequence $(a_0, \ldots, a_{s-1})$ represented by a and every element x there is a $b \in A$ representing $(a_0, \ldots, a_{s-1}, x)$. A5 expresses that there is only one element of A representing a given sequence.

Now let us observe the definition of $M_{\mathfrak{A}_1}(n, a)$. A6, A7 are obvious. A9 expresses that $P_i(v_{i_0}, \ldots, v_{i_{r(i)-1}})$ takes the same truth value for a sequence $(a_0, \ldots, a_{s-1})$ represented by a which is taken by $P_i(v_0, \ldots, v_{r(i)-1})$ for the sequence $(a_{i_0}, \ldots, a_{i_{r(i)-1}})$ represented by b. A8 is similar for the identity. A10, A11 express the meaning of the negation and conjunction. Let $n = Nu(\Phi)$, $a \in A$, $l_{\mathfrak{A}_1}(a) \geq lh(n)$. A12 expresses that a sequence $(a_0, \ldots, a_{s-1})$ represented by a satisfies the formula $(v_i)\Phi$ if and only if for every b $\varphi(b)$ satisfies Φ provided that the following hold: $\varphi(b) = (b_0, \ldots, b_{s'-1})$, $s' = \max(s, i)$ and $b_j = a_j$ if $j < s$ and $j \neq i$. A13 expresses that the sentences F for which there exists an m with $R(Nu(F), m)$ i.e. the sentences of Σ are true in $\mathfrak{A}$.

We have proved (10) and (11), consequently also (9), qu. e.d.

II. Proof of

$$\mathbf{M}_{\mathbf{L}_1}(\Sigma_1) \,|\, \mathbf{L}_0 \subset \mathbf{K}^\infty \tag{12}$$

Let $\mathfrak{A}_1 \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}_1}(\Sigma_1)$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1 \,|\, \mathbf{L}_0$, $|\mathfrak{A}_1| = A$. A is trivially infinite because the values of the numerals in $\mathfrak{A}_1$ must be different.

In order to prove (12) we must construct a system $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$ for which

$$\mathfrak{A} \,|\, \mathbf{L}_0 = \mathfrak{A}_0 \tag{13}$$

and

$$\mathfrak{A} \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma) \tag{14}$$

Let us denote the set of the values of the numerals in $\mathfrak{A}_1$ by B. B is a (possibly proper) subset of $\{a\colon N_{\mathfrak{A}_1}(a)\}$ From the fact that in $\mathfrak{A}_1$ A1 holds it follows that $\mathfrak{B} = (A; \mathbf{0}_{\mathfrak{A}_1}, \mathbf{1}_{\mathfrak{A}_1}, +_{\mathfrak{A}_1}, \cdot_{\mathfrak{A}_1})$ $[B]$ is defined and isomorphic to $(\omega; 0, 1, +, \cdot)$. We may and shall suppose that $\mathfrak{B}$ is identical with the latter system.

Lemma 16. *For every natural number $n \geqq 0$ and every sequence $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ of n elements of A (possibly the empty sequence) there is exactly one element a of A for which $l_{\mathfrak{A}_1}(a) = n$ and $h_{\mathfrak{A}_1}(a, k) = a_k$ for $k < n$.* Let $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ denote this a.

Proof. First we show the existence of a by induction on n. If $n = 0$ then $a = 0$ is suitable by A2. Let $n \geq 1$ and let us assume that $a \in A$, $l_{\mathfrak{A}_1}(a) = n - 1$, $h_{\mathfrak{A}_1}(a, k) = a_k$ for $k < n - 1$. Using A4 („substituting" a_{n-1} for x) we obtain $b \in A$ for which $l_{\mathfrak{A}_1}(b) = n$, $h_{\mathfrak{A}_1}(b, n-1) = a_{n-1}$ and

$$(15) \qquad \mathfrak{A}_1 \left| \frac{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}{a, b} \right. (\boldsymbol{j})_N \big(S_0(\boldsymbol{j}, l(\boldsymbol{a})) \to h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{j})\big)$$

By Lemma 14 $\mathfrak{A}_1 \vdash S_0(\mathbf{0}, \underline{n-1}), \ldots, S_0(\underline{n-2}, \underline{n-1})$ consequently (15) implies $h_{\mathfrak{A}_1}(b, k) = h_{\mathfrak{A}_1}(a, k) = a_k$ for $k < n - 1$ qu. e.d. Secondly we prove the unicity. Suppose $a, b \in A$; $l_{\mathfrak{A}_1}(a) = l_{\mathfrak{A}_1}(b) = n \in \omega$, $h_{\mathfrak{A}_1}(a, k) = h_{\mathfrak{A}_1}(b, k)$ for $k < n - 1$. $a = b$ will follow by $\mathfrak{A}_1 \vdash$ A6 if we show that

$$\mathfrak{A}_1 \left| \frac{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}{a, b} \right. (\boldsymbol{j})_N \big(S_0(\boldsymbol{j}, \underline{n}) \to h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{j})\big)$$

But that is a consequence of Lemma 15 (1) and of our hypothesis.

To define $\mathfrak{A}$ we give $(P_i)_{\mathfrak{A}}$ for $i \geqq n_0$ as follows. For any $a_0, \ldots, a_{r(i)-1} \in A$ let

$$(16) \qquad (P_i)_{\mathfrak{A}}\,(a_0, \ldots, a_{r(i)-1}) \sim M_{\mathfrak{A}_1}(m_i, [a_0, \ldots, a_{r(i)-1}])$$

We remark that by $\mathfrak{A}_1 \vdash$ A7 (16) holds also for $i < n_0$. Similarly we have by $\mathfrak{A}_1 \vdash$ A6 that

$$(17) \qquad a_0 = a_1 \sim M_{\mathfrak{A}_1}(e_0, [a_0, a_1])$$

Lemma 17. *If $\Phi \in \mathfrak{F}(\mathbf{L})$, $n = Nu(\Phi)$, $a_0, \ldots, a_{s-1} \in A$, $lh(n) \leq S$ then*

$$(18) \qquad \mathfrak{A} \left| \frac{v_0, v_1, \ldots, v_{s-1}}{a_0, a_1, \ldots a_{s-1}} \right. \Phi \sim M_{\mathfrak{A}_1}(n, [a_0, \ldots, a_{s-1}])$$

Proof. The proof proceeds by induction on the number of the logical operators (i.e. $\neg$, $\wedge$, (x)) occurring in Φ.

1. Let first Φ be $v_{j_0} \equiv v_{j_1}$ or $P_i(v_{j_0}, \ldots, v_{j_{r(i)-1}})$. We consider only the second case. The first one can be treated similarly using A8 and (17) instead of A9 and (16).

Let $a = [a_0, \ldots, a_{s-1}]$, $b = [a_{j_0}, \ldots, a_{j_{r(i)-1}}]$, $m = m_i$. By Lemma 14 we have

$$(19) \qquad \mathfrak{A}_1 \vdash PRIM\,(\underline{n}, \underline{i}), PR\,(\underline{m}, \underline{i}), S_2(\underline{s}, \underline{i}), S_2(\underline{r(i)}, \underline{i})$$

further

$$(20) \qquad \mathfrak{A}_1 \vdash PRIM\,(\underline{n}, \underline{i}, \underline{j_k}, \underline{k}) \quad \text{for} \quad k < r(i)$$

and

$$(21) \qquad \mathfrak{A}_1 \vdash \neg\, PRIM\,(\underline{n}, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \quad \text{for} \quad j < s, j \neq j_k$$

By using Lemma 15 (1) and (2), (20) and (21) we obtain

$$\mathfrak{A}_1 \left| \frac{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}{a, b} (\boldsymbol{j})_N (\boldsymbol{k})_N \big((S_1(\boldsymbol{k}, \underline{i}) \wedge S_0(\boldsymbol{j}, \underline{s})\big) \rightarrow \right.$$

$$\rightarrow \big(PRIM(\underline{n}, \underline{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \rightarrow h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}) = h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}))\big)$$

From this and (19) and $\mathfrak{A}_1 \vdash$ A8 it follows

$$\mathfrak{A}_1 \left| \frac{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}{a, b} \big(M(\underline{n}, \boldsymbol{a}) \longleftrightarrow M(\underline{m}, \boldsymbol{b})\big) \right. \tag{22}$$

Applying (16) gives

$$(P_i)_{\mathfrak{A}}(a_{j_0}, \ldots, a_{j_{r(i)-1}}) \sim M_{\mathfrak{A}_1}(m, b)$$

This and (22) imply

$$(P_i)_{\mathfrak{A}}(a_{j_0}, \ldots, a_{j_{r(i)-1}}) \sim M_{\mathfrak{A}_1}(n, a)$$

which is exactly (18) as was to be shown.

2. Let $\Phi = \neg \Psi$ or $\Phi = \Psi_1 \wedge \Psi_2$. These induction cases can be treated by using $\mathfrak{A}_1 \vdash$ A10, A11. Put $m = Nu(\Psi)$ or $m_1 = Nu(\Psi_1)$ and $m_2 = Nu(\Psi_2)$. Let us observe that by Lemma 14 we have $\mathfrak{A}_1 \vdash NEG(\underline{n}, \underline{m})$ or $\mathfrak{A}_1 \vdash CONJ(\underline{n}, \underline{m_1}, \underline{m_2})$ and in both cases $\mathfrak{A}_1 \vdash S_3(l_{\mathfrak{A}_1}(a), \underline{n})$.

3. Let $\Phi = (v_i)\,\Psi$, $m = Nu\,\overline{\Psi}$. To fix the notations we suppose $i \geq s$. The other case $i < s$ can be treated without essential change. Let $a = [a_0, \ldots, a_{s-1}]$.

(a) First we suppose

$$\mathfrak{A} \left| \frac{v_0, v_1, \ldots, v_{s-1}}{a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}} \Phi \right. \tag{23}$$

We have to show

$$M_{\mathfrak{A}_1}(n, a) \tag{24}$$

By $\mathfrak{A}_1 \vdash$ A12 and $\mathfrak{A}_1 \vdash QUANT(\underline{n}, \underline{m}, \underline{i}), S_3(\underline{s}, \underline{n})$ it is sufficient to prove that

$$\mathfrak{A}_1 \left| \frac{\boldsymbol{a}}{a} (\boldsymbol{b}) \big[(MAX(l(\boldsymbol{b}), l(\boldsymbol{a}), \underline{i}) \wedge (\boldsymbol{k})_N \big((\neg\, \boldsymbol{k} = \underline{i} \wedge S_0(\boldsymbol{k}, l(\boldsymbol{a}))\big) \rightarrow \right. \tag{25}$$

$$\rightarrow h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}) = h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k})\big) \rightarrow M(\underline{m}, \boldsymbol{b})\big]$$

Let $b \in A$ and suppose

$$\mathfrak{A}_1 \left| \frac{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}{a, b} MAX\big(l(\boldsymbol{b}), l(\boldsymbol{a}), \underline{i}\big) \right. \tag{26}$$

and

$$\mathfrak{A}_1 \left| \frac{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}{a, b} (\boldsymbol{k})_N \big((\neg\, \boldsymbol{k} = \underline{i} \wedge S_0(\boldsymbol{k}, l(\boldsymbol{a}))\big) \rightarrow h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}) = h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k})\big) \right. \tag{27}$$

(26) implies by Lemma 15 (3)

$$l_{\mathfrak{A}_1}(b) = \max(s, i) = s\,.$$

From Lemma 16 and (27) and $\mathfrak{A}_1 \vdash S_0(\underline{k}, s)$ for $k < s$ it follows that $b =$

$= [a_0, \ldots, a_{s-1}, a'_s, \ldots, a'_i]$ for some $a'_s, \ldots, a'_i \in A$. From (23) we infer

$$\mathfrak{A} \left| \frac{v_0, \ldots, v_{s-1}, \ldots, v_i}{a_0, \ldots, a_{s-1}, \ldots, a'_i} \right. \Psi .$$

This and the induction hypothesis for Ψ imply $M_{\mathfrak{A}_1}(m, b)$ consequently we have proved (25).

(b) Secondly we suppose (24) and prove (23).

By $\mathfrak{A}_1 \vdash QUANT(\underline{n}, \underline{m}, \underline{i}), S_3(\underline{s}, \underline{n})$ and A12 we have now (25). Let a'_i be an arbitrary element of A, $a'_s, \ldots, a'_{i-1}$ be elements of A (these latter are unessential) and $b = [a_0, \ldots, a_{s-1}, a'_s, \ldots, a'_i]$. By Lemma 14 we have (26) and by Lemma 15 (1) we have (27). From (26), (27) and (25) it follows $M_{\mathfrak{A}_1}(m, b)$ which implies

$$\mathfrak{A} \left| \frac{v_0, \ldots, v_{s-1}, \ldots, v_i}{a_0, \ldots, a_{s-1}, \ldots, a'_i} \right. \Psi \tag{28}$$

by the induction hypothesis. In other words, for arbitrary $a'_i \in A$ (28) holds. But this means exactly that (23) holds.

So we have finished the proof of Lemma 17.

Now we prove (14). Let $F \in \Sigma$, $n = Nu(F)$. According to our hypothesis we have a natural number m for which $R(n, m)$ holds. By Lemma 3 this implies $\mathfrak{A}_1 \vdash RE(\underline{n}, \underline{m})$ hence by using $\mathfrak{A}_1 \vdash$A13 we obtain $M_{\mathfrak{A}_1}(n, 0)$. Consequently by Lemma 17 we have $\mathfrak{A} \vdash F$. We have thus shown (14), and sonsequently also (12).

(9) and (12) give (8), hence $\mathbf{K}^\infty \in \mathbf{PC}$.

So we have finished the proof of Theorem 1.

We give a counterexample showing that the conclusion $\mathbf{K}^\infty \in \mathbf{PC}$ cannot be improved in general to $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}$. Let $\mathbf{L}_0$ be the empty set. The systems of $\mathbf{L}_0$ can be identified with sets. The formulae of $\mathbf{L}_0$ contain only the identity symbol besides variables and the logical operations. We can construct a sentence $F_n \in \mathfrak{F}_0(\mathbf{L}_0)$ for any $n \in \omega$ such that $\mathfrak{A} \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}_0}(F_n)$ is equivalent to $\mathfrak{A} \cong n$ $(n = \{0, 1, \ldots, n-1\})$. Let H be a recursive but not primitive recursive set of natural numbers $\neq 0$. Consider $\Sigma = \{\neg F_n : n \in H\}$. Then $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L}_0)$, Σ is recursive and furthermore the set of the natural numbers n such that $n \in \mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}_0}(\Sigma)$ is identical with $\omega - H$ (the complement of H).

Let F be a formula of an arbitrary language $\mathbf{L}(\supset \mathbf{L}_0)$. It is trivial that the set of all n such that $n \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(F) \mid \mathbf{L}_0$ is primitive recursive. Hence if $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}$ held then $\omega - H$ would be primitive recursive, that is not true.

§ 3. An operation on relational systems

We suppose that the language $\mathbf{L}$ contains only predicate symbols and no function symbol.

Let $\mathfrak{A}$ be a relational system of $\mathbf{L}$, $F(x)$ a formula of $\mathbf{L}$ with the single free variable x. We define $\mathfrak{A} \parallel F(x)$ as the subsystem $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{A}$ such that $|\mathfrak{B}|$ is the set of those elements a of $|\mathfrak{A}|$ which satisfy $F(x)$ in $\mathfrak{A}$, i.e. $\mathfrak{A} \left| \frac{x}{a} \right. F(x)$.
Since we do not allow relational systems with empty domain, we consider $\mathfrak{A} \parallel F(x)$ as defined only if $\mathfrak{A} \vdash (\exists x) F(x)$.

This construction has a rather general character, as it will turn out in §§ 4 and 5 in which we apply it together with Theorem 2.

We define for a class $\mathbf{K}$ of relational systems

$$\mathbf{K} \,||\, F(x) = \{\mathfrak{A} \,||\, F(x) \colon \mathfrak{A} \in \mathbf{K}\}$$

Theorem 2(a). *If* $\mathbf{L}$ *is an arbitrary language,* $F(x) \in \mathfrak{F}(\mathbf{L})$ *with the single free variable* x, $\mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)$ *for some* $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L})$ *and* $(\exists x)\, F(x)$ *is a consequence of* Σ *then*

$$\mathbf{K} \,||\, F(x) \in \mathbf{PC}_{\Delta} \tag{1}$$

(b) *If in addition* $\mathbf{L}$ *is finite, and* Σ *is a one element set then*

$$\mathbf{K} \,||\, F(x) \in \mathbf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}} \tag{2}$$

Proof. We prove the theorem by constructing an axiom system Σ' in a language $\mathbf{L}' \supset \mathbf{L}$ such that

$$\mathbf{K} \,||\, F(x) = \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma') \,|\, \mathbf{L} \tag{3}$$

We shall see that if the hypothesis of (b) holds, then $\mathbf{L}'$ and Σ' will satisfy the further requirements of (b).

We suppose that $F(x)$ is a prime formula, say $Q(x)$. To reduce the general case to this we have to adjoin a new unary predicate symbol Q to $\mathbf{L}$ and to add the axiom $(x)\,\big(Q(x) \leftrightarrow F(x)\big)$ to Σ. Let the resulting language and axiom system be $\mathbf{L}_1$ and Σ_1 resp. Obviously we have $\mathbf{K} \,||\, F(x) = (\mathbf{M}_{\mathbf{L}_1}(\Sigma_1) \,||\, Q(x)) \,|\, \mathbf{L}$ and so we obtain (1) or (2) if we apply the same to $\mathbf{L}_1, \Sigma_1, Q(x)$.

We may assume that each formula $H \in \Sigma$ has the following prenex normal form

$$(x_1) \ldots (x_{k_1})\, (\exists y_1) \ldots (x_{k_{n-1}+1}) \ldots (x_{k_n})\, (\exists y_n)\, (x_{k_n+1}) \ldots (x_{k_{n+1}})\, \Phi \tag{4}$$

where Φ is an open formula of $\mathbf{L}$. For each $H \in \Sigma$ we introduce distinct new function symbols $f_1^H, \ldots, f_n^H$ corresponding to the variables $y_1, \ldots, y_n$ bound by existential quantifiers in H, with $\nu(f_i^H) = k_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. By adjoining every f_i^H to $\mathbf{L}$ for each $H \in \Sigma$ we obtain the enlarged language $\mathbf{L}_1$. We associate an open formula H^* of $\mathbf{L}_1$ with each $H \in \Sigma$ by putting

$$H^* = \left| \frac{y_i}{f_i(x_1, \ldots, x_{k_i})} \right. \Phi\,. \tag{4'}$$

Let T be a prime formula of $\mathbf{L}_1$. T is said to be a *free prime formula* (briefly fpr) if (i) each variable of T occurs in only one argument place of T and (ii) the argument places of T are occupied by $v_0, \ldots, v_{m-1}$ in that natural order in which these argument places follow each other from left to right in T. It is obvious how to give a rigorous inductive definition for the notion of the free prime formula. At any rate the following lemma is evident.

Lemma 18. *To each prime formula* T *of* $\mathbf{L}_1$ *there is a unique fpr* T_0 *such that we get* T *from* T_0 *by substituting a variable of* T *for each variable* v_i *of* T_0 *Moreover, this latter sustitution is uniquely determined.*

We associate a predicate symbol P^T with each fpr T with the following stipulations. The symbols P^T are different from each other for different fpr-s, and they are different from the predicate symbols of $\mathbf{L}$ with the following exception: if T is a prime formula of L, i.e. of the form $v_0 = v_1$ or $P(v_0, \ldots, v_{n-1})$ for $P \in \mathbf{L}$ then let P^T be identical with $=$ or P respectively. We put $\nu(P^T)$ to be the number of the variables in T.

Let $\mathbf{L}' = \{P^T : T \text{ is an fpr}\} - \{=\}$. Obviously we have $\mathbf{L} \subset \mathbf{L}'$.

Now we define $\overline{\Psi}$ for each open formula Ψ of $\mathbf{L}_1$ as follows. Let first Ψ be a prime formula of $\mathbf{L}_1$. By Lemma 18 Ψ arises from a unique fpr Ψ_0 by well determined substitutions for variables of Ψ_0, i.e. $\Psi = \left|\frac{v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}}{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}}\right. \Psi_0$ where $x_0, \ldots, x_{m-1}$ are variables. Let $\overline{\Psi}$ be the formula $P^{\Psi_0}(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ If Ψ is an arbitrary open formula of $\mathbf{L}_1$, then $\overline{\Psi}$ is obtained from Ψ by replacing each prime formula part Φ in Ψ by $\overline{\Phi}$.

We remark that $\overline{\Psi}$ has the same variables as Ψ and if $\Psi \in \mathfrak{F}(\mathbf{L})$ then $\overline{\Psi} = \Psi$.

Let I be the set of the following open formulae

$$I \quad \begin{cases} v_0 = v_0 \\ v_0 = v_1 \to v_1 = v_0 \\ (v_0 = v_1 \wedge v_1 = v_2) \to v_0 = v_2 \\ (v_0 = v_n \wedge v_1 = v_{n+1} \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = v_{2n-1}) \to (P(v_0, \ldots, v_{n-1}) \to P(v_n, \ldots, v_{2n-1}) \\ \qquad \text{for arbitrary } P \in L \end{cases}$$

Let $\Sigma^* = \{H^* : H \in \Sigma\} \cup I$.

Let Σ_1 be the set of all formulae $\left|\frac{x_1, \ldots, x_k}{t_1, \ldots, t_k}\right. F$ where $F \in \Sigma^*$, $x_1, \ldots, x_k$ are distinct variables, $t_1, \ldots, t_k$ are terms of $\mathbf{L}_1$. Let $\overline{\Sigma}_1 = \{\overline{\Psi} : \Psi \in \Sigma_1\}$ and $\Sigma_2 = Cl(\overline{\Sigma}_1)$.

Let t be a term of $\mathbf{L}_1$, x be a variable not occurring in t. We define the formula E_t by

$$E_t = Cl\left(\overline{Q(t)} \to (\exists x)\,(\overline{x = t})\right) \tag{5}$$

Finally we put

$$\Sigma' = \Sigma_2 \cup \{E_t : t \text{ is a term of } \mathbf{L}_1\} \cup \{(x)\, Q(x)\}$$

For $\mathbf{L}'$ and Σ' so defined we shall prove (3).

We remark that if the hypothesis of (b) holds then in virtue of the „effectiveness" of our construction we trivially have an enumeration $\mu = (P_i)_{i<\omega}$ of all predicate symbols of $\mathbf{L}'$ for which $\nu(P_i)$ is a primitive recursive function of i and $\{Nu_\mu(F) : F \in \Sigma'\}$ is a primitive recursive set of natural numbers. Thus (3) will imply (2).

I. Proof of $\mathbf{K} \,||\, Q(x) \subset \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma') \,|\, \mathbf{L}$

Let $\mathfrak{A} \in \mathbf{K} \,||\, Q(x)$. We have to show

$$\mathfrak{A} \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma') \,|\, \mathbf{L} \tag{6}$$

We have a system $\mathfrak{B} \in \mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)$ for which $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ and

$$|\,\mathfrak{A}\,| = A = \{a : a \in B = |\,\mathfrak{B}\,|,\, Q_{\mathfrak{B}}(a)\} \tag{7}$$

We define the system $\mathfrak{B}_1 \in \mathfrak{S}(\mathbf{L}_1)$. Let $|\mathfrak{B}_1| = B$, $P_{\mathfrak{B}_1} = P_{\mathfrak{B}}$ for any $P \in \mathbf{L}$. Let $H \in \Sigma$ of the form (4). Since $\mathfrak{B} \vdash H$, by Lemma 3 in § 1 we have a $\mathfrak{B}^H \in \mathfrak{S}(\mathbf{L}_1)$ for which $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^H \mid \mathbf{L}$ and $\mathfrak{B}^H \vdash Cl(H^*)$.

Let $(f_i^H)_{\mathfrak{B}_1} = (f_i^H)_{\mathfrak{B}^H}$ for $i = 1, \ldots, n$ and for each $H \in \Sigma$. So we have

(8) $$\mathfrak{B}_1 \mid \mathbf{L} = \mathfrak{B} \text{ and } \mathfrak{B}_1 \vdash Cl(H^*) \text{ for every } H \in \Sigma$$

We define the system $\mathfrak{A}'$ of $\mathbf{L}'$ by putting $|\mathfrak{A}'| = A$ and

(9) $$(P^T)_{\mathfrak{A}'}(a_0, \ldots, a_{m-1}) \sim \mathfrak{B}_1 \left| \frac{v_0, \ldots, v_{m-1}}{a_0, \ldots, a_{m-1}} \right. T$$

for any fpr T and $a_0, \ldots, a_{m-1} \in A$. If we replace T by $P(v_0, \ldots, v_{n-1})$ for $P \in \mathbf{L}$ in (8) we obtain

$$P_{\mathfrak{A}'}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \sim P_{\mathfrak{B}_1}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \sim P_{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

i.e.

(10) $$\mathfrak{A}' \mid \mathbf{L} = \mathfrak{A}$$

Now we show

(11) $$\mathfrak{A}' \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma)$$

If Φ is an arbitrary open formula of $\mathbf{L}_1$, $a_1, \ldots, a_{k-1}$ are elements of A then

(12) $$\mathfrak{A}' \left| \frac{x_0, \ldots, x_{k-1}}{a_0, \ldots, a_{k-1}} \right. \overline{\Phi} \sim \mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_0, \ldots, x_{k-1}}{a_0, \ldots, a_{k-1}} \right. \Phi .$$

That is a direct consequence of (9) and the definition of $\overline{\Phi}$.

Let $\Psi \in \Sigma_1$. We show

(13) $$\mathfrak{B}_1 \vdash Cl(\Psi)$$

Now we have $\Psi = \left| \frac{x_0, \ldots, x_{m-1}}{t_0, \ldots, t_{m-1}} \right. F$ where $F = H^*$ for some $H \in \Sigma$ or $F \in I$. In the first case (13) follows from (8), in the second one (13) follows from the trivial fact that $\mathfrak{B}_1 \vdash Cl(F)$.

Now let $E \in \Sigma_2$, i.e. $E = Cl(\overline{\Psi})$ for some $\Psi \in \Sigma_1$. It follows from (12) and (13) that $\mathfrak{A}' \vdash E$.

Secondly let $E = E_t$ of the form (5). We prove $\mathfrak{A}' \vdash E_t$. Let $x_1, \ldots, x_m$ be all the distinct variables of t and $a_1, \ldots, a_m \in A$. We have to show $\mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{a_i} \right. (\overline{Q(t)} \to (\exists x)\, \overline{x = t})$. Suppose $\mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{a_i} \right. \overline{Q(t)}$. This implies by (12) $\mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_i}{a_i} \right. Q(t)$ i.e. $Q_{\mathfrak{B}}(\tau)$ where $\tau = \mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_i}{a_i} \right. t$, consequently by (7) $\tau \in A$. But trivially $\mathfrak{B}_1 \left| \frac{x, x_1, \ldots, x_n}{\tau, a_1, \ldots, a_n} \right. x = t$ and so again by (12) we have $\mathfrak{A}' \left| \frac{x, x_1, \ldots, x_n}{\tau, a_1, \ldots, a_n} \right. \overline{x = t}$ i.e. $\mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{a_i} \right. (\exists x)\, \overline{x = t}$ and that had to be shown.

Finally we have trivially $\mathfrak{A}' \vdash (x)\, Q(x)$.

Thus we have shown (11), (10) and (11) gives (6) qu. e.d.

II. Proof of $\mathbf{K} \,||\, Q(x) \subset \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma') \,|\, \mathbf{L}$

Let

$$\mathfrak{A}' \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma') \tag{14}$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \,|\, \mathbf{L} \tag{15}$$

We have to construct a $\mathfrak{B}$ for which

$$\mathfrak{B} \in \mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma) \tag{16}$$

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \tag{17}$$

and if $|\,\mathfrak{A}\,| = A, |\,\mathfrak{B}\,| = B$

$$A = \{a : a \in B, Q_{\mathfrak{B}}(a)\} \tag{18}$$

We associate a new constant c_a with each $a \in A$. We suppose that $c_a \notin \mathbf{L}_1$ and $c_{a_1} \neq c_{a_2}$ if $a_1 \neq a_2$. Let $A_1 = \{c_a \colon a \in A\}$. We define the auxiliary language $\mathbf{L}_1^A = \mathbf{L}_1 \cup A_1$. Let B_1 be the set of all closed terms of $\mathbf{L}_1^A$, i.e. which contain no variable.

We define the pseudosystem $\mathfrak{B}_1$ of $\mathbf{L}_1$ as follows. Let $|\,\mathfrak{B}_1\,| = B_1$. Let $b_1, \ldots, b_n \in B_1$, let $c_{a_0}, \ldots, c_{a_{m-1}}$ be all the different elements of A_1 occuring in some of the b_i-s, $t_i = \left| \dfrac{c_{a_0}, \ldots, c_{a_{m-1}}}{v_0, \ldots, v_{m-1}} \right. b_i$ for $i = 1, \ldots, n$. t_i is a term of $\mathbf{L}_1$.

Now we define

$$b_1 =_{\mathfrak{B}_1} b_2 \sim \mathfrak{A}' \left| \frac{v_0, \ldots, v_{m-1}}{a_0, \ldots, a_{m-1}} \right. \overline{t_1 = t_2} \tag{19}$$

$$P_{\mathfrak{B}_1}(b_1, \ldots, b_n) \sim \mathfrak{A}' \left| \frac{v_0, \ldots, v_{m-1}}{a_0, \ldots, a_{m-1}} \right. \overline{P(t_1, \ldots, t_n)} \tag{20}$$

for $P \in \mathbf{L}$ and

$$f_{\mathfrak{B}_1}(b_1, \ldots, b_n) = f(b_1, \ldots, b_n) \tag{21}$$

for $f \in \mathbf{L}_1$.

Using similar notations (19), (20), (21) imply that

$$\mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_1, \ldots, x_n}{b_1, \ldots, b_n} \right. \Phi \sim \mathfrak{A}' \left| \frac{v_0, \ldots, v_{m-1}}{a_0, \ldots, a_{m-1}} \right. \left(\overline{\left| \frac{x_1, \ldots, x_n}{t_1, \ldots, t_n} \right. \Phi} \right) \tag{22}$$

for any open formula Φ of $\mathbf{L}_1$.

Now we put $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \,|\, \mathbf{L}$, consequently $\mathfrak{B}_2$ is a pseudosystem of $\mathbf{L}$. We prove that $\mathfrak{B}_2$ is a pseudomodel of Σ.

Let $H \in \Sigma$. By Lemma 3 it is sufficient to show

$$\mathfrak{B}_1 \vdash Cl(H^*) \tag{23}$$

for proving $\mathfrak{B}_2 \vdash H$. We have to show that if $b_1, \ldots, b_{k_{n+1}}$ are arbitrary elements of B_1 then

$$\mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_1, \ldots, x_{k_{n+1}}}{b_1, \ldots, b_{k_{n+1}}} \right. H^* \tag{24}$$

(we suppose H to be of the form (4)).

Let $c_{a_0}, \dots, c_{a_{m-1}}$ denote all the different elements of A_1 occurring in some of $b_1, \dots, b_{k_{n+1}}$, let us replace each c_{a_j} by v_j in each b_i and let $t_1, \dots, \dots, t_{k_{n+1}}$ be the resulting terms of L_1. Let Ψ be $\left|\dfrac{x_1, \dots, x_{k_{n+1}}}{t_1, \dots, t_{k_{n+1}}}\right. H^*$. For proving (24) it is sufficient to show by (22) that $\mathfrak{A}' \left|\dfrac{v_0, \dots, v_{m-1}}{a_0, \dots, v_{m-1}}\right. \overline{\Psi}$. But that is true since $\Psi \in \Sigma_1$ and consequently $Cl(\overline{\Psi}) \in \Sigma'$ and so we have (14). So we have proved (24) and (23).

Moreover we assert that $=_{\mathfrak{B}_2}$ is a congruence relation on $\mathfrak{B}_2$. We have to show that $\mathfrak{B}_1 \vdash Cl(\Phi)$ for $\Phi \in I$ where I was defined above (equality axioms). This follows similarly as before from the fact that if $\Phi \in I, t_1, \dots, t_n$ are terms of $\mathbf{L}_1$ then $Cl\left(\overline{\left|\dfrac{x_1, \dots, x_n}{t_1, \dots t_n}\right. \Phi}\right) \in \Sigma'$.

Let $\mathfrak{B}$ be the factor system $\mathfrak{B}_2/=_{\mathfrak{B}_2}$. By Lemma 2 and from that what we have just proved it follows (16).

Let A_2 denote the set of the equivalence classes $c_a/=_{\mathfrak{B}_2} = [a]$ $(a \in A)$. We assert that the subsystem $\mathfrak{B}[A_2]$ is isomorphic to $\mathfrak{A}$ by the natural mapping $[a] \to a$. Indeed we have $[a_0] = [a_1] \sim c_{a_0} =_{\mathfrak{B}_1} c_{a_1} \sim \mathfrak{A}' \left|\dfrac{v_0, v_1}{a_0, a_1}\right. \overline{v_0 = v_1} \sim$ $\sim \mathfrak{A}' \left|\dfrac{v_0, v_1}{a_0, a_1}\right. v_0 = v_1 \sim a_0 = a_1$, hence the given mapping is one-to-one and moreover

$$P_{\mathfrak{B}[A_2]}([a_0], \dots, [a_{n-1}]) \sim P_{\mathfrak{B}}([a_0], \dots, [a_{n-1}]) \sim P_{\mathfrak{B}_1}(c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}}) \sim$$

$$\sim \mathfrak{A}' \left|\frac{v_0, \dots, v_{n-1}}{a_0, \dots, a_{n-1}}\right. \overline{P(v_0, \dots, v_{n-1})} \sim \mathfrak{A}' \left|\frac{v_0, \dots, v_{n-1}}{a_0, \dots, a_{n-1}}\right. P(v_0, \dots, v_{n-1}) \sim$$

$$\sim P_{\mathfrak{A}'}(a_0, \dots, a_{n-1}) \sim P_{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \text{ as desired.}$$

We can identify $\mathfrak{B}[A']$ with $\mathfrak{A}$, hence we can consider $\mathfrak{A}$ as a subsystem of $\mathfrak{B}$.

To complete the proof we have only to show that $A = X$ if X denotes $\{b\colon Q_{\mathfrak{B}}(b)\}$. Being $\mathfrak{A}$ a model of $(x)\, Q(x)$ and at the same time a subsystem of $\mathfrak{B}$ we have $A \subset X$. To prove $A \supset X$ let $b \in X$. Then $b = t(c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}})/=_{\mathfrak{B}_1}$ where $t(v_0, \dots, v_{n-1})$ is a term of $\mathbf{L}_1$. It follows from (12) and $Q_{\mathfrak{B}_1}(x)$ that

$$\mathfrak{A}' \left|\frac{v_0, \dots, v_{n-1}}{a_0, \dots, a_{n-1}}\right. \overline{Q(t(v_0, \dots, v_{n-1}))} \tag{25}$$

But $E_t \in \Sigma'$ (see (5)), consequently $\mathfrak{A}' \vdash E_t$ hence (25) implies

$$\mathfrak{A}' \left|\frac{v_0, \dots, v_{n-1}}{a_0, \dots, a_{n-1}}\right. (\exists x)\, \overline{x = t(v_0, \dots, v_{n-1})}\,.$$

Let $a \in A$ for which

$$\mathfrak{A}' \left|\frac{v_0, \dots, v_{n-1}, x}{a_0, \dots, a_{n-1}, a}\right. \overline{x = t(v_0, \dots, v_{n-1})}\,.$$

By definition this is equivalent to $c_a =_{\mathfrak{B}_1} t(c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}})$ i.e. $b = [c_a] = a \in A$. Thus we have proved (16), (17), (18) qu. e.d.

Corollary 3. *If* $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}$ *and* $(\exists x)\, F(x)$ *holds in all systems of* $\mathbf{K}$ *then we have*

$$(\mathbf{K} \,\|\, F(x))^{\infty} \in \mathbf{PC}$$

Proof. By Theorem 1 and Theorem 2 (b).

Now we want to give an example of a class $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}$ and a formula $F(x)$ such that $\mathbf{K} \,\|\, F(x) \notin \mathbf{EC}_\Delta$. Our example is a slight modification of the one given by LYNDON [3] for showing that $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}$ does not imply $\mathbf{H}(\mathbf{K}) \in \in \mathbf{EC}_\Delta$. Let the language $\mathbf{L}$ consist of the predicate symbols P, Q, R with $v(P) = v(Q) = 1, v(R) = 2$. Let H be the conjunction of the following formulae

$$(\boldsymbol{x})\,(Q(\boldsymbol{x}) \to \neg\, P(\boldsymbol{x}))$$

$$(\exists \boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y})\,(P(\boldsymbol{x}) \wedge (P(\boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})) \tag{26}$$

$$(\boldsymbol{x})\,(P(\boldsymbol{x}) \to R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})) \tag{27}$$

$$(\boldsymbol{x})\,(P(\boldsymbol{x}) \to (\boldsymbol{y})\,(R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to (\exists \boldsymbol{z})\,(R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \wedge R(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \wedge Q(\boldsymbol{z})))) . \tag{28}$$

Let $\mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(H)$.

We assert that $\mathbf{K} \,\|\, Q(x)$ consists of the relational systems $\mathfrak{A}$ for which

(*) $\begin{cases} \mathfrak{A} \vdash (x)\, Q(x) \\ \mathfrak{A} \vdash (x) \neg\, P(x) \\ \text{and there exists an infinite sequence } z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \text{ such that} \\ R_{\mathfrak{B}}\,(z_{n-1}, z_n) \text{ for each } n = 2, 3, \ldots \end{cases}$

Let first $\mathfrak{B} \in \mathbf{K}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \,\|\, Q(x)$. Then there exists exactly one element x_0 of $|\mathfrak{B}| = B$ for which $P_{\mathfrak{B}}(x_0)$ is true. Let us replace x_0 for $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ in (28). Then (27) and (28) say that there exists a $z_1 \in A = |\mathfrak{A}|$ such that

$$R_{\mathfrak{B}}(x_0, z_1) \text{ and } Q_{\mathfrak{B}}(z_1) \tag{29}$$

hence $z_1 \in A$.

Taking x_0 for $\boldsymbol{x}$, z_1 for $\boldsymbol{y}$ in (28) we see by (29) that there exist a $z_2 \in A$ with $R_{\mathfrak{B}}(x_0, z_2)$, $R_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2)$.

Continuing in this manner we get the sequence $z_1, z_2, \ldots$ such that $R_{\mathfrak{A}}(z_n, z_{n+1})$ and $R_{\mathfrak{B}}(x_0, z_n)$ hold for each $n \geq 1$.

Secondly let $\mathfrak{A}$ satisfy (*). We choose a new element $x_0 \notin A = |\mathfrak{A}|$ and define $|\mathfrak{B}| = A \cup \{x_0\}$. We define $P_{\mathfrak{B}}(x)$ to be true in $\mathfrak{B}$ if and only if $x = x_0$; $R_{\mathfrak{B}}(x, y)$ if and only if $x = y = x_0$, or $x = x_0$ and $y = z_n$, or $x = z_{n-1}$ and $y = z_n$ for some n; $Q_{\mathfrak{B}}(x)$ if and only if $x \in A$. It can easily be checked that $\mathfrak{B} \vdash H$ and $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \,\|\, Q(x)$.

Now we show that $\mathbf{K} \,\|\, Q(x) \notin \mathbf{EC}_\Delta$. It is sufficient to exhibit a system $\mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{A}$ does not satisfy (*) but an ultrapower $\mathfrak{A}_D^I$ of $\mathfrak{A}$ does satisfy (*).

Let $|\mathfrak{A}| = A$ be the set of the distinct elements z_{ik} for natural numbers i, k with $i, k \geq 1$, $i \leq k$ and let P, Q, R be defined in $\mathfrak{A}$ as follows.

$Q_{\mathfrak{A}}(x)$ is identically true

$P_{\mathfrak{A}}(x)$ is identically false

$R_{\mathfrak{A}}(z_{ik}, z_{jl})$ is true if and only if $k = l$ and $j = i + 1$.

It can be seen that $\mathfrak{A}$ does not satisfy (*).

Let I be the set of the positive integers, D be a non principal ultrafilter on I. We can write the elements of A_D^I as $(x_1, x_2, \ldots)/D$. Let us put $z_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_{ii}, z_{ii+1}, \ldots)/D$. Then $R_{\mathfrak{A}}(z_{i-1}, z_i)$ is always true, i.e. $\mathfrak{A}_I^D$ satisfies (*) que.d.

§ 4. Homomorphisms

Let $\mathbf{F}$ be an arbitrary set of formulae of the language $\mathbf{L}$, let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ be systems of $\mathbf{L}$, φ be a mapping of $|\mathfrak{B}| = B$ onto $|\mathfrak{A}| = A$.

Definition. *φ is said to be an F-homomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$ if for every $F \in \mathbf{F}$ and arbitrary elements $b_1, \ldots, b_n$ of B*

$$\mathfrak{B}\left|\frac{x_1, \ldots, x_n}{b_1, \ldots, b_n} F \quad \textit{implies} \quad \mathfrak{A}\right|\frac{x_1, \ldots, x_n}{\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)} F .$$

This notion is due to KEISLER [2]. KEISLER requires $\mathbf{F}$ to have some specia properties (to be a Generalized Atomic set of formulae) but we do not need such restrictions. Moreover we can and shall suppose without any loss of generality that $v_0 \equiv v_1$ is an element of $\mathbf{F}$, because for any mapping φ of B $b_0 = b_1$ implies $\varphi(b_0) = \varphi(b_1)$.

In the described case $\mathfrak{A}$ is said to be an $\mathbf{F}$-homomorphic image of $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_{\mathbf{F}}(\mathfrak{B})$). We put $\mathbf{H}_{\mathbf{F}}(\mathbf{K}) = \bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathbf{K}} \mathbf{H}_{\mathbf{F}}(\mathfrak{B})$.

The notion of (simple) homomorphism is a special case of that of $\mathbf{F}$-homomorphism. In order to see this we have to take $\mathbf{F}$ to be the set of all formulae of the form $v_0 \equiv v_1$, $P(v_0, \ldots, v_{n-1})$ and $f(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n$ for $P, f \in \mathbf{L}$.

Corollary 4. *If $\mathbf{K} \subset \mathfrak{S}(\mathbf{L})$, $\mathbf{F} \subset \mathfrak{F}(\mathbf{L})$ and $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}_\Delta$ then $\mathbf{H}_{\mathbf{F}}(\mathbf{K}) \in \mathbf{PC}_\Delta$.*

Corollary 5. *If $\mathbf{L}$ is a finite language. $\mathbf{F}$ is an arbitrary recursively enumerable set of formulae of $\mathbf{L}$, $\mathbf{K} \subset \mathfrak{S}(\mathbf{L})$ and $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}$ then $(\mathbf{H}_{\mathbf{F}}(\mathbf{K}))^\infty \in \mathbf{PC}$.*

Corollary 4′. *If $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}_\Delta$ or $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}_\Delta$ then $\mathbf{H}(\mathbf{K}) \in \mathbf{PC}_\Delta$.*

Corollary 5′. *If $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}$ or $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}$ then $(\mathbf{H}(\mathbf{K}))^\infty \in \mathbf{PC}$.*

Proofs. Corollary 4′ can be derived from Corollary 4 as follows. We consider the class $\mathbf{K}' \subset \mathfrak{S}(\mathbf{L}')$ for some $\mathbf{L}' \supset \mathbf{L}$ such that $\mathbf{K}' \in \mathbf{EC}_\Delta$ and $\mathbf{K} = \mathbf{K}' \mid \mathbf{L}$. Let $\mathbf{F}$ be the set of the formulae $v_0 \equiv v_1$, $P(v_0, \ldots, v_{n-1})$, $f(v_0, \ldots, v_{n-1}) \equiv v_n$ for any $P, f \in L$. Then trivially $\mathbf{H}(\mathbf{K}) = \mathbf{H}_{\mathbf{F}}(\mathbf{K}') \mid \mathbf{L} \in \mathbf{PC}_\Delta$.

Corollary 5′ can be proved similarly by the help of Corollary 5.

Now we are going to prove Corollaries 4 and 5 at the same time.

By assumption we have $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L})$ such that $\mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)$. In case of Corollary 5 Σ consists of a single formula. Let us associate a new predicate symbol P^+ with each $P \in \mathbf{L}$ and a new function symbol f^+ with each $f \in \mathbf{L}$. We take $\nu(P^+) = \nu(P)$, $\nu(f^+) = \nu(f)$. Besides we take the new unary function symbol h and unary predicate symbol A. Let $\mathbf{L}'$ be the language which we get by adjoining every P^+, f^+ and A and h to $\mathbf{L}$.

Let us define F^+ for an arbitrary formula F of $\mathbf{L}$ as the formula resulting from F by substituting P^+ and f^+ for any $P, f \in \mathbf{L}$ in F. F^A denotes the relativized of F to A (see Lemma 4 in § 1.)

Now we define the set Σ' as the collection of the following sentences:

(1) $$(x)\, A(h(x))$$

(2) $$(x)\, (A(x) \rightarrow (\exists y)\, (h(y) = x)$$

(3) $$(x_1) \ldots (x_n)\, [F^+(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow F^A(h(x_1), \ldots, h(x_n))]$$

for each $F(x_1, \ldots, x_n) \in F$

$$G^+$$

for each $G \in \Sigma$

(4) $$(x_1) \ldots (x_n)\, ((A(x_1) \wedge \ldots \wedge A(x_n)) \rightarrow A(f(x_1, \ldots, x_n)))$$

for each $f \in L$

Now we shall use the notations introduced before Lemma 5. We assert that

(5) $$\overline{\overline{\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K})}} = (\overline{\overline{\mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma')}} \,\|\, A(x)) \,|\, \overline{\mathbf{L}}$$

I. First let $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K})$ i.e. $\mathfrak{B} \in \mathbf{K}$ and φ be an $\mathbf{F}$-homomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$. We define the system $\mathfrak{B}'$ of $\mathbf{L}'$ by as follows. Let $|\,\mathfrak{B}'\,| = |\,\mathfrak{B}\,| = B$, $(P^+)_{\mathfrak{B}'} = P_\mathfrak{B}$, $(f^+)_{\mathfrak{B}'} = f_\mathfrak{B}$ for any $P, f \in \mathbf{L}$ and $h_{\mathfrak{B}'} = \varphi$. Let further A' be a subset of B of the same power as $|\,\mathfrak{A}\,|$ and we define the relations and functions $P_{\mathfrak{B}'}$, $f_{\mathfrak{B}'}$ such that if $a_1, \ldots, a_n \in A'$ then $f_{\mathfrak{B}'}(a_1, \ldots, a_n) \in A'$ and the subsystem $(\mathfrak{B}' \,|\, \mathbf{L})\, [A']$ is isomorphic to $\mathfrak{A}$. Finally we require $A_{\mathfrak{B}'}(a) \sim a \in A'$ for any $a \in B$. It can be attained by an "exchange" procedure that $(\mathfrak{B}' | \mathbf{L})\, [A']$ is identical with $\mathfrak{A}$. Now it is trivial to verify that $\mathfrak{B}' \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma')$ and $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = (\overline{\overline{\mathfrak{B}'}} \,\|\, A(x))\, \overline{\mathbf{L}}$.

II. Secondly let $\mathfrak{B}' \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma')$, $\mathfrak{A}_1 = (\overline{\overline{\mathfrak{B}'}} \,\|\, A(x))\, \overline{\mathbf{L}}$. Since the formulae of the form of (4) are in Σ', $\mathfrak{A}_1 = \overline{\overline{\mathfrak{A}}} \in \mathfrak{S}(\overline{\mathbf{L}})$ for a unique $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$. We define $\mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$ such that $|\,\mathfrak{B}\,| = |\,\mathfrak{B}'\,|$, $P_\mathfrak{B} = (P^+)_{\mathfrak{B}'}$, $f_\mathfrak{B} = (f^+)_{\mathfrak{B}'}$ for $P, f \in \mathbf{L}$. Then $h_{\mathfrak{B}'}$ will be an $\mathbf{F}$-homomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B} \in \mathbf{K}$. Thus we have shown (5).

By Lemma 5 (§ 1) (5) implies $\overline{\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K})} = (\mathbf{M}_{\overline{\mathbf{L}'}}(\overline{\Sigma'}) \,\|\, A(x)) \,|\, \overline{\mathbf{L}}$.

Let us now consider the case of Corollary 4. Using Theorem 2 (a) we get $\overline{\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K})} \in \mathbf{PC}_\Delta$ and by Lemma 6 of § 1 $\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K}) \in \mathbf{PC}_\Delta$ qu. e.d.

In case of Corollary 5 $\mathbf{L}'$ is a finite language and $\overline{\Sigma'}$ is obviously a recursively enumerable set of formulae (it is irrelevant which enumeration of the symbols of Σ' is chosen). Consequently by Theorem 1 $(\mathbf{M}_{\overline{\mathbf{L}'}}(\overline{\Sigma'}))^\infty \in \mathbf{PC}$ i.e. $(\mathbf{M}_{\overline{\mathbf{L}'}}(\overline{\Sigma'}))^\infty = \mathbf{M}_{\mathbf{L}''}(F) \,|\, \overline{\mathbf{L}'}$ where F is a formula of a language $\mathbf{L}'' \supset \overline{\mathbf{L}'}$. Further we have $(\mathbf{M}_{\mathbf{L}''}(F) \,\|\, A(x))^\infty \in \mathbf{PC}$ by Corollary 3., hence

$$(\overline{\overline{\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K}))^\infty}} = (\overline{\overline{\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K})}})^\infty = (\mathbf{M}_{\overline{\mathbf{L}'}}(\overline{\Sigma'}) \,\|\, A(x)) \,|\, \overline{\overline{\mathbf{L}}})^\infty =$$

$$= ((\mathbf{M}_{\mathbf{L}''}(F) \,\|\, A(x)) \,|\, \overline{\overline{\mathbf{L}}})^\infty = (\mathbf{M}_{\mathbf{L}''}(F) \,\|\, A(x))^\infty \,|\, \overline{\overline{\mathbf{L}}} \in \mathbf{PC}$$

and by Lemma 6 $(\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K}))^\infty \in \mathbf{PC}$ qu. e.d.

The contents of the next Theorems 6 and 7 are roughly speaking the following. For any class $\mathbf{K}$, $\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K})$ is closed under $\mathbf{F}$-homomorphisms. If moreover $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}_\Delta$ then we know from Corollary 4 that $\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K})$ can be "axiomatized" in an enlarged language. These two facts make the question natural whether there exists an axiomatization of $\mathbf{H_F}(\mathbf{K})$ in an enlarged language whose every formula is in some normalform such that every set of sentences in this normalform is "preserved" under **F**-homomorphism in a natural sense explained below (Theorem 6).

We answer this question positively by introducing a type of sentence (see $\mathbf{H_F}$-sentence below), which type has the desired property (Theorem 6) and by proving that the axiomatization in question can be given using only $\mathbf{H_F}$-sentences (Theorem 7). Thus Theorem 7 is analogous in some sense to LYNDON's theorem or to it's generalization given by KEISLER [2].

Let us consider a formula Φ of the form $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} F_{ij}$ where $F_{ij} \in \mathbf{F}$. We consider a set $\mathbf{L}_1$ of function symbols not occurring in $\mathbf{L}$. Let us consider the set T° of the terms having the form x or $f(x_1, \ldots, x_n)$ where $f \in \mathbf{L}_1$ and x, $x_1, \ldots, x_n$ are variables. We replace the variables of Φ by terms of T°[4] so we obtain a formula Ψ in the language $\mathbf{L}' = \mathbf{L} \cup \mathbf{L}_1$. We call a formula $Cl(\Psi)$ for a Ψ so obtained an *$\mathbf{H_F}$-sentence over* $\mathbf{L}$.

Theorem 6. *Every set Θ of $\mathbf{H_F}$-sentences over $\mathbf{L}$ is „preserved" under $\mathbf{F}$-homomorphism, i.e. if $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_F}(\mathfrak{B})$ and $\mathfrak{B} \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Theta) \mid \mathbf{L}$ then $\mathfrak{A} \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Theta) \mid \mathbf{L}$.*

Proof. Let $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \mid \mathbf{L}$, $\mathfrak{B}' \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Theta)$, φ be an **F**-homomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$. We have to construct $\mathfrak{A}'$ such that

$$\mathfrak{A}' \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Theta) \tag{7}$$

and

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \mid \mathbf{L}\,. \tag{8}$$

Let $|\mathfrak{A}| = A$, $|\mathfrak{B}| = B$. We choose an element $\bar{a} \in B$ to each element $a \in A$ such that $\varphi(\bar{a}) = a$ (by the axiom of choice) and define $f_{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(f_{\mathfrak{B}'}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n))$. Thus $\mathfrak{A}'$ is defined, considering also (8). From this definition it follows at once that

$$\varphi\left(\mathfrak{B}' \left| \frac{x_1, \ldots, x_m}{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m} t \right.\right) = \mathfrak{A}' \left| \frac{x_1, \ldots, x_m}{a_1, \ldots, a_m} t \right. \tag{9}$$

for an arbitrary term t of T°.

Let $G \in \Theta$. For the formula G we keep the notations used in the definition of $\mathbf{H_F}$-formula.

To show (7) we must prove, that

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{x_1, \ldots, x_m}{a_1, \ldots, a_m} \Psi \right. \tag{10}$$

for any elements $a_1, \ldots, a_m$ of A. By hypothesis we have

$$\mathfrak{B}' \left| \frac{x_1, \ldots, x_m}{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m} \Psi \right. \tag{11}$$

[4] Before the replacing we must possibly change the bound variables of Φ to avoid collisions. We shall consider that to have been peformed in all cases if necessary without any mentioning.

Ψ has the form $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n_i} F_{ij}^*$ where F_{ij}^* arises from F_{ij} by substituting some terms of T° for the free variables of F_{ij}.

From (11) we infer that for some i_0, $1 \leq i_0 \leq n$

(12) $$\mathfrak{B}' \left| \frac{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m}}{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}} \right. F_{i_0 j}^*$$

for every j $(j = 1, \ldots, m_{i_0})$.

Let us choose an index j. By hypothesis

$$F_{i_0 j}^* = \left| \frac{y_1, \ldots, y_k}{t_1, \ldots, t_k} \right. F_{i_0 j}$$

where $t_1, \ldots, t_k \in T^\circ$.

Let

(13) $$\tau_l = \mathfrak{B} \left| \frac{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m}}{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}} \right. t_l$$

(12) can be written as

$$\mathfrak{B} \left| \frac{y_1, \ldots, y_k}{\tau_1, \ldots, \tau_k} \right. F_{i_0 j}.$$

Since φ is an $\mathbf{F}$-homomorphism and $F_{i_0 j} \in \mathbf{F}$, we have

$$\mathfrak{A} \left| \frac{y_1, \ldots, y_k}{\varphi(\tau_1), \ldots, \varphi(\tau_k)} \right. F_{i_0 j}.$$

This and (9) and (13) imply

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{x_1, \ldots, x_m}{a_1, \ldots, a_m} \right. F_{i_0 j}^*.$$

Applying this for $j = 1, \ldots, m_{i_0}$ we obtain

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{x_1, \ldots, x_m}{a_1, \ldots, a_m} \right. \bigwedge_{j=1}^{m_{i_0}} F_{i_0 j}^*$$

which implies (10) qu. e.d.

Theorem 7. *If* $\mathbf{K} = \mathbf{M}_{\mathbf{L}}(\Sigma)$ *for some* $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L})$, *and* $\mathbf{F} \subset \mathfrak{F}(\mathbf{L})$ *then there is an axiom system* Σ', *in a language* $\mathbf{L}'$, *consisting of* $\mathbf{H}_{\mathbf{F}}$*-sentences over* $\mathbf{L}$ *such that*

(14) $$\mathbf{H}_{\mathbf{F}}(\mathbf{K}) = \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma') \,|\, \mathbf{L}$$

Proof. We assume of each formula H of Σ to be in prenex normal form as in (4) in § 3 and we introduce the Skolem functions (function symbols) $f_1^H, \ldots, f_n^H$ and the formula H^* as in § 3. Further we bring each formula $\neg F$ for $F \in \mathbf{F}$, into prenex normal form, i.e.

(15) $$\neg F \sim (x_1) \ldots (x_{k_1}) (\exists y_1) \ldots (\exists y_n) \ldots (x_{k_{n+1}}) \Gamma.$$

Let $z_1, \ldots, z_l$ be all the different free variables of F. We introduce the function symbols $g_1^F, \ldots, g_n^F$ each g_i^F having $k_i + l$ variables and we define F^{**} as the result of substituting $g_i^F(x_1, \ldots, x_{k_{n+1}}; z_1, \ldots, z_l)$ for y_i for each i in Γ.

Adjoining every f_i^H, g_i^F ($H \in \Sigma$, $F \in \mathbf{F}$) to $\mathbf{L}$ we obtain the language $\mathbf{L}_1$. A term t of $\mathbf{L}_1$ is a *free term* if (i) each variable occurs in t at only one argument place and (ii) the variables $v_0, \ldots, v_{m-1}$ occupy the argument places of t in their natural order from left to right. We state the following trivial lemma.

Lemma 19. *To each term t of $\mathbf{L}_1$ there is a unique free term t_0 such that t comes from t_0 by substituting certain variables for the variables of t_0. The latter substitution is also uniquely determined.*

Now we associate a new function symbol h^t with each free term t of $\mathbf{L}_1$, such that $\nu(h^t)$ is the number of the variables in t, h^t is different from each function symbol of $\mathbf{L}_1$ and for different free terms t_1, t_2 h^{t_1}, h^{t_2} are different. We define $\bar{t}$ for an arbitrary term t of $\mathbf{L}_1$. Let t_0 be as in Lemma 8, and let $t = \left| \frac{v_0, \ldots, v_{m-1}}{x_0, \ldots, x_{m-1}} \right. t_0$. Then let $\bar{t} = h^{t_0}(x_0, \ldots, x_{m-1})$. We define the language $\mathbf{L}'$ as the extension of $\mathbf{L}$ by the symbols h^t. Before defining the desired axiom system Σ' we must give some preliminary definitions.

We define the set I similarly as in § 3 except we now must take the function symbols of $\mathbf{L}$ into consideration too.

Let I be the set of the following formulae (the equality axioms for the language $\mathbf{L}$)

$$v_0 = v_0$$

$$v_0 = v_1 \to v_1 = v_0$$

$$(v_0 = v_1 \wedge v_1 = v_2) \to v_0 = v_2$$

$$(v_0 = v_n \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = v_{2n-1}) \to \big(P(v_0, \ldots, v_{n-1}) \longleftrightarrow P(v_n, \ldots, v_{2n-1})\big)$$

$$(v_0 = v_n \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = v_{2n-1}) \to f(v_0, \ldots, v_{n-1}) = f(v_n, \ldots, v_{2n-1})$$

for every $P, f \in \mathbf{L}$.

Let $\Sigma^* = \{H^* : H \in \Sigma\} \cup I$. If E is an open formula of $\mathbf{L}_1$ then let $\operatorname{Subst}(E)$ denote the set of all formulae $\left| \frac{x_1, \ldots, x_n}{t_1, \ldots t_n} \right. E$ where $t_1, \ldots, t_n$ are terms of $\mathbf{L}_1$. If X is a set of formulae we put $\operatorname{Subst}(X) = \bigcup_{E \in X} \operatorname{Subst}(E)$. Let $\Theta = \operatorname{Subst}(\Sigma^*)$.

Let Z denote the set of all ordered pairs (F, G) such that $F \in \mathbf{F}$ and $G \in \operatorname{Subst}(F^{**})$.

Now we define for each $(F, G) \in Z$ a formula $\Psi_{F,G} \in \mathfrak{F}(\mathbf{L}')$. By hypothesis

$$G = \left| \frac{x_1, \ldots, x_{k_{n+1}}\,;\; z_1, \ldots, z_l}{t_1, \ldots, t_{k_{n+1}}\,;\; u_1, \ldots, u_l} \right. F^{**} \tag{16}$$

for some terms $t_1, \ldots, t_{k_{n+1}}$; $u_1, \ldots, u_l$ of $\mathbf{L}_1$. (We suppose $\neg F$ to be of the form (15)). We put

$$\Psi_{F,G} = \left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_l} \right. F \tag{17}$$

where $\bar{u}_i$ was defined above.

Let $Pr(\mathbf{L}_1)$ denote the set of all prime formulae of $\mathbf{L}_1$, let U be an arbitrary subset of $Pr(\mathbf{L}_1)$. We consider functions $\varepsilon \in 2^U$ to fix valuations of the prime formulae $T \in U$, i.e. we associate the truth value $\varepsilon(T)$ with each $T \in U$. Let E be an arbitrary open formula of $\mathbf{L}_1$, and let us suppose that each prime formula occurring in E as a part is an element of U. Then the valuation ε associates with E a fix truth value if we consider the propositional connectives as operations on truth values in the well known way. This truth value will be denoted by $\tilde{\varepsilon}(E)$; for $T \in U$ $\tilde{\varepsilon}(T)$ is the same as $\varepsilon(T)$. Note that $\tilde{\varepsilon}(E)$ is defined only if E satisfies our condition. Let X_U be the subset of 2^U consisting of those functions ε for which $\tilde{\varepsilon}(E) = 1$ for every $E \in \Theta$ provided that $\tilde{\varepsilon}(E)$ is defined.

Now let U, V be arbitrary finite subsets of $Pr(\mathbf{L}_1)$ and Z respectively. We define the formula $\Phi_{U,V} \in \mathfrak{F}(\mathbf{L}')$ by

$$\Phi_{U,V} = \bigvee_{\varepsilon \in X_U} \bigwedge_{\substack{(F,G) \in V \\ \tilde{\varepsilon}(G)=0}} \Psi'_{F,G} \tag{18}$$

Finally we define Σ' as the set of all formulae $Cl(\Phi_{U,V})$ for all U, V as before.

I. Proof of $\mathbf{H_F}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma') \mid \mathbf{L}$.

Let $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}(\mathbf{L})$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{K}$, φ be a homomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$. We must construct a system $\mathfrak{A}'$ such that

$$\mathfrak{A}' \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma') \tag{19}$$

and

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \mid \mathbf{L}$$

From Lemma 3 we can easily infer that there exists a system $\mathfrak{B}_1$ of $\mathbf{L}_1$ such that we have

$$\mathfrak{B}_1 \mid \mathbf{L} = \mathfrak{B} \tag{20}$$

$$\mathfrak{B}_1 \vdash Cl(H^*) \tag{21}$$

$$\mathfrak{B}_1 \vdash Cl(F^{**} \vee F) \tag{22}$$

for any $H \in \Sigma$, $F \in \mathbf{F}$.

We choose an element $\bar{\bar{a}}$ from $\mid \mathfrak{B} \mid = B$ for every element a of $\mid \mathfrak{A} \mid = A$ such that $a = \varphi(\bar{\bar{a}})$ (by using the axiom of choice).

Let $\mathfrak{A}'$ be the uniquely determined system of $\mathbf{L}'$ such that $\mathfrak{A}' \mid \mathbf{L} = \mathfrak{A}$ and

$$(h^t)_{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_m) = \varphi\left(\mathfrak{B}_1 \left| \frac{v_1, \ldots, v_m}{\bar{\bar{a}}_1, \ldots, \bar{\bar{a}}_m} t \right.\right)$$

for any free term t of $\mathbf{L}_1$ and elements $a_1, \ldots, a_m$ of A. From this definition we infer easily that

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{w_i}{a_i} \bar{u} \right. = \varphi\left(\mathfrak{B}_1 \left| \frac{w_i}{\bar{\bar{a}}_i} u \right.\right) \tag{23}$$

for arbitrary term u of $\mathbf{L}_1$.

In order to prove (19) let U, V as before (18) and $x_1, \ldots, x_m$ be all the different variables occurring in $\Phi_{U,V}$ or in some prime formula T of U. We have to show

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{a_i} \Phi_{U,V} \right. \tag{24}$$

for arbitrary elements $a_1, \ldots, a_m$ of A.

Let W be the set of all formulae E of Θ, each prime formula component of which is an element of U. (In other words, for which $\tilde{\varepsilon}(E)$ is defined for $\varepsilon \in 2^U$.) Let $E \in W$. Then $E \in \mathrm{Subst}(H^*)$ for some $H \in \Sigma$ or $E \in \mathrm{Subst}(I)$. In the first case we infer from (21) that

$$\mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_i}{a_i} \right. E . \tag{25}$$

In the second case (25) holds trivially.

We define $\varepsilon_0 \in 2^U$ by the following condition

$$\varepsilon_0(T) = 1 \sim \mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_i}{a_i} \right. T .$$

By (25) $\tilde{\varepsilon}_0(E) = 1$ for each $E \in W$ consequently

$$\varepsilon_0 \in X_U . \tag{26}$$

Now let $(F, G) \in V$, G be of the form (16). By (22) we have

$$\mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_i}{a_i} \right. \left(G \vee \left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{u_1, \ldots, u_l} \right. F \right) . \tag{27}$$

Let us observe the definition of $\Phi_{U,V}$ under (18).

To prove (24) let us suppose $\tilde{\varepsilon}_0(G) = 0$. Then by (27)

$$\mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_i}{a_i} \right. \left(\left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{u_1, \ldots, u_l} \right. F \right) . \tag{28}$$

Let $b_k = \mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_i}{a_i} \right. u_k$ for $k = 1, \ldots, l$. Now (28) can be written in the form $\mathfrak{B}_1 \left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{b_1, \ldots, a_l} \right. F$ or which is the same (see (20))

$$\mathfrak{B} \left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{b_1, \ldots, b_l} \right. F .$$

Using that φ is an $\mathbf{F}$-homomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$ we infer $\mathfrak{A} \left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_l)} \right. F$ or

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_l)} \right. F . \tag{29}$$

Using (23) we have

$$\varphi(b_k) = \mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{a_i} \right. \overline{u_k} . \tag{30}$$

Observing (17) we infer from (29) and (30)

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{a_i} \right. \Psi_{FG} . \tag{31}$$

To sum up we have proved that $\tilde{\varepsilon}_0(G) = 0$ implies (31), consequently we have

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{\overline{\overline{a_i}}} \bigwedge_{\substack{(F,G)\in V \\ \tilde{\varepsilon}_0(G)=0}} \Psi_{F,G} \right.$$

and taking (26) into account so we have shown (24) qu. e.d.

II. Proof of $\mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathbf{K}) \supset \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma') \mid \mathbf{L}$.

Let $\mathfrak{A}' \in \mathbf{M}_{\mathbf{L}'}(\Sigma')$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \mid \mathbf{L}$. We must construct a system $\mathfrak{B}$ with

$$\mathfrak{B} \in \mathbf{K} \tag{32}$$

$$\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{F}(\mathfrak{B}) \tag{33}$$

We define new different constants c_a to every element $a \in A$, let A_1 denote the set of all c_a-s. Adjoining the elements of A_1 to $\mathbf{L}_1$ we obtain the language $\mathbf{L}_1^A = \mathbf{L}_1 \cup A_1$. We define B_1 the set of those terms of $\mathbf{L}_1^A$ which contain no variable.

Let $Pr(\mathbf{L}_1^A)$ be the set of the prime formulae of $\mathbf{L}_1^A$ which contain no variable.

Let Subst$'$ X $(X \subset \mathfrak{F}(\mathbf{L}_1))$ denote the set of all formulae $\left| \frac{x_1, \ldots, x_m}{t_1', \ldots, t_m'} E \right.$ for $E \in X$, $t_1', \ldots, t_m'$ being terms of $\mathbf{L}_1^A$ containing no variables and $x_1, \ldots, x_m$ being all the free variables of E. Each element of Subst$'$ X is a closed formula of $\mathbf{L}_1^A$. Let Z' be the set of all ordered pairs (F, G') where $F \in \mathbf{F}$ and $G' \in$ $\in$ Subst$'$ F^{**} and let $\Theta' =$ Subst$'$ Θ.

The fact that $\mathfrak{A}'$ is a model of Σ' can be formulated as follows. (Let us observe our definition of Σ'.)

Lemma 20. *For any finite sets U', V' of $Pr(\mathbf{L}_1^A)$ and Z' respectively there exists a function $\varepsilon \in 2^{U'}$ such that*

(i) $\tilde{\varepsilon}(E') = 1$ *for each* $E' \in \Theta'$ *if* $\tilde{\varepsilon}(E')$ *is defined,*

(ii) *if* $(F, G') \in V'$ *and* $\tilde{\varepsilon}(G') = 0$ *then*

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{a_i} \left(\left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{\overline{\overline{u_1, \ldots, u_l}}} F \right. \right) \right.$$

where we use the following conventions: $c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}$ are all the distinct constants of A_1 occurring in some formula T' of U', $x_1, \ldots, x_m$ are different variables, $G = \left| \frac{c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}}{x_1, \ldots, x_m} G' \right.$ and $\neg F$ and G have the forms (15) and (16) respectively. Further we use the notation $\tilde{\varepsilon}(E')$ analogously as before.

Let us apply Lemma 1 of § 1 with the following distribution of the roles. Let the set A be $Pr(\mathbf{L}_1^A) \cup Z'$ and call a function ε on the finite set $U' \cup V'$ $(U' \subset Pr(\mathbf{L}_1^A), V' \subset Z')$ a "good" function (i.e. $\varepsilon \in \beta(U' \cup V')$) if ε satisfies (i) and (ii) of Lemma 20. Let $c(x) = 2 = \{0, 1\}$ if $x \in Pr(\mathbf{L}_1^A)$ and $c(x) = \{0\}$ if $x \in Z'$ (We remark that $c(x)$ for $x \in Z'$ is irrelevant). One can easily see that Lemma 20 says exactly that the hypotheses of Lemma 1 hold. So we can state by Lemma 1

Lemma 21. *There exists a function* $\delta \in 2^{Pr(L_1{}^A)}$ *such that*

(i) *for each* $E' \in \Theta'$ *we have* $\tilde{\delta}(E') = 1$

(ii) *if* $F \in \mathbf{F}$, $G' \in \mathrm{Subst}'\, F^{**}$ *and* $\tilde{\delta}(G') = 0$ *then*

$$\mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{a_i} \right(\left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{u_1, \ldots, u_l} F \right)$$

where $c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}$ are all the different constants of A_1 occurring in $G', x_1, \ldots, x_m$ are different variables, $G = \left| \frac{c_{a_i}}{x_i} G' \right.$ and $\neg F$ and G have the forms (15) and (16) resp.

Let us define a pseudosystem $\mathfrak{B}_1$, of the language $\mathbf{L}_1$ by the following conditions.

$$|\mathfrak{B}_1| = B_1$$

$$b_1 \equiv_{\mathfrak{B}_1} b_2 \sim \delta(b_1 \equiv b_2) = 1$$

$$P_{\mathfrak{B}_1}(b_1, \ldots, b_n) \sim \delta(P(b_1, \ldots, b_n)) = 1$$

$$f_{\mathfrak{B}_1}(b_1, \ldots, b_n) = f(b_1, \ldots, b_n)$$

for arbitrary $P, f \in \mathbf{L}_1$ and $b_1, \ldots, b_n \in B_1$. We infer easily from this definition, that

$$\mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_i}{b_i} \Phi \sim \tilde{\delta} \left(\left| \frac{x_i}{b_i} \Phi \right) = 1 \right. \right. \tag{34}$$

for any open formula Φ of L_1.

If we take specially $\Phi \in \Sigma^*$, then $\left| \frac{x_i}{b_i} \Phi \in \Theta' \right.$ and so by Lemma 21 (i) and (34) we have

$$\mathfrak{B}_1 \left| \frac{x_i}{b_i} \Phi \right.$$

for arbitrary b_i-s from B_1, i.e.

$$\mathfrak{B}_1 \vdash Cl(\Phi) \tag{35}$$

We define $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 | \mathbf{L}$. By (35) and Lemma 3 (taking $\Phi = H^*$ for $H \in \Sigma$) we see that $\mathfrak{B}_2$ satisfies all sentences of Σ. If we apply (35) to $\Phi \in I$ we can infer that $\equiv_{\mathfrak{B}_2}$ is a congruence relation on $\mathfrak{B}_2$. Let $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2 / \equiv_{\mathfrak{B}_2}$. Now we have by Lemma 2 (32) as desired.

We define the mapping ψ: $B_1 \to A$ by

$$\psi(b) = \mathfrak{A}' \left| \frac{x_i}{a_i} \right(\left| \frac{c_{a_i}}{x_i} b \right) \tag{36}$$

where $c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}$ are all the different constants of A_1 occurring in b.

ψ is onto since $\psi(c_a) = a$.

We prove that

$$\mathfrak{B}_1 \left| \frac{z_1, \ldots, z_l}{b_1, \ldots, b_l} F \right. \tag{37}$$

implies

$$(38)\qquad \mathfrak{A}\left|\frac{z_1,\ldots,z_l}{\psi(b_1).\ \ldots,\psi(b_l)}\right. F$$

for arbitrary $F\in\mathbf{F}$, $z_1,\ldots,z_l$ being all the distinct free variables of F and $b_1,\ldots,b_l$ elements of B_1.

Let us assume (37). Let $c_{a_1},\ldots,c_{a_n}$ be all the different constants of A_1 occurring in some of $b_1,\ldots,b_l$; $x_1,\ldots,x_n$ different variables, $u_k=\left|\frac{c_{a_i}}{x_i}\right. b_k$ for $k=1,\ldots,l$. By (36), (38) is equivalent to

$$(39)\qquad \mathfrak{A}\left|\frac{x_i}{a_i}\right.\left(\left|\frac{z_1,\ldots,z_l}{\overline{u_1},\ldots,\overline{u_l}}\right. F\right).$$

Suppose that (39) is not true.

Let G be an arbitrary formula of Subst (F^{**}) as under (16) with the stipulation that the terms $u_1,\ldots,u_l$ are the same which we have just defined. By Lemma 21 (ii) we infer from our supposition that $\tilde{\delta}(G')=1$ where $G'=\left|\frac{x_1,\ldots,x_m}{c_{a_1},\ldots,c_{a_m}}\right. G$ and $x_{n+1},\ldots,x_m$ are the additional distinct variables of G and $a_{n+1},\ldots,a_m$ are arbitrary elements of G. This means exactly that

$$\delta\left(\left|\frac{x_1,\ldots,x_{k_{n+1}};z_1,\ldots,z_l}{b_1',\ldots,b_{k_{n+1}}';b_1,\ldots,b_l}\right. F^{**}\right)=1$$

or by (34)

$$\mathfrak{B}_1\left|\frac{x_1,\ldots,x_{k_{n+1}};z_1,\ldots,z_l}{b_1',\ldots,b_{k_{n+1}}';b_1,\ldots,b_l}\right. F^{**}$$

for arbitrary elements $b_1',\ldots,b_{k_{n+1}}$ of B_1. This can be expressed by

$$\mathfrak{B}_1\left|\frac{z_1,\ldots,z_l}{b_1,\ldots,b_l}\right. Cl(F^{**})$$

and by Lemma 3 we have $\mathfrak{B}_2\left|\frac{z_1,\ldots,z_l}{b_1,\ldots,b_l}\right. \neg F$ what contradicts our hypothesis (37). So we have proved that (37) implies (38) indeed.

We need also that $b_1 \equiv_{\mathfrak{B}_1} b_2$ implies $\psi(b_1)=\psi(b_2)$. But that is contained in our last assertion because we have supposed that $v_0=v_1$ is a formula of $\mathbf{F}$.

Now let φ be the mapping $\varphi\colon |\mathfrak{B}|=B\to A$ defined by $\varphi(b/\equiv_{\mathfrak{B}_2})=$ $=\psi(b)$ $(b\in B_1)$. From that we have proved above it follows that the latter equality defines φ uniquely.

Finally we see that φ is an $\mathbf{F}$-homomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$, consequently we have proved also (33) qu.e.d.

By I, II we have shown (14). It is trivial from the definition of Σ' that each formula of Σ' is an $\mathbf{H}_{\mathbf{F}}$-sentence over $\mathbf{L}$. Qu. e.d.

§ 5. Endomorphisms

If $\mathfrak{A}$ is a homomorphic image of $\mathfrak{B}$ by the homomorphism φ and at the same time $\mathfrak{A}$ is a subsystem of $\mathfrak{B}$ then we say that $\mathfrak{A}$ is an *endomorphic image of $\mathfrak{B}$ and φ is an endomorphism of $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$*. We denote the set of all endomorphic images of $\mathfrak{B}$ by $\mathbf{End}(\mathfrak{B})$, i.e. $\mathbf{End}(\mathfrak{B}) = \mathbf{H}(\mathfrak{B}) \cap \mathbf{S}(\mathfrak{B})$ and we put $\mathbf{End}(\mathbf{K}) = \bigcup_{\mathfrak{B}\in\mathbf{K}} \mathbf{End}(\mathfrak{B})$.

Corollary 8. *If* $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}_\Delta$ *or* $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}_\Delta$ *then* $\mathbf{End}(\mathbf{K}) \in \mathbf{PC}_\Delta$.

Corollary 9. *If* $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}$ *or* $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}$ *then* $(\mathbf{End}(\mathbf{K}))^\infty \in \mathbf{PC}$.

The proof of these statements is similar to the proof of Corollaries 4, 5.

Now we want to prove a theorem, which has the same relation to the endomorphisms as LYNDON's theorem to homomorphisms. In the proof we use LYNDON's theorem as stated in § 1 and a simple "ascending chain" construction, i.e. we get the desired relational system as the union of some sequence of systems, each of which is elementary subsystem of the next in the sequence. That is the principal tool in the proof of many model theoretic theorems. We can described this part of the proof most easily by using ultrapowers and limit ultrapowers and we shall apply some notations and well known results stated in § 1.

Theorem 10. (i) *Let* $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L})$, $\mathbf{K} = \mathbf{M}_\mathbf{L}(\Sigma)$ *Let* Σ' *be the set of the sentences* $F_1 \vee F_2$ *such that* $F_1 \vee F_2 \in \mathbf{Cn}(\Sigma)$, F_1 *is a positive sentence and* F_2 *is a universal one. Then we have*

$$\mathbf{Th}(\mathbf{End}(\mathbf{K})) = \mathbf{Cn}(\Sigma')$$

(ii) *Moreover, if* $\mathfrak{A} \in \mathbf{M}_\mathbf{L}(\Sigma')$ *then there exists a* $\mathfrak{A}'$ *such that* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$ *and* $\mathfrak{A}' \in \mathbf{End}(\mathbf{K})$.[5]

Proof. To prove $\mathbf{Cn}(\Sigma') \subset \mathbf{Th}(\mathbf{End}(\mathbf{K}))$ it is sufficient to show $\Sigma' \subset \subset \mathbf{Th}(\mathbf{End}(\mathbf{K}))$. To this end let F_1 be a positive sentence, F_2 a universal one, $F_1 \vee F_2 \in \mathbf{Cn}(\Sigma)$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{K}$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{End}(\mathfrak{B})$. We have to show $\mathfrak{A} \vdash F_1 \vee F_2$. We have $\mathfrak{B} \vdash F_1 \vee F_2$, hence $\mathfrak{B} \vdash F_1$ or $\mathfrak{B} \vdash F_2$.

In the first case $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}(\mathfrak{B})$ implies $\mathfrak{B} \vdash F_2$ in the second one $\mathfrak{A} \in \mathbf{S}(\mathfrak{B})$ implies $\mathfrak{B} \vdash F_2$, consequently $\mathfrak{A} \vdash F_2 \vee F_2$ at any rate.

Instead of $\mathbf{Th}(\mathbf{End}(\mathbf{K})) \subset \mathbf{Cn}(\Sigma')$ we prove the stronger assertion (ii). Let us suppose

$$\mathfrak{A} \in \mathbf{M}_\mathbf{L}(\Sigma') \tag{1}$$

We may and shall assume $\mathbf{Cn}(\Sigma) = \Sigma$. Let Θ be the set of sentences $\neg G$ for which $\neg G \in \mathbf{Th}(\mathfrak{A})$ and G is universal. Let $\Sigma_1 = \Sigma \cup \Theta$. We assert, that the positive consequence of Σ_1 are satisfied by $\mathfrak{A}$, i.e.

$$\mathbf{Pos}(\Sigma_1) \subset \mathbf{Th}(\mathfrak{A}). \tag{2}$$

To prove that, let $F_1 \in \mathbf{Pos}(\Sigma_1)$ and suppose on the contrary that $F_1 \notin \mathbf{Th}(\mathfrak{A})$.

The Compactness Theorem (Lemma 11) implies the existence of finite subsets V_1, V_2 of Σ and Θ respectively such that F_1 is a consequence of $V_1 \cup V_2$. Let the conjunction of the formulae of V_1 and V_2 be G_1 and G_2 resp. G_2 is equi-

[5] This stronger statement is a consequence of (i) and Corollary 8 by a familiar application of the Compactness Theorem; it is derivable also from the fact that $\mathbf{End}(\mathbf{K})$ is closed under ultraproduct and limit ultrapowers and from (i).

valent to a formula $\neg F_2$ where F_2 is universal. We have $G_1 \wedge \neg F_2 \vdash F_1$ i.e. $G_1 \vdash F_1 \vee F_2$, hence by $G_1 \in \Sigma$ we have $F_1 \vee F_2 \in \Sigma$ and thus $F_1 \vee F_2 \in \Sigma'$. We have $\neg F_2 \in \mathbf{Th}(\mathfrak{A})$, $F_1 \notin \mathbf{Th}(\mathfrak{A})$, consequently $F_1 \vee F_2 \notin \mathbf{Th}(\mathfrak{A})$ and that contradicts our hypothesis (1). Thus we have proved (2).

By LYNDON's theorem (Lemma 7) we infer from (2) that there exist systems $\mathfrak{A}_0^1$, $\mathfrak{B}_0$ and a homomorphism φ_0 of $\mathfrak{B}_0$ onto $\mathfrak{A}_0^1$ such that $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_0^1$, $\mathfrak{B}_0 \in \mathbf{M_L}(\Sigma_1)$. We assert that every universal formula G satisfied by $\mathfrak{B}_0$ is satisfied by $\mathfrak{A}_0^1$ too. In the contrary case $\neg G$ would be satisfied by $\mathfrak{A}$ hence $\neg G \in \Theta$ and so by $\mathfrak{B}_0 \in \mathbf{M_L}(\Theta)$ $\mathfrak{B}_0 \vdash \neg G$ what is contradiction. Now by Lemma 8 there exists a non empty set I and an ultrafilter D on I so that $\mathfrak{A}_0^1$ is isomorphic to a subsystem $\mathfrak{A}_0$ of $\mathfrak{B}_0^{[I/D]}$. Let us define by induction

$$\mathfrak{A}_{n+1}^1 = (\mathfrak{A}_n^1)^{[I/D]} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{A}_n^{[I/D]} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}_n^{[I/D]} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n^{[I/D]} \qquad (n = 0, 1, \ldots$$

and we put

$$\mathfrak{A}'' = \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{A}_n^1$$

$$\mathfrak{A}' = \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{A}_n$$

$$\mathfrak{B}' = \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{B}_n$$

$$\varphi' = \bigcup_{n<\omega} \varphi_n$$

Then by Lemma 10 φ' is a homomorphism of $\mathfrak{B}'$ onto $\mathfrak{A}''$, by Lemma 9 $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}''$ and $\mathfrak{B}' \in \mathbf{M_L}(\Sigma)$. $\mathfrak{A}'$ is trivially a subsystem of $\mathfrak{B}'$ and $\mathfrak{A}'$ is isomorphic to $\mathfrak{A}''$. Consequently there exists a system $\mathfrak{B}''$ isomorphic to $\mathfrak{B}'$ for which $\mathfrak{A}'' \in \mathbf{H}(\mathfrak{B}'')$ and the same time $\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{B}''$. Thus we have $\mathfrak{A}'' \in \mathbf{End}(\mathfrak{B}'')$ and $\mathfrak{B}'' \in \mathbf{M_L}(\Sigma)$ and $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}''$ qu. e.d.

Corollary 11. *If F is a sentence which is preserved under endomorphism (that is $\mathfrak{B} \vdash F$ and $\mathfrak{A} \in \mathbf{End}(\mathfrak{B})$ imply $\mathfrak{A} \vdash F$), then F is equivalent to a sentence*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} F_1^i \vee F_2^i$$

where F_1^i is positive and F_2^i is universal for each $i = 1, \ldots, n$. The proof proceeds in a well known way by Theorem 10.

We remark that the notion of endomorphism can be generalized analogously as we did with the notion of homomorphism by introducing the **F**-homomorphism. The analogon of Theorem 10 for the generalized case can be proved in a similar way, using results of KEISLER [2].

(Received December 6, 1963)

REFERENCES

[1] Frayne, T.—Morel, A.—Scott, D.: "Reduced direct products". *Fundamenta Mathematicae* **51** (1962) 195—228.
[2] Keisler, H. J.: "Theory of models with generalized atomic formulas". *Journal of Symbolic Logic* **25** (1960) 1—26.
[3] Keisler, H. J.: "Limit ultrapowers." *Transactions of the Amer. Math. Soc.* **107** (1963) 382—408.
[4] Kleene, S. C.: *Introduction to Matamathematics.* North Holland Publishing Co. Amsterdam, 1952.
[5] Kleene, S. C.: "Two papers on the predicate calculus". *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* No. **10** (1952) Second paper: "Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols".
[6] Lyndon, R. C.: "Properties preserved under homomorphism." *Pacific Journal of Mathematics* **9** (1959) 143—154.
[7] Tarski, A.: "Contributions to the theory of models." Parts I and II *Indagationes Mathematicae* **16** (1954) 572—588.

О КЛАССАХ $\mathbf{PC}_\Delta$ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ

M. MAKKAI

Резюме

Содержание теоремы 1 статьи: бесконечные системы отношений класса $\mathbf{PC}_\Delta$ над конечным языком, где этот класс удовлетворяет определенным (очевидным) «конструктивным» условиям, образуют также класс $\mathbf{PC}$. Далее определяется операция, определяющая для системы отношений $\mathfrak{A}$ и формулы $F(x)$ содержащей единственного свободного переменного, систему отношений $\mathfrak{A} \| F(x)$, являющейся частью от $\mathfrak{A}$ и основное множество которой состоит точно из тех элементов $|\mathfrak{A}|$, которые удовлетворяют формуле $F(x)$ на $\mathfrak{A}$. Доказывается, что системы отношений $\mathfrak{A} \| F(x)$, полученные для систем отношений $\mathfrak{A}$ класса $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}_\Delta$ и для фиксированной формулы $F(x)$, образуют класс $\mathbf{PC}_\Delta$ (при условии, что $(\exists x)\, F(x)$ справедливо в $\mathbf{K}$) (Теорема 2*a*). Далее, если $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}$, тогда бесконечные системы отношений только, что определенного класса образуют класс $\mathbf{PC}$ (следствие 3). В качестве применения доказывается, что если $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}_\Delta$, тогда гомоморфные образы системы $\mathbf{K}$ образуют класс $\mathbf{PC}_\Delta$ (следствие 4), кроме того если $\mathbf{K} \in \mathbf{PC}$, то бесконечные системы этого класса $\mathbf{PC}_\Delta$ образуют класс $\mathbf{PC}$ (Следствие 5). Согласно одному варианту следствии 4′ $\mathbf{H_F}(\mathbf{K})$ получается некоторым специальным образом в качестве класса $\mathbf{PC}_\Delta$ если $\mathbf{K} \in \mathbf{EC}_\Delta$ (Теорема 7). ($\mathbf{H_F}(\mathbf{K})$ — класс $\mathbf{F}$ — гомоморфных образов систем из $\mathbf{K}$, см. например [2]). Наконец, относительно эндоморфизмов доказывается аналог теоремы Lyndon-а [6] с подобными следствиями (Теорема 10, следствие 11).

ON A COMBINATORY DETECTION PROBLEM I

by

BERNT LINDSTRÖM[1]

1. Introduction

The present investigation was inspired by the work of H. S. SHAPIRO and S. SÖDERBERG [4] on a weighing problem:

"Counterfeit coins weigh 9 grams and genuine coins weigh 10 grams. Given a scale that weighs all real numbers exactly, what is the minimum number of weighings required to extract all the counterfeits from a sample of n coins"?.

The schemes for finding the counterfeits are of two kinds; (1) either one determines in advance which coins are to be weighed together in each weighing or (2) the choice of coins for a weighing is made to depend on the results of all previous weighings. I shall only consider schemes of the first kind. Then the problem can be given a formulation in terms of sets.

Detection Problem. Let S be a given set of $|S| = n$ elements. A family $\mathcal{F}$ of subsets $T_1, T_2, \ldots, T_m$ of S is a *detecting family* for S if each subset M of S is uniquely determined by the m numbers $|M \cap T_i|$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Then the problem is to find $f(n) = \min m$ is the class of all detecting families for S.

It is easy to prove that $f(4) = 3$ and $f(5) = 4$, but for larger n the determination of $f(n)$ is difficult. Therefore one must in the first instance search for good estimates.

Since there are at most $(n + 1)^m$ combinations of values for the numbers $|M \cap T_i|$, $(i = 1, \ldots, m)$ and different combinations correspond to the 2^n different subsets of S, we find that $2^n \leq (n + 1)^m$ and

$$f(n) \geq \frac{n \log 2}{\log (n + 1)}. \tag{1.1}$$

The main achievement of H. S. SHAPIRO and S. SÖDERBERG was the proof of

$$f(n) = O\left(\frac{n}{\log n}\right). \tag{1.2}$$

P. ERDŐS and A. RÉNYI have given a proof [1] of the inequality

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{f(n) \log n}{n} \geq \log 4. \tag{1.3}$$

[1] Stockholm.

This inequality has also been proved by B. GORDON, L. MOSER and myself (see [1] Remark). Although my proof is not the shortest it may have some interest as an application of information theory.

But my main result is

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)\log n}{n} \leq \log 4\,, \tag{1.4}$$

thus confirming a conjecture in [1] that the limit exists.

I am grateful to Professor H. S. Shapiro for stimulating discussions during his stay in Stockholm. I also express my thanks to Prof. O. Frostman, who suggested many simplifications in my proofs.

2.

The following two inequalities are easy consequences of the definition.

$$f(n) \leq f(n+1)\,, \qquad n = 1,2\,,\ldots \tag{2.1}$$

$$f(n_1+n_2) \leq f(n_1) + f(n_2)\,, \qquad n_1, n_2 = 1,2\,,\ldots\,. \tag{2.2}$$

In order to prove (2.1) we note that if $T_1, \ldots, T_m$ is a detecting family for S and T is any subset of S then $T \cap T_1, \ldots, T \cap T_m$ is a detecting family for $T \cap S$. Take $|S| = n+1$, $|T| = n$, $m = f(n+1)$ and (2.1) follows.

Now, let S_1 and S_2 be two disjoint sets and $\mathcal{F}_i$: $T_{i_1}, \ldots, T_{im_i}$ a detecting family for S_i $(i = 1, 2)$. Then $\mathcal{F}$: $T_{11}, \ldots, T_{1m}, T_{21}, \ldots, T_{2m_2}$ is a detecting family for $S_1 \cup S_2$. With $|S_i| = n_i$, $m_i = f(n_i)$, $(i = 1, 2)$ we get (2.2).

It is suitable to use vectors representing sets, and matrices representing families of sets. Define $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. A subset T of S_n can be represented by an n-dimensional column vector x with „1" in the i-th position if $i \in T$ and „0" if $i \notin T$. A family $\mathcal{F}$: $T_1, \ldots, T_m$ of subsets in S_n can be represented by an $m \times n$ matrix $A = (a_{ij})$ with $a_{ij} = 1$ *if* $j \in T_i$ and $a_{ij} = 0$ if $j \notin T_i$. With this mode of representing sets we find that Ax is an m-dimensional column vector with $|T \cap T_i|$ in its i-th position $(i = 1, \ldots, m)$. If $\mathcal{F}$ is detecting family for S_n we say that the corresponding matrix A is a *detecting matrix*.

Suppose A is a matrix, all of whose entries are 0 or 1, which has the property that $Ax = Ay$ implies $x = y$ for x, y columnvectors with entries 0 or 1. Then A evidently is a detecting matrix.

For convenience we introduce vectors ξ with entries from the set $\{-1, 0, 1\}$. Then the above statement can be expressed in the form:

A is a detecting matrix if $A\xi = 0$ implies $\xi = 0$.

Example. To the family $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ of subsets of S_4 corresponds the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

which is easily proved to be a detecting matrix. ([4] p. 1069).

3.

In this section we prove the following result

Theorem 1. $$f(k\,2^{k-1}) \leqq 2^k - 1\,, \qquad k = 2,3\,, \ldots .$$

In order to prove this theorem we shall prove the existence of a $(2^k - 1) \times \times k2^{k-1}$ detecting matrix A_k for every integer $k \geqq 2$. The matrix A_k will be of the form

$$A_k = B_k \,|\, C_k^{L_1} \,|\, C_k^{L_2} \,|\, \ldots \,|\, C_k^{L_t},$$

where B_k, $C_k^{L_1}$ etc. are certain matrices to be defined later, and the bars indicate that they must be put together side by side. Before we define them we shall prove three lemmas.

From now on, the set $S_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ and its subsets will only be used as indices for numbers and matrices. Suppose that a number a_M is given for every subset $M \subset S_k$. For any $N \subset S_k$ and $i \in N$ we put $N^- = N - \{i\}$ and get

$$\sum_{M \subset N} a_M = \sum_{M \subset N^-} (a_M + a_{M \cup (i)})\,, \tag{3.1}$$

where summations are taken over all subsets, the null set $\emptyset$ included.

In the following three lemmas the numbers a_i, b_i, a_M, b_M take only the values 0 or 1. The number of elements in a set $N \subset S_k$ is denoted by $|N|$.

Lemma 1. Choose numbers $a_1, a_2, \ldots, a_k$. *Put* $a_\emptyset = 0$ *and define* a_M *for every other subset* $M \subset S_k$ *by the aid of the congruence*

$$a_M \equiv \sum_{i \in M} a_i \pmod 2 \tag{3.2}$$

The for every $N \subset S_k$

$$\sum_{M \subset N} a_M = 0 \quad \text{or} \quad 2^{|N|-1}\,. \tag{3.3}$$

Lemma 2. Choose numbers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *(not all* 0*) and* $b_1, b_2, \ldots, b_k$ *(not all* 0*). Put* $a_\emptyset = b_\emptyset = 0$ *and define* a_M *and* b_M *as above by the aid of* (3.2). *Then*

$$\begin{aligned} \sum_{M \subset S_k} a_M b_M &= 2^{k-1} \quad \text{if} \quad a_i = b_i \quad \text{for} \quad i = 1,2\,, \ldots, k \\ &= 2^{k-2} \quad \text{if} \quad a_i \neq b_i \quad \text{for some } i\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Lemma 3. *Let* L *be any subset of* S_k. *Choose a number* a_M *for every non-void* $M \subset L$. *Put* $a_\emptyset = 0$ *and define* a_M *for every* $M \not\subset L$ *by the aid of the congruence*

$$a_M \equiv a_{M \cap L} + |M - M \cap L| \pmod 2\,. \tag{3.5}$$

Then for every $N \subset S_k$ *for which* $N \not\subset L$

$$\sum_{M \subset N} a_M = 2^{|N|-1}\,. \tag{3.6}$$

Proof of lemma 1. Either $a_i = 0$ for every $i \in N$, or $a_i = 1$ for at least one $i \in N$. In the former case $a_M = 0$ for $M \subset N$ and the sum in (3.3) is 0.

In the latter case we put $N^- = N - \{i\}$ and find by (3.2) that if $M \subset N^-$ then $a_{M\cup\{i\}} \equiv a_M + 1 \pmod 2$ and $a_M + a_{M\cup\{i\}} = 1$. Now (3.3) follows by (3.1).

Proof of lemma 2. If $a_i = b_i$ for $i = 1, 2, \ldots, k$ then $a_M = b_M$ and $a_M b_M = a_M$ for $M \subset S_k$. In this case (3.4) follows by (3.3) since at least one $a_M \neq 0$. Now suppose $a_i \neq b_i$ for some i. Then either $a_i = 0$, $b_i = 1$ (a) or $a_i = 1$, $b_i = 0$ (b). We see that if $M \subset N^-$ then

$$a_M b_M + a_{M\cup\{i\}} b_{M\cup\{i\}} = a_M \text{ (a)} \quad \text{or} \quad b_M \text{ (b)}.$$

By the aid of (3.1) and lemma 1 we now get (3.4) in the 2nd instance.

Proof of lemma 3. First we observe that (3.5) is valid for every $M \subset S_k$. Since $N \not\subset L$ there is an $i \in N$ which $i \notin L$. For $M \subset N^-$ we now find by (3.5)

$$a_{M\cup\{i\}} \equiv a_{M\cap L} + |M \cup \{i\} - M \cap L| \equiv a_M + 1 \qquad \pmod 2.$$

Thus $a_M + a_{M\cup\{i\}} = 1$ and (3.6) follows by (3.1).

Structure of $\mathbf{B}_k$. Let $M_1, M_2, \ldots, M_r$ ($r = 2^k - 1$) be enumeration of the nonvoid subsets of S_k. There are $(2^k - 1)$ different combinations of values for the numbers $a_1, \ldots, a_k$ in lemma 1 if at least one $a_i = 1$. For each such combination we define a_M by (3.2) and then arrange them (excepting $a_\emptyset$) in a column in the order determined by $M_1, M_2, \ldots, M_r$. These columns make a square matrix B_k of order $2^k - 1$.

Now we define an r-dimensional rowvector D_k^N for each non-void $N \subset S_k$. D_k^N shall have „1" in the i-th position if $M_i \subset N$ and „0" if $M_i \not\subset N$. By (3.3) we find that

$$D_k^N B_k \equiv (0, \ldots, 0) \qquad \pmod{2^{|N|-1}} \tag{3.7}$$

According to lemma 2 is $B_k^* B_k$ an $r \times r$ matrix with 2^{k-1} in the main-diagonal and 2^{k-2} in all other places („*" denotes transposition). By an easy calculation we find the determinant

$$\det(B_k^* B_k) = (\det B_k)^2 = 2^{2+(k-2)2^k}. \tag{3.8}$$

Structure of $\mathbf{C}_k^L$. Suppose $L \subset S_k$ with $|L| \geqq 2$. For each $\nu = 0, 1, \ldots, (|L| - 2)$ we can find numbers a_M (0 or 1) for $M \subset L$ such that $a_\emptyset = 0$ and

$$\sum_{M \subset L} a_M = 2^\nu.$$

By the aid of (3.5) we then define a_M for $M \subset S_k$. The a_M with $M \neq \emptyset$ are arranged in a column in the order determined by $M_1, M_2, \ldots, M_r$. For each ν we get a column and these colums form the matrix C_k^L when they are put in the order of increasing ν.

We find by lemma 3 and the definition of C_k^L that

$$\begin{aligned} D_k^N C_k^L &= (2^{|N|-1}, \ldots, 2^{|N|-1}) \quad \text{if } N \not\subset L \\ &= (2^0, 2^1, \ldots, 2^{|N|-2}) \quad \text{if } N = L. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Proof of Theorem 1. Let $L_1, L_2, \ldots, L_t$ ($t = 2^k - k - 1$) be an enumeration of the subsets $L \subset S_k$ for which $|L| \geqq 2$. Form the matrix

$$A_k = B_k \,|\, C_k^{L_1} \,|\, C_k^{L_2} \,|\, \ldots \,|\, C_k^{L_t}.$$

We shall prove that A_k is a detecting matrix, i.e. that $A_k\,\xi = 0$ implies $\xi = 0$. Let ξ_0 be an r-dimensional column-vector and ξ_{L_i} $(i = 1, 2, \dots, t)$ be $(|L_i| - 1)$ dimensional column-vectors with their entries from $\{-1, 0, 1\}$. Put

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_{L_1} \\ \vdots \\ \xi_{L_t} \end{pmatrix}.$$

Then $A_k\xi = 0$ is equivalent to

$$B_k\,\xi_0 + \sum_{2 \leq |L| \leq k} C_k^L\,\xi_L = 0\,. \tag{3.10}$$

We assert that if (3.10) holds then $\xi = 0$. If $\xi_L = 0$ for $|L| \geqq 2$ then $\xi_0 = 0$. This follows since B_k is non-singular by (3.8). Now suppose $\xi_N \neq 0$ for some N, $|N| \geqq 2$, and $\xi_L = 0$ for $|L| > |N|$. Multiply (3.10) from the left by D_k^N. Then we find using (3.7) and (3.9)

$$(2^0, 2^1, \dots, {}^{|N|-2})\,\xi_N \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2^{|N|-1})\,.$$

But evidently

$$-(2^{|N|-1} - 1) \leqq (2^0, 2^1, \dots, 2^{|N|-2})\,\xi_N \leqq 2^{|N|-1} - 1$$

and so

$$(2^0, 2^1, \dots, 2^{|N|-2})\,\xi_N = 0\,.$$

We conclude that $\xi_N = 0$. This follows from the uniqueness of the binary representation of non-negative integers. We have arrived at a contradiction which proves that $\xi_L = 0$ for $|L| \geqq 2$ and so that $\xi = 0$.

Now Theorem 1 follows if we observe that A_k is an $m \times n$ matrix, where $m = 2^k - 1$ and

$$n = 2^k - 1 + \sum_{i=2}^{k} (i-1)\binom{k}{i} = k\,2^{k-1}\,.$$

Example.

$$\begin{array}{cccccc} L_i: & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & \{1,2,3\} & M_j: \end{array}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix}
1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1\\
0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0\\
1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \{1\}\\ \{2\}\\ \{3\}\\ \{1,2\}\\ \{1,3\}\\ \{2,3\}\\ \{1,2,3\} \end{matrix}$$

4.

Now we shall prove the main result in this paper

Theorem 2. $$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{f(n)\log n}{n} \leq \log 4\,.$$

When this theorem is combined with the result (1.3) we obtain the

Corollary. $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)\log n}{n} = \log 4\,.$$

Proof of Theorem 2. Suppose $n \geqq 4$ and define k by $k2^{k-1} \leqq n < (k+1)2^k$. By repeted divisions we define non-negative integers $a_k, \ldots, a_1$ such that

$$
\begin{array}{lll}
 & n = k\,2^{k-1}\,a_k + r_k\,; & 0 \leqq r_k < k\,2^{k-1} \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(4.1) & r_\nu = (\nu-1)\,2^{\nu-2}\,a_{\nu-1} + r_{\nu-1}\,; & 0 \leqq r_{\nu-1} < (\nu-1)\,2^{\nu-2} \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
 & r_3 = 4\,a_2 + a_1 & 0 \leqq a_1 < 4\,.
\end{array}
$$

Observing that $\nu 2^{\nu-1}\,a_\nu \leqq r_{\nu+1} < (\nu+1)2^\nu$ for $\nu \geqq 2$, we find that $a_\nu < 2\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)$ and so $a_\nu \leqq 2$ for $\nu \geqq 2$. Now we have

$$n = \sum_{\nu=2}^{k} \nu\,2^{\nu-1}\,a_\nu + a_1$$

By induction on (2.2) and Theorem 1 we get

$$f(n) \leqq \sum_{\nu=2}^{k} (2^\nu - 1)\,a_\nu + f(a_1) \leqq \sum_{\nu=2}^{k} 2^\nu\,a_\nu + a_1\,. \tag{4.2}$$

An easy calculation shows that

$$kf(n) - 2\,n \leqq \sum_{\nu=2}^{k} (k-\nu)\,2^\nu\,a_\nu + (k-2)\,a_1 < \sum_{\nu=1}^{k} (k-\nu)\,2^{\nu+1} < 2^{k+2}\,.$$

Multiply this inequality by

$$\frac{\log n}{kn} < \frac{k\log 2 + \log(k+1)}{k^2\,2^{k-1}}$$

and we obtain

$$\frac{f(n)\log n}{n} < \frac{2}{k}\left(1+\frac{4}{k}\right)\bigl(k\log 2 + \log(k+1)\bigr)\,.$$

As n and k tend to infinity simultaneously we conclude

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{f(n)\log n}{n} \leqq \log 4\,.$$

5.

In this section I shall give a proof of (1.3) based on information theory. We state this as a theorem

Theorem 3. $$\liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)\log n}{n} \geqq \log 4\,.$$

We shall need some elementary results from information theory. For proofs of them the reader may consult e.g. [2].

Let X be a finite set of n elements x. Let p be a probability distribution over X with probabilities $p(x) \geqq 0$. The entropy of the probability space (X, p) is defined (let $0 \log 0 = 0$) by

$$H(X) = -\sum_{x\in X} p(x) \log p(x)\,.$$

It is well known that

$$0 \leqq H(X) \leqq \log n\,, \tag{5.1}$$

with equality on the right-hand side if and only if $p(x) = 1/n$ for every $x \in X$.

If X and Y are finite sets let $X \ast Y$ denote the set of all ordered pairs (x, y) where $x \in X$ and $y \in Y$. A probability distribution over $X \ast Y$ gives rise to probability distributions

$$p(x) = \sum_{y\in Y} p(x,y) \text{ and } p(y) = \sum_{x\in X} p(x,y) \text{ over } X \text{ and } Y \text{ respectively.}$$

Let $H(X)$ and $H(Y)$ be the corresponding entropies. Define a conditional probability $p(x \mid y)$ such that $p(x \mid y)\, p(y) = p(x, y)$ and the conditional entropy $H(X \mid Y)$ by

$$H(X \mid Y) = -\sum_{y\in Y} p(y) \sum_{x\in X} p(x|y) \log p(x|y)\,.$$

Then it is known that

$$H(X \mid Y) \leqq H(X)\,, \tag{5.2}$$

with equality if and only if $p(x, y) = p(x)\, p(y)$ for $x \in X$, $y \in Y$.

From the definitions given above follows

$$H(X \ast Y) = H(X \mid Y) + H(Y)\,. \tag{5.3}$$

As a consequence of (5.2) and (5.3) we get

$$H(X \ast Y) \leqq H(X) + H(Y)\,, \tag{5.4}$$

with equality if and only if X and Y are independent (i.e. $p(x, y) = p(x)\, p(y)$).

A stochastic variable is a vector-valued function $u(x)$ defined over a probability space X. Its range U is a probability space with the distribution

$$p(u) = \sum_{x:\, u(x)=u} p(x)\,.$$

If u, v and $u+v$ are stochastic variables and U, V, $U+V$ their ranges, and if U, V are independent, then[2]

$$H(U) \leqq H(U+V). \tag{5.5}$$

In order to prove (5.5) we note that there is an one-one correspondence between the probability spaces $(U+V)\ast V$ and $U \ast V$. Thus $H((U+V)\ast V) = H(U \ast V)$. Subtract $H(V)$ in both members, and we get $H(U+V \mid V) = H(U \mid V) = H(U)$. Then use (5.2) once again and we get the desired result.

As an application we consider the set $X = \{(x_1, \ldots, x_n);\, x_i = 0 \text{ or } 1\}$. A probability distribution can be defined over X in such a manner that $x_1, \ldots, x_n$ are independent and $P(x_i = 1) = p$, $P(x_i = 0) = q$, where $p > 0$ and $q > 0$ are fixed numbers with the sum 1. Now $u_\nu(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu$ and $v_\nu(x) = x_{\nu+1} + \ldots + x_n$ are two independent stochastic variables and $H(U_\nu)$, the entropy of the first. But now $u_\nu + v_\nu = u_n$ and so we get by (5.5)

$$H(U_\nu) \leqq H(U_n), \qquad \nu = 1, \ldots, n. \tag{5.6}$$

$U_n = \{0,1, \ldots, n\}$, the range of u_n, has the binomial probability distribution

$$\mathbf{P}(u_n = i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = p_n(i).$$

The following assymptotic formula will be important in our proof of (1.3)

$$H(U_n) \sim \frac{1}{2} \log n. \tag{5.7}$$

But we shall prove a little more, namely

Lemma 4. $$\lim_{n\to\infty} \left[H(U_n) - \frac{1}{2} \log 2\pi enpq \right] = 0.$$

For the proof of this lemma I need a theorem in FELLER [3] on p. 135.

Theorem. *If n and k vary in such a way that $(k-np)^3/n^2 \to 0$, then*

$$p_n(k) \sim (2\pi npq)^{-1/2} e^{-x_k^2/2} \tag{5.8}$$

asymptotically, with $x_k = (k-np)(npq)^{-1/2}$.

Proof of lemma 4. Choose α in the interval $0 < \alpha < \frac{1}{6}$. Then we obtain by Chebyshev's inequality

$$S_0 = \sum_{k:|x_k| \leqq n^\alpha} p_n(k) < n^{-2\alpha}. \tag{5.9}$$

[2] *I am indebted to* B. AJNE *for this inequality.*

Put $p(x_k) = p_n(k)/S_0$ for $|x_k| > n^\alpha$ and use (5.1). Then we find that $0 < S_1 = -\sum_{k:|x_k|>n^\alpha} p_n(k) \log p_n(k) \leqq S_0 \log (n+1) - S_0 \log S_0 \to 0$ when $n \to \infty$.

Now we put

$$S_2 = - \sum_{k:|x_k| \leqq n^\alpha} p_n(k) \log \left(p_n(k)\, e^{x_k^2/2}\right),$$

For $|x_k| \leqq n^\alpha$ and $\alpha < \frac{1}{6}$ we get $(k - np)^3/n^2 \to 0$ if $n \to \infty$. Then we find by (5.8) and (5.9)

$$(1 - n^{-2\alpha}) \log \frac{(2\pi npq)^{1/2}}{1+\varepsilon} < S_2 < \log \frac{(2\pi npq)^{1/2}}{1-\varepsilon} \quad \text{for } n > n_\varepsilon .$$

Further, put

$$S_3 = \sum_{k:|x_k| \leqq n^\alpha} p_n(k) \log e^{x_k^2/2} \quad \text{and} \quad S_4 = \sum_{k:|x_k| \leqq n^\alpha} \frac{1}{2} x_k^2\, e^{-x_k^2/2} (2\pi npq)^{-1/2} .$$

Then we get by (5.8)

$$(1-\varepsilon) S_4 \log e < S_3 < (1+\varepsilon) S_4 \log e \quad \text{for} \quad n > n_\varepsilon .$$

Now $S_4 \to \frac{1}{2}$ when $n \to \infty$, and so $S_3 \to \frac{1}{2} \log e$. Thus $S_1 + S_2 + S_3 - \frac{1}{2} \log 2\pi enpq$ tends to 0 when n tends to ∞.

Proof of Theorem 3. Let A be an $m \times n$ detecting matrix. Let X be the set of n-dimensional column-vectors x with components 0 or 1. Put $p(x) = 2^{-n}$. Then the components of x become independent stochastic variables. Also the j-th component of Ax is a stochastic variable. Its entropy H_j is $\leqq H(U_n)$ according to (5.6), and if its range is denoted by V_j, $(j = 1, :\ldots, m)$, Ax has the range $U \subset V_1 \ast V_2 \ast \ldots \ast V_m = V$. Ax is a stochastic variable with the range V if we define $p(y) = 0$ for $y \in V - U$. By (5.4) we now find that

$$H(U) = H(V) \leqq \sum_{j=1}^{m} H(V_j) \leqq m\, H(U_n) . \tag{5.10}$$

Since A is detecting there is an one-one correspondence between the probability spaces X and U, and so

$$H(U) = H(X) = n \log 2 \tag{5.11}$$

From (5.10) and (5.11) we get

$$f(n) \geqq \frac{n \log 2}{H(U_n)} . \tag{5.12}$$

Take (5.7) into account and the theorem is proved.

6. Another detection problem

The following problem was posed by P. Erdös and A. Rényi in [1].

Detection Problem. Let A be an $m \times n$ matrix with entries 0 and 1. If x is a sequence of n digits ($=0$ or 1) we are told the number of places (c_i)

in which x and the i-th row in A coincide, $i = 1, \ldots, m$. Suppose A has the property that the x's are uniquely determined by $c_1, \ldots, c_m$. For n given let $B(n)$ be the minimum of m for such matrices A. Then the problem is to determine the asymptotic behaviour of $B(n)$.

It has been proved by P. ERDŐS and A. RÉNYI that

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{B(n)\log n}{n} \geqq \log 4\,. \tag{6.1}$$

By the methods in this paper I can prove

Theorem 4. $$\limsup_{n\to\infty} \frac{B(n)\log n}{n} \leqq \log 4\,.$$

This confirms a conjecture in [1] as to the existence of the limit.

We saw in section 2 that a matrix A is detecting if $A\,\xi = 0$ implies $\xi = 0$. Now we take this as *definition* of a detecting matrix when the entries of A are not necessarily restricted to be 0 or 1.

I now claim that the detection problem above has the following equivalent form:

Detection Problem. For n given, let $B(n)$ be the minimum of m in the class of all $m \times n$ detecting matrices B with all entries from the set $\{+1, -1\}$. Determine the asymptotic behaviour of $B(n)$.

In order to see the equivalence of the two problems let E be the m $\times$ n matrix all of whose entries are 1, and let F be the n-dimensional column-vector of merely $1'$ s. Let x and y be column-vectors of $0'$ s and $1'$ s. Then the matrices A of the first problem have the property that

$$Ax + (E - A)(F - x) = Ay + (E - A)(F - y) \text{ implies } x = y\,. \tag{6.2}$$

The matrices B of the second problem have the property that

$$Bx = By \text{ implies } x = y\,. \tag{6.3}$$

Subtract $(E - A)F$ in both members of (6.2) and put $2A - E = B$. Then (6.2) and (6.3) become identical. A is a (0,1)-matrix if and only if B is a $(-1, +1)$-matrix and so we have proved the equivalence of the problems.

By the methods of section 3 we can prove the result

Theorem 5. $$B(k\,2^{k-1} + 1) \leq 2^k, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

I think it is not necessary to give all details of the proof, which is analogous to the proof of Theorem 1, but I shall describe those parts where the two proofs differ.

We shall keep the notations of section 3. Thus matrices denoted A_k are from now on detecting matrices with entries $+1$ and -1.

Instead of Lemmas 1–3 we need the three following lemmas, whose proofs are left to the reader. a_i, b_i, a_M, b_M are 0 or 1.

Lemma 5. *Choose numbers $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Put $a_\varnothing = 0$ and define a_M for every non-void $M \subset S_k$ by the aid of the congruence*

$$a_M \equiv \sum_{i\in M} a_i \pmod 2. \tag{6.4}$$

Then we get for every $N \subset S_k$

$$\sum_{M \subset N} (-1)^{a_M} = 0 \quad or \quad 2^{|N|}. \tag{6.5}$$

Lemma 6. *Choose numbers* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *and* $b_1, b_2, \ldots, b_k$. *Put* $a_\varnothing = b_\varnothing = 0$ *and define* a_M *and* b_M *as above. Then we get*

$$\sum_{M \subset S_k} (-1)^{a_M + b_M} = 2^k \quad if \quad a_i = b_i \quad for \quad i = 1, \ldots, k$$
$$= 0 \quad if \quad a_i \neq b_i \quad for\, some\, i. \tag{6.6}$$

Lemma 7. *Let* L *be any subset of* S_k. *Choose a number* a_M *for every non-void* $M \subset L$. *Put* $a_\varnothing = 0$ *and define* a_M *for every* $M \not\subset L$ *by the aid of*

$$a_M \equiv a_{M \cap L} + |M - M \cap L| \pmod 2. \tag{6.7}$$

Then we get

$$\sum_{M \subset N} (-1)^{a_M} = 0 \quad if \quad N \not\subset L. \tag{6.8}$$

Observe that the role played by ø is more important than before. The matrix A_k shall have the form

$$A_k = B_k | C_k^{L_1} | C_k^{L_2} | \ldots | C_k^{L_t}, \qquad t = 2^k - k - 1,$$

where B_k, $C_k^{L_1}$ etc. are certain matrices now to be defined.

Structure of $\mathbf{B}_k$. Let $M_1, M_2, \ldots, M_r$ $(r = 2^k)$ be an enumeration of all subsets of S_k. There are 2^k different combinations of values for $a_1, \ldots, a_k$. For each such combination we define a_M by (6.4) and arrange the numbers $(-1)^{a_M}$ in the order defined by $M_1, M_2, \ldots, M_r$ in a column of the matrix B_k.

Define the r-dimensional row-vector D_k^N for each $N \subset S_k$ with $|N| \geqq 2$. D_k^N shall have „1" in the i-th position if $M_i \subset N$ and „0" if $M_i \not\subset$ N.

We now find by (6.5) and (6.6) respectively

$$\mathrm{D}_k^N B_k \equiv (0, \ldots, 0) \pmod{2^{|N|}}, \tag{6.9}$$

$$(\det B_k)^2 = 2^{k 2^k}. \tag{6.10}$$

Structure of $\mathbf{C}_k^L$. Suppose $L \subset S_k$ and $|L| \geqq 2$. We can find a_M for $M \subset L$ such that $a_\varnothing = 0$ and

$$\sum_{M \subset L} (-1)^{a_M} = 2^\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, (|L| - 1). \tag{6.11}$$

By the aid of (6.7) we then define a_M for $M \not\subset L$. The numbers $(-1)^{a_M}$ are arranged in a column in the order determined by $M_1, M_2, \ldots, M_r$. For each ν we get such a column and the $|L| - 1$ columns form the matrix C_k^L when they are put in the order of increasing ν.

By Lemma 7 and (6.11) we find that

$$\mathrm{D}_k^N C_k^L = (0, \ldots\ldots\ldots, 0) \quad if \quad N \not\subset L$$
$$= (2^1, 2^2, \ldots, 2^{|N|-1}) \quad if \quad N = L. \tag{6.12}$$

Proof of Theorem 5. Take an enumeration of the sets $L \subset S_k$ with $|L| \geqq 2$. Form the matrix A_k. The previous proof that A_k is detecting holds with only small changes. A_k is an $m \times n$ matrix, with $m = 2^k$ and $n = k 2^{k-1} + 1$.

Proof of Theorem 4. First I prove that

$$B(n_1 + n_2) \leqq B(n_1) + B(n_2), \qquad n_1, n_2 = 1, 2, \ldots \tag{6.13}$$

Let B_i $(i = 1, 2)$ be $m_i \times n_i$ detecting matrices. We may assume that the first row in B_i contains merely $1'$ s, for in other case we can multiply by -1 in a column without altering the property of being a detecting matrix. Introduce E_1 as the $m_2 \times n_1$ matrix of merely $1'$ s and E_2 as the $m_1 \times n_2$ matrix of $1'$ s, and let F_i $(i = 1, 2)$ be the n_i-dimensional row-vector of $1'$ s.

We shall prove that the matrix

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & E_2 \\ E_1 & B_2 \\ F_1 & -F_2 \end{pmatrix}$$

is a detecting matrix. Let ξ_i $(i = 1, 2)$ be n_i-dimensional column-vectors and suppose that

$$B \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \, .$$

Then we get the equations

$$\begin{aligned} B_1 \xi_1 + E_2 \xi_2 &= 0 \\ E_1 \xi_1 + B_2 \xi_2 &= 0 \\ F_1 \xi_1 - F_2 \xi_2 &= 0 \\ F_1 \xi_1 + F_2 \xi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{6.14}$$

The last one follows since the first row in B contains merely $1'$ s. By (6.14) we now find that $B_1\xi_1 = 0$ and $B_2\xi_2 = 0$. But B_1 and B_2 are detecting, and so $\xi_1 = 0$ and $\xi_2 = 0$, if ξ_1 and ξ_2 have all components equal to -1, 0 or $+1$. Thus we have proved that B is detecting.

Now we note that the $(m_1 + 1)$-st row in B is identical with the 1-st. When it is removed we get an $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$ detecting matrix.

If we take $m_i = B(n_i)$ for $i = 1, 2$ (6.13) follows.

From Theorem 5 we find $B(k2^{k-1}) \leq 2^k$, since $B(n)$ is non-decreasing. Now we can take over the proof of Theorem 2 with 2^ν instead of $2^\nu - 1$ in (4.2).

(Received December 28, 1963)

REFERENCES

[1] Erdős, P.—Rényi, A.: "On two problems of information theory", *This journal*, **8** (1963) p. 241.

[2] Feinstein, A.: *Foundations of information theory*, New York 1958.

[3] Feller, W.: *An introduction to probability theory and its applications*, *Vol* 1, New York 1950.

[4] Shapiro, H. S.—Söderberg, S.: "A combinatory detection problem", *American Math. Monthly*, **70** (1963) pp. 1066–1070.

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ПРОБЛЕМЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ

B. LINDSTRÖM

Резюме

Автор решает две комбинаторные проблемы, изучаемые P. Erdős и A. Rényi [1]. Проблемы в терминах теории матриц формулируются следующим образом. Пусть (C) — класс матриц с элементами, равными 0 и 1 (случай (1)) или -1 и $+1$ (случай (2)). Матрицы, для которых из равенства $A\xi = 0$ следует, что $\xi = 0$, если ξ — вектор с компонентами -1, 0 и 1, называются *детектированными матрицами*.

Пусть $f(n)$ — минимальное число строк детектированных матриц с n столбцами. Проблема заключается в определении асимптотического поведения функции $f(n)$ при $n \to \infty$.

P. Erdős и A. Rényi доказали для обоих классов (C), что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)\log n}{n} \geqq \log 4\,.$$

Посредством конструирования детектированных матриц автор доказывает следующие соотношения:

$$f(k\cdot 2^{k-1}) \leqq 2^k - 1 \qquad k = 2, 3, \ldots \text{ (в случае (1))}$$

$$f(k\cdot 2^{k-1}+1) \leqq 2^k \qquad k = 2, 3, \ldots \text{ (в случае (2))}$$

и из них, используя соотношение $f(n_1 + n_2 + \ldots + n_i) \leqq f(n_1) + f(n_2) + \ldots + f(n_i)$, выводит, что $\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)\log n}{n} \leqq \log 4$ (в обоих случаях).

Этим доказана гипотеза P. Erdős и A. Rényi о существовании предела.

ON THE „PARKING" PROBLEM

by

A. DVORETZKY[1] and H. ROBBINS[2]

1. Introduction. Consider the following random process in which cars of length 1 are parked on a street $[0, x]$ of length $x \geqq 1$. The first car is parked so that the position of its center is a random variable which is uniformly distributed on $\left[\frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right]$. If there remains space to park another car then a second car is parked so that its center is a random variable which is uniformly distributed over the set of points in $\left[\frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right]$ whose distance from the first car is $\geqq \frac{1}{2}$. If there remains an empty interval of length $\geqq 1$ on the street then a third car is parked, its center being uniformly distributed over the set of points whose distance from the cars already parked and the ends of the street is $\geqq \frac{1}{2}$. The process continues until there remains no empty interval of length $\geqq 1$. We denote by N_x the total number of cars parked and extend the definition of N_x to all $x \geqq 0$ by putting $N_x = 0$ for $0 \leqq x < 1$.

The „parking problem" is the study of the distribution of the integer-valued random variable N_x as $x \to \infty$. This problem was called to our attention by C. Derman and M. Klein in 1957. In 1958 A. Rényi [1] proved that the expectation $\mu(x) = \mathbf{E}(N_x)$ satisfies the relation

$$\mu(x) = \lambda_1 x + \lambda_1 - 1 + O(x^{-n}) \qquad (n \geqq 1) \tag{1.1}$$

(O and o refer throughout to the argument increasing to infinity); the constant λ_1 is given by

$$\lambda_1 = \int_0^\infty e^{-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du} \qquad \lambda_1 \cong 0.748 \tag{1.2}$$

To prove (1.1) Rényi employs the Laplace transform of a certain integral equation satisfied by $\mu(x)$; using similar methods P. Ney [2] has studied the higher

[1] Hebrew University Jerusalem
[2] Columbia University New York

moments of N_x. In the present paper we show by a direct analysis of the integral equation that (1.1) can be strengthened to

$$\mu(x) = \lambda_1 x + \lambda_1 - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-3/2}\right) \tag{1.3}$$

and that the variance $\sigma^2(x) = \mathbf{E}(N_x - \mu(x))^2$ satisfies

$$\sigma^2(x) = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right) \tag{1.4}$$

where λ_2 is some positive constant. We show moreover that the standardized random variable $Z_x = (N_x - \mu(x))/\sigma(x)$ has the limiting normal (0,1) distribution as $x \to \infty$; this is done in two ways, the first by showing that all the moments of Z_x converge to the normal moments, and the second by a direct argument using the central limit theorem for sums of independent random variables.

In Section 2 we derive the integral equations satisfied by $\mu(x)$ and quantities related to the higher moments of N_x; these equations form the basis of our study as well as those of Rényi and Ney. Section 3 deals with the asymptotic behaviour of the solutions of these equations; our work here is somewhat similar to that of N. G. de Bruijn [3]. The results of Section 3 are applied in Section 4 to the parking problem. The second proof of the asymptotic normality of Z_x is given in Section 5. Various remarks will be found in Section 6.

2. Derivation of the integral equations. For $x \geqq 0$ let $[t, t+1]$ be the random interval occupied by the first car parked on a street $[0, x+1]$ of length $x+1$. The parking process described in Section 1 is such that the number of cars which will eventually be parked to the left of the first car is independent of the number which will be parked to the right of it; moreover, the number of cars eventually parked to the left of the first car, i.e. on $[0, t]$, has the same distribution as N_t, while the number parked to the right of the first car, i.e. on $[t+1, x+1]$, has the same distribution as N_{x-t}. Hence *the conditional distribution of N_{x+1} given that the first car occupies $[t, t+1]$ is the same as the distribution of $N_t + N_{x-t} + 1$ with N_t, N_{x-t} independent.* Denoting by $\mid t$ conditioning on the event that the first car is parked at $[t, t+1]$ we therefore have

$$\mathbf{E}(N_{x+1} \mid t) = \mathbf{E}(N_t) + \mathbf{E}(N_{x-t}) + 1 \qquad (0 \leqq t \leqq x) \tag{2.1}$$

(here we do not use the independence of N_t and N_{x-t}). Since by hypothesis t is uniformly distributed on $[0, x]$ it follows that, setting

$$\mu(x) = \mathbf{E}(N_x), \tag{2.2}$$

we have

$$\mu(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x \mu(t)\,dt + 1 \qquad (x > 0). \tag{2.3}$$

Defining the function

$$f(x) = \mu(x) + 1 \tag{2.4}$$

we see that f satisfies the somewhat simpler equation

$$f(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x f(t)\,dt \qquad (x>0)\,. \tag{2.5}$$

Together with the initial conditions

$$f(x) = 1 \quad (0 \leqq x < 1)\,, \quad f(1) = 2 \tag{2.6}$$

this determines $f(x)$ consecutively over the intervals $1 < x \leqq 2$, $2 < x \leqq 3$, ... Thus we find

$$f(x) = 2 \qquad (1 < x \leqq 2)\,, \tag{2.7}$$

$$f(x) = 4 - \frac{2}{x-1} \qquad (2 < x \leqq 3)\,, \tag{2.8}$$

$$f(x) = 8 - \frac{10}{x-1} - \frac{4}{x-1}\log(x-2) \qquad (3 < x \leqq 4)\,, \tag{2.9}$$

at which the integration of (2.5) becomes difficult.

Using the independence of N_t and N_{x-t} we have for the function

$$\sigma^2(x) = \mathbf{D}^2(N_x) = \mathbf{E}(N_x - \mu(x))^2 \tag{2.10}$$

the relation

$$\mathbf{D}^2(N_{x+1}\,|\,t) = \sigma^2(t) + \sigma^2(x-t) \qquad (0 \leqq t \leqq x) \tag{2.11}$$

Since

$$\mathbf{D}^2(N_{x+1}) \geqq \mathbf{E}(\mathbf{D}^2(N_{x+1}\,|\,t))\,, \tag{2.12}$$

it follows from (2.11) that

$$\sigma^2(x+1) \geqq \frac{2}{x}\int_0^x \sigma^2(t)\,dt \qquad (x>0)\,. \tag{2.13}$$

Let

$$L(x) = \lambda_1 x + \lambda_1 - 1\,, \tag{2.14}$$

where λ_1 is a constant to be determined later, and define for $k = 0, 1, \ldots$

$$\varphi_k(x) = \mathbf{E}((N_x - L(x))^k)\,. \tag{2.15}$$

Since

$$L(x+1) = L(t) + L(x-t) + 1\,, \tag{2.16}$$

we have

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(N_{x+1} - L(x+1))^k\,|\,t] &= \\ = \mathbf{E}[\{(N_t - L(t)) + (N_{x-t} &- L(x-t))\}^k]\,,\end{aligned} \tag{2.17}$$

and on integrating we find that

$$\varphi_k(x+1) = \frac{1}{x} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \int_0^x \varphi_i(t)\, \varphi_{k-i}(x-t)\, dt \qquad (x>0)\,. \tag{2.18}$$

3. The integral equations. Our results on the behaviour as $x \to \infty$ of functions satisfying certain integral equations are summarized in the following two theorems.

Theorem 1. *Let $f(x)$ be defined for $x \geqq 0$ and satisfy*

$$f(x+1) = \frac{2}{x} \int_0^x f(t)\, dt + p(x+1) \qquad (x>0) \tag{3.1}$$

where $p(x)$ is continuous for $x > 1$ and is such that, setting

$$p_x = \sup_{x \leqq t \leqq x+1} |p(t)| \qquad (x>1)\,, \tag{3.2}$$

we have

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{i} < \infty\,. \tag{3.3}$$

Then there exists a constant λ such that, setting

$$R_j = \frac{2j+1}{j} p_{j+1} + \frac{2(j+1)(j+3)}{j} \sum_{i=j+2}^{\infty} \frac{p_i}{i+1} \qquad (j=1,2,\ldots)\,, \tag{3.4}$$

we have

$$\sup_{n+1 \leqq x \leqq n+2} |f(x) - \lambda x - \lambda| \leqq \frac{2^n}{n!} \sup_{1 \leqq x \leqq 2} |f(x) - \lambda x - \lambda| + \frac{2^n}{n!} \sum_{j=1}^{n} \frac{j!}{2^j} R_j \qquad (n=1,2,\ldots)\,. \tag{3.5}$$

Corollary. If $\alpha > 2e$ and $f(x)$ satisfies (3.1) with

$$p(x) = O\left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{x+\beta}\right), \tag{3.6}$$

then

$$f(x) = \lambda x + \lambda + O\left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{x+\beta-1}\right). \tag{3.7}$$

The second theorem is much less precise but easier to prove.

Theorem 2. *Let $g(x)$ be defined for $x \geqq 0$ and satisfy*

$$g(x+1) = \frac{2}{x} \int_0^x g(t)\, dt + O(x^\gamma) \qquad (x>0) \tag{3.8}$$

with $\gamma > 1$. *Then*

$$g(x) = O(x^{\gamma}) \,. \tag{3.9}$$

Corollary. *Let* $g(x)$ *be defined for* $x \geqq 0$ *and satisfy*

$$g(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x g(t)\,dt + Ax^{\beta} + O(x^{\gamma}) \qquad (x > 0) \tag{3.10}$$

with $\beta > \gamma > 1$. *Then*

$$g(x) = \frac{\beta+1}{\beta-1}Ax^{\beta} + O(x^{\max(\beta-1,\gamma)}) \,. \tag{3.11}$$

Proof of Theorem 1. The proof is less involved and leads to a somewhat sharper error estimate if, as in the case of $\mu(x)$, the term $p(x)$ vanishes identically. For the sake of brevity, however, we shall treat the general case directly.

From (3.1) we have for positive x and y,

$$f(y+1) = \frac{2}{y}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{2}{y}\int_x^y f(t)\,dt + p(y+1) =$$

$$= \frac{1}{y}[xf(x+1) - xp(x+1)] + \frac{2}{y}\int_x^y f(t)\,dt + p(y+1)$$

or

$$f(y+1) = \frac{x}{y}f(x+1) + \frac{2}{y}\int_x^y f(t)\,dt + p(y+1) - \frac{x}{y}p(x+1) \,. \tag{3.12}$$

Define

$$I_x = \inf_{x\leq t\leq x+1} \frac{f(t)}{t+1}\,, \quad S_x = \sup_{x\leq t\leq x+1} \frac{f(t)}{t+1} \qquad (x \geqq 0) \,. \tag{3.13}$$

Notice that $f(x) = x+1$ satisfies (3.1) with $p \equiv 0$, and hence that

$$y+2 = \frac{x}{y}(x+2) + \frac{2}{y}\int_x^y (t+1)\,dt \,. \tag{3.14}$$

Subtracting (3.14) multiplied by I_x from (3.12) we have

$$\begin{aligned} f(y+1) - I_x\cdot(y+2) &= \frac{x}{y}[f(x+1) - I_x\cdot(x+2)] + \\ &+ \frac{2}{y}\int_x^y [f(t) - I_x\cdot(t+1)]\,dt + p(y+1) - \frac{x}{y}p(x+1) \,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Hence for $x \leqq y \leqq x+1$, in view of (3.13) and (3.2),

$$f(y+1) - I_x \cdot (y+2) \geqq 0 + 0 - p_{x+1} - p_{x+1} = -2p_{x+1}. \tag{3.16}$$

It follows that

$$I_{x+1} \geqq I_x - \frac{2p_{x+1}}{x+2} \qquad (x > 0). \tag{3.17}$$

Applying (3.17) successively with x replaced by $x+1, x+2, \ldots$ we obtain

$$I_y \geqq I_x - \Delta_x, \qquad (y \geqq x > 0). \tag{3.18}$$

where by definition

$$\Delta_x = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{x+i}}{x+i+1} \qquad (x > 0). \tag{3.19}$$

In exactly the same manner we obtain the inequality

$$S_y \leqq S_x + \Delta_x \qquad (y \geqq x > 0). \tag{3.20}$$

From (3.18) we have

$$\liminf_{y\to\infty} I_y \geqq I_x - \Delta_x \qquad (x > 0). \tag{3.21}$$

Since $\Delta_x = o(1)$ by (3.3) it follows that

$$\liminf_{y\to\infty} I_y \geqq \limsup_{x\to\infty} I_x. \tag{3.22}$$

From this and (3.18) with $x = 1$ we find that

$$I_\infty = \lim_{x\to\infty} I_x \text{ exists, and } I_\infty > -\infty. \tag{3.23}$$

Similarly,

$$S_\infty = \lim_{x\to\infty} S_x \text{ exists, and } S_\infty < \infty. \tag{3.24}$$

Since $I_x \leqq S_x$ it follows that

$$-\infty < I_\infty \leqq S_\infty < \infty. \tag{3.25}$$

From (3.12) we have for $x, y > 0$

$$\begin{aligned} f(y+1) - f(x+1) &= \frac{x-y}{y} f(x+1) + \\ &+ \frac{2}{y} \int_x^y f(t)\,dt + p(y+1) - \frac{x}{y} p(x+1). \end{aligned} \tag{3.26}$$

By (3.13) and (3.25), $f(x) = O(x)$, and hence by (3.26)

$$\sup_{x \leqq y \leqq x+1} |f(y+1) - f(x+1)| = O(1) + 2p_x. \tag{3.27}$$

But this implies by (3.3) that

$$S_x - I_x = o(1) \tag{3.28}$$

and therefore that

$$I_\infty = S_\infty \neq \pm \infty\,. \tag{3.29}$$

We now define λ as the common value in (3.29),

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} I_x = \lim_{x\to\infty} S_x = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x+1}\,. \tag{3.30}$$

By (3.18) and (3.20),

$$I_x - \Delta_x \leqq \lambda \leqq S_x + \Delta_x \qquad (x > 0). \tag{3.31}$$

Next we observe that for every $x > 1$ there exists a number x' satisfying

$$x \leqq x' \leqq x + 1\,, \quad \left|\frac{f(x')}{x'+1} - \lambda\right| \leqq \Delta_x\,. \tag{3.32}$$

Indeed, since by (3.1) $f(x)$ is continuous for $x > 1$ the non-existence of such an x' would imply that either

$$I_x > \lambda + \Delta_x \quad \text{or} \quad S_x < \lambda - \Delta_x\,, \tag{3.33}$$

contradicting (3.31). We denote by x_n a value x' satisfying (3.32) for $x = n$; thus for $n = 2, 3, \ldots$

$$|f(x_n) - \lambda(x_n + 1)| \leqq (n+2)\,\Delta_n \qquad (n \leqq x_n \leqq n+1) \tag{3.34}$$

Now set

$$f^*(x) = f(x) - \lambda(x+1)\,. \tag{3.35}$$

Then f^* again satisfies (3.1), and applying (3.12) with $n \leqq y \leqq n+1$ and $x = x_{n+1} - 1$ we obtain from (3.34) for $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} |f^*(y+1)| \leqq \frac{n+1}{n}(n+3)\,\Delta_{n+1} + \frac{2}{n} \sup_{n \leq t \leq n+1} |f^*(t)| \,+ \\ + p_{n+1} + \frac{n+1}{n} p_{n+1} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Putting

$$T_x = \sup_{x \leq t \leq x+1} |f^*(t)| \qquad (x > 0)\,, \tag{3.37}$$

we obtain from (3.36)

$$\begin{aligned} T_{n+1} \leqq \frac{2}{n} T_n + \frac{2n+1}{n} p_{n+1} + \frac{(n+1)(n+3)}{n} \Delta_{n+1} = \\ = \frac{2}{n} T_n + R_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{3.38}$$

where R_n is defined by (3.4). Successive application of this inequality for $n = 1, 2, 3, \ldots$ yields the inequality

$$T_{n+1} \leqq \frac{2^n}{n!} T_1 + \frac{2^n}{n!}\left[\frac{1!}{2} R_1 + \frac{2!}{2^2} R_2 + \ldots + \frac{n!}{2^n} R_n\right]. \tag{3.39}$$

In view of (3.37) this is precisely (3.5), and this completes the proof of Theorem 1.

Proof of Corollary. If (3.6) holds, then by (3.4)

$$R_j = O\left(\left(\frac{a}{j}\right)^{j+\beta+1}\right)$$

and hence (3.5), since $a > 2e$,

$$\frac{2^n}{n!}\sum_{j=1}^{n} \frac{j!}{2^j} R_j = O\left(\left(\frac{a}{n}\right)^{n+\beta+1}\right).$$

Thus by (3,5)

$$\sup_{n+1 \leqq x \leqq n+2} |f(x) - \lambda x - \lambda| = O\left(\left(\frac{2e}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) + O\left(\left(\frac{a}{n}\right)^{n+\beta+1}\right) =$$

$$= O\left(\left(\frac{a}{n}\right)^{n+\beta+1}\right),$$

from which (3.7) follows.

Proof of Theorem 2. We have

$$g(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x g(t)\,dt + \eta(x) \qquad (x > 0),$$

where

$$\eta(x) = O(x^\gamma), \qquad \gamma > 1.$$

Choose $x_0 > 1$ and $H > 0$ such that

$$|\eta(x)| \leqq Hx^\gamma \quad \text{for} \quad x \geqq x_0 - 1,$$

$$\int_0^{x_0} |g(t)|\,dt \leqq \frac{H}{\gamma - 1}(x_0 - 1)^{\gamma+1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} H \int_0^{x_0-1} t^\gamma\,dt. \tag{3.40}$$

Then for $x_0 - 1 \leqq x \leqq x_0$ we have

$$|g(x+1)| \leqq \frac{2}{x}\int_0^{x_0} |g(t)|\,dt + Hx^\gamma \leqq$$

$$\leqq \frac{2H}{x(\gamma-1)}(x_0 - 1)^{\gamma+1} + Hx^\gamma \leqq \tag{3.41}$$

$$\leqq \frac{2Hx^\gamma}{\gamma - 1} + Hx^\gamma = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} Hx^\gamma.$$

Hence

$$\int_0^{x_0+1} |g(t)|\,dt = \int_0^{x_0} |g(t)|\,dt + \int_{x_0}^{x_0+1} |g(t)|\,dt \leqq$$

$$\leqq \frac{\gamma+1}{\gamma-1} H \int_1^{x_0} (t-1)^\gamma\,dt + \int_{x_0}^{x_0+1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} H(t-1)^\gamma\,dt =$$

$$= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} H \int_0^{x_0} t^\gamma\,dt\,,$$

so that (3.40) holds with x_0 replaced by $x_0 + 1$. Hence by (3.41), for $x_0 \leqq x \leqq$ $\leqq x_0 + 1$ we have

$$|g(x+1| \leqq \frac{\gamma+1}{\gamma-1} Hx^\gamma\,. \tag{3.42}$$

By induction, (3.42) holds for all $x \geqq x_0 - 1$, which proves (3.9).

Proof of Corollary. Set

$$g^*(x) = \frac{\beta+1}{\beta-1} Ax^\beta\,.$$

Then

$$g^*(x+1) = \frac{\beta+1}{\beta-1} A(x+1)^\beta = \frac{\beta+1}{\beta-1} Ax^\beta + O(x^{\beta-1}) =$$

$$= \frac{2}{x} \int_0^x g^*(t)\,dt + Ax^\beta + O(x^{\beta-1})\,.$$

Hence, setting

$$\bar{g}(x) = g(x) - g^*(x)$$

we have for $x > 0$,

$$\bar{g}(x+1) = g(x+1) - g^*(x+1) = \frac{2}{x} \int_0^x \bar{g}(t)\,dt + O(x^{\max(\beta-1,\gamma)}).$$

Hence by Theorem 2,

$$\bar{g}(x) = O(x^{\max(\beta-1,\gamma)})$$

which proves (3.11).

Remarks.

1. If G is the lim sup as $x \to \infty$ of $g(x)$ in (3.8) divided by x^γ, then by taking x_1 sufficiently large we have

$$\frac{|g(x)|}{x^\gamma} \leqq G + \varepsilon \qquad \text{for all} \quad x \geqq x_1\,.$$

Then for $x \geqq x_1$,

$$|g(x+1)| \leqq \frac{2}{x_1} \int_0^{x_1} |g(t)|\,dt + \frac{2}{x} \int_0^x (G+\varepsilon)\,t^\gamma\,dt + \eta(x)\,,$$

where $\eta(x)$ denotes the error term in (3.8).

Hence

$$G = \limsup_{x\to\infty} \frac{g(x+1)}{(x+1)^\gamma} \leqq 0 + \frac{2(G+\varepsilon)}{\gamma+1} + \limsup_{x\to\infty} \frac{\eta(x)}{(x+1)^\gamma}.$$

Suppose now that (3.8) holds with O replaced by o. Since $\varepsilon > 0$ was arbitrary it follows that

$$G \leqq \frac{2\,G}{\gamma+1},$$

and since $\gamma > 1$ it follows that $G = 0$. Hence Theorem 2 holds if O is replaced by o in both (3.8) and (3.9).

2. Theorem 1 continues to hold if (3.1) is replaced by

$$(3.1)' \qquad f(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{C}{x} + p(x+1) \qquad (x > 0)$$

where C is any constant; this follows from the fact that the fundamental relation (3.12) follows from (3.1)$'$. Thus e.g. if $p(x+1)$ in (3.1) is of the form

$$\frac{C}{x} + O\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{x+\beta}\right) \qquad (a > 2\,e)$$

then (3.7) still holds.

4. Application to the parking problem. Since $f(x) = \mu(x) + 1$ satisfies, by (2.5), the equation (3.1) with $p \equiv 0$, we have by Theorem 1 that

$$(4.1) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\mu(x)}{x} = \lambda_1$$

exists, and by (3.31) for every $x > 0$,

$$(4.2) \qquad \inf_{x\leqq t\leqq x+1} \frac{\mu(t)+1}{t+1} = I_x \leqq \lambda_1 \leqq S_x = \sup_{x\leqq t\leqq x+1} \frac{\mu(t)+1}{t+1}.$$

Taking $x = 2$ we obtain easily from (2.8) that

$$(4.3) \qquad 0.66\ldots = \frac{2}{3} \leqq \lambda_1 \leqq 3 - \sqrt{5} = 0.76\ldots,$$

and (2.9) yields much narrower bounds. Since I_x and S_x approach λ_1 very rapidly it is easy to obtain extremely good approximations from (4.2) (cf. (1.2)). Since $\mu(x) = 1$ for $1 \leqq x \leqq 2$, even the crude approximation $1/2 < \lambda_1 < 1$ yields

$$(4.4) \qquad \begin{aligned} \sup_{1\leqq x\leqq 2} |\mu(x) + 1 - \lambda_1 x - \lambda_1| &= \max_{1\leqq x\leqq 2} |2 - \lambda_1 x - \lambda_1| = \\ &= \max(|2 - 2\lambda_1|, |2 - 3\lambda_1|) < 1. \end{aligned}$$

Hence from Theorem 1 with $p \equiv 0$ we have

Theorem 3. *There exists a constant* $\lambda_1 \left(\frac{1}{2} < \lambda_1 < 1\right)$ *such that the expectation* $\mu(x)$ *of* N_x *satisfies the relation*

$$\sup_{n+1 \leq x \leq n+2} |\mu(x) + 1 - \lambda_1 x - \lambda_1| < \frac{2^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4.5}$$

By Stirling's formula it follows that

$$\mu(x) - \lambda_1 x - \lambda_1 + 1 = O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-3/2}\right). \tag{4.6}$$

We now define $L(x)$ and $\varphi_k(x)$ by (2.14) and (2.15) with λ_1 given by (4.1) Then by (2.18) with $k = 2$ we have

$$\varphi_2(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x \varphi_2(t)\,dt + \frac{2}{x}\int_0^x \varphi_1(t)\,\varphi_1(x-t)\,dt \qquad (x > 0) \tag{4.7}$$

But $\varphi_1(x)$ is precisely the left hand member of (4.6), and therefore

$$\sup_{o<t<x} |\varphi_1(t)\,\varphi_1(x-t)| = O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-3}\right). \tag{4.8}$$

Thus $f(x) = \varphi_2(x)$ satisfies (3.1) with $p(x)$ estimated by (4.8). From this we deduce

Theorem 4. *There exists a constant* $\lambda_2 > 0$ *such that the variance* $\sigma^2(x)$ *of* N_x *satisfies the relation*

$$\sigma^2(x) = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right). \tag{4.9}$$

Proof. $\varphi_2(x)$ satisfies (4.9) by the Corollary to Theorem 1, and

$$\sigma^2(x) - \varphi_2(x) = -(\varphi_1(x))^2,$$

which, by (4.6), is absorbed into the error term. It remains to show that $\lambda_2 > 0$. This may be done numerically from estimates obtained in the course of the proof of Theorem 1, but it is much simpler to deduce it as follows. Since $\sigma^2(x) \neq$ $\neq 0$ for $2 < x < 3$ it follows from (2.13) that $\sigma^2(x) > \frac{\delta}{x}$ for some $\delta > 0$. But this contradicts (4.9) unless $\lambda_2 > 0$.

We now prove a result on the central moments of N_x.

Theorem 5. For every $k = 1, 2, \ldots$ and $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{E}\left((N_x - \mu(x))^k\right) = c_k x^{\left[\frac{k}{2}\right]} + O\left(x^{\left[\frac{k}{2}\right]-1+\varepsilon}\right) \tag{4.10}$$

($[x]$ denotes the greatest integer $\leq x$), where the c_k are constants and

$$c_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k\, k!}\lambda_2^k. \tag{4.11}$$

Proof. Since by (2.15) for $k = 1$

$$\begin{aligned} N_x - \mu(x) &= N_x - L(x) - \big(\mu(x) - L(x)\big) \\ &= N_x - L(x) - \varphi_1(x)\,, \end{aligned}$$

it follows from (4.6) that (4.10) is equivalent to

$$\varphi_k(x) = c_k\, x^{\left[\frac{k}{2}\right]} + O\big(x^{\left[\frac{k}{2}\right]-1+\varepsilon}\big)\,. \tag{4.12}$$

By (4.6) and (4.9), (4.10) holds for $k = 1,2$ and (4.11) holds for $k = 1$. By (2.18)

$$\varphi_3(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x \varphi_3(t)\,dt + \frac{6}{x}\int_0^x \varphi_1(t)\,\varphi_2(x-t)\,dt\,,$$

and by (4.6) and (4.9) the second integrand is $O\left(\left(\frac{C}{x}\right)^x\right)$ with a suitable C. Hence φ_3 satisfies (3.1) with p estimated as in (3.6). It follows from (3.7) that $\varphi_3(x) = c_3x + O\,(1)$ and thus (4.12) holds for $k \leq 3$.

Now let $m > 3$ and assume that (4.12) holds for $k < m$. Then by (2.18),

$$\varphi_m(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x \varphi_m(t)\,dt + \sum_{i=1}^{m-1}\binom{m}{i}\frac{1}{x}\int_0^x \varphi_i(t)\,\varphi_{m-i}(x-t)\,dt \quad (x > 0). \tag{4.13}$$

By the induction assumption

$$\varphi_i(t)\,\varphi_{m-i}(x-t) = c_i\,c_{m-i}\,t^{\left[\frac{i}{2}\right]}(x-t)^{\left[\frac{(m-i)}{2}\right]} + O\big(x^{\left[\frac{i}{2}\right]+\left[\frac{m-i}{2}\right]-1+\varepsilon}\big)\,. \tag{4.14}$$

Since

$$\frac{1}{x}\int_0^x t^{\left[\frac{i}{2}\right]}(x-t)^{\left[\frac{m-i}{2}\right]}dt = \frac{\left[\frac{i}{2}\right]!\left[\frac{m-i}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{i}{2}\right]+\left[\frac{m-i}{2}\right]+1\right)!}\,x^{\left[\frac{i}{2}\right]+\left[\frac{m-i}{2}\right]} \tag{4.15}$$

and since

$$\max_{1\leq i\leq m-1}\left(\left[\frac{i}{2}\right]+\left[\frac{m-i}{2}\right]\right) = \left[\frac{m}{2}\right] \qquad \text{for } m \geq 3,$$

the sum on the right hand side of (4.13) is

$$\text{Const.}\; x^{\left[\frac{m}{2}\right]} + O\big(x^{\left[\frac{m}{2}\right]-1+\varepsilon}\big)\,. \tag{4.16}$$

Since $\left[\frac{m}{2}\right] \geq 2$ for $m > 3$, (4.12) for $k = m$ follows from (4.13) by the Corollary of Theorem 2. Thus (4.12) holds for all $k = 1, 2, \ldots,$

By (4.13), (4.14), and (4.15) the constant in (4.16) for $m = 2k$ is

(4.17) $$\sum_{j=1}^{k-1} \binom{2k}{2j} j! \frac{(k-j)!}{(k+1)!} c_{2j} c_{2k-2j} .$$

Assume that (4.11) holds for $c_2, c_4, \ldots, c_{2k-2}$. By (4.17) the coefficient of x^k in the equation

$$\varphi_{2k}(x+1) = \frac{2}{x} \int_0^x \varphi_{2k}(t)\,dt + cx^k + O(x^{k-1+\varepsilon})$$

is

$$\frac{(k-1)(2k)!}{(k+1)!\,2^k} \lambda_2^k ,$$

so that by the Corollary of Theorem 2

$$\varphi_{2k}(x) = \frac{k+1}{k-1} \frac{(k-1)(2k)!}{(k+1)!\,2^k} \lambda_2^k x^k + O(x^{k-1+\varepsilon}) ,$$

and hence

$$c_{2k} = \frac{(2k)!}{k!\,2^k} \lambda_2^k ,$$

so that (4.11) holds for all $k = 1, 2, \ldots$. This completes the proof of Theorem 5.

Theorem 6. *The random variable*

$$Z_x = \frac{N_x - \mu(x)}{\sigma(x)}$$

is asymptotically normal (0,1) *as* $x \to \infty$.

Proof. By (4.10), (4.11) and (4.9) for $\varepsilon = 1/2$,

$$\mathbf{E}(Z_x^k) = \frac{c_k x^{\left[\frac{k}{2}\right]} + o\left(x^{\left[\frac{k}{2}\right]}\right)}{(\lambda_2 x + o(x))^{\frac{k}{2}}}$$

where $\lambda_2 > 0$ and

$$c_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \lambda_2^k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Hence

$$\lim_{x \to \infty} \mathbf{E}(Z_x^k) = \begin{cases} \dfrac{k!}{2^{\frac{k}{2}} \left(\dfrac{k}{2}\right)!} & (k \text{ even}), \\ 0 & (k \text{ odd}). \end{cases}$$

Sihce these are the moments of the normal (0,1) distribution which is uniquely determined by its moments, the theorem follows from the moment convergence theorem.

5. Another proof of the asymptotic normality. This proof will use very much less information about the moments of N_x than that of the preceding section. In fact it will be based entirely on the relation

$$\sigma^2(x) = \lambda_2 x + o(x)\,, \qquad (\lambda_2 > 0)\,. \tag{5.1}$$

We shall need two simple lemmas.

Lemma 1. *Let $\psi(x)$ be a non-negative function defined for $x \geqq 0$, bounded over finite intervals and satisfying $\psi(x) = o(x)$. Then $n = o(x)$ implies*

$$\sup \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) = o(x)\,, \tag{5.2}$$

the sup being taken over all sets of non-negative $x_1, \ldots, x_n$ with $x_1 + \ldots + x_n = x$.

Indeed, $\psi(x) < H + Hx$ for all $x \geqq 0$ with a suitable H. Let $\delta > 0$ be given and choose $a = a(\delta)$ so that $\psi(x) < \delta\, x$ for $x > a$. Divide the sum in (5.2) into two parts, one over the i with $x_i \leqq a$, the other over the remaining i. Then the first sum is $\leqq n(H + H\,a)$ while the second is $< \delta x$. Hence the left side of (5.2) is bounded by $2\delta x$ for large x and the lemma is established.

Lemma 2. *Given $\varepsilon > 0$, there exists $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ such that if $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ are independent random variables satisfying*

$$\left| \sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}(Y_i) \right| \leqq \delta\,, \tag{5.3}$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} \mathbf{D}^2(Y_i) - 1 \right| \leqq \delta\,, \tag{5.4}$$

$$| Y_i - \mathbf{E}(Y_i) | \leqq \delta\,, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{5.5}$$

then the distribution function of $\sum_{i=0}^{n} Y_i$ approximates uniformly to within ε the normal distribution with zero mean and unit variance.

It is clearly sufficient to establish the lemma with (5.3) replaced by $\mathbf{E}(Y_i) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ and δ replaced by 0 in (5.4). But then the lemma follows at once from the 'triangular' version of Liapounov's theorem.

We now proceed to the proof of the asymptotic normality of

$$Z_x = \frac{N_x - \mu(x)}{\sigma(x)}\,. \tag{5.6}$$

Let $n = n_x$ be a fixed non-negative integer-valued function of x defined for $x > 2$ and satisfying

$$0 \leqq n_x \leqq x/2\,, \quad n_x = o(x)\,. \tag{5.7}$$

(Eventually it will be specified further.) Consider the first $n - 1 \geqq 1$ cars parked on $[0, x]$. Denote by y_1 the distance between 0 and the leftmost car, by y_2 that between this car and the one parked second from the left, etc., by y_n the distance between the car parked to the extreme right and x. Then (see the derivation of the italicized statement in Section 2) the conditional distribution of N_x given $\underline{y} = (y_1, y_2 \ldots, y_n)$ is the same as the distribution of $n - 1 + N_{y_1} + N_{y_2} + \ldots + N_{y_n}$ with $N_{y_1}, N_{y_2}, \ldots, N_{y_n}$ independent. Therefore, the conditional distribution of Z_x given $\underline{y}$ is equal to the distribution of $\sum_{i=0}^{n} Y_i$, with the Y_i independent and defined by

$$(5.8) \qquad Y_i = \frac{N_{y_i}}{\sigma(x)} \ (i = 1, \ldots, n), \quad Y_0 = \frac{n - 1 - \mu(x)}{\sigma(x)}.$$

Applying Lemma 1 with $\psi(x) = | \sigma^2(x) - \lambda_2 x |$ we deduce from (5.1) and (5.7) that

$$\sum_{i=1}^{n} | \sigma^2(y_i) - \lambda_2 y_i | = o(x), \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(y_i) = \lambda_2 x + o(x)$$

for every $\underline{y}$. Hence we obtain

$$(5.9) \qquad \mathbf{D}^2(Z_x | \underline{y}) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{D}^2(Y_i | \underline{y}) = 1 + o(1)$$

for the conditional variance of Z_x. Thus (5.4) holds for $Y_i = Y_i(\underline{y})$ for all sufficiently large x and all random vectors $\underline{y}$.

From

$$1 = \mathbf{E}(Z_x^2) = \mathbf{E}\{\mathbf{D}^2(Z_x | \underline{y}) + \mathbf{E}^2(Z_x | \underline{y})\}$$

and (5.9) we see that

$$(5.10) \qquad \mathbf{E}(\mathbf{E}^2(Z_x | \underline{y})) = o(1)$$

Let A_x be the event: $\underline{y}$ is such that $| \mathbf{E}(Z_x | \underline{y}) | \leq \delta$; then it follows from (5.10) that for any fixed $\delta > 0$,

$$(5.11) \qquad \lim_{x \to \infty} \mathbf{P}(A_x) = 1,$$

and $\underline{y} \in A_x$ implies that $Y_i = Y_i(\underline{y})$ satisfy (5.3).

We now specify the function $n = n_x$ by putting

$$(5.12) \qquad n = [x^{1/2} \log^2 x]$$

and let $B_x = B_x(\eta)$ denote the event

$$(5.13) \qquad \max_{i=1,\ldots,n} y_i < \eta x^{1/2}, \qquad (\eta > 0)$$

Take $k = \left[\frac{2x^{1/2}}{\eta}\right] + 1$ and divide $[0, x]$ into k equi-long intervals $I_1, \ldots, I_k$. Then if (5.13) were false it would imply that at least one of the intervals I_j $(j = 1, \ldots, k)$ is disjoint from the first $n - 1$ cars parked. The probability of this is smaller than

$$k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-1} < \left(\frac{2x^{1/2}}{\eta} + 1\right)\left(1 - \frac{\eta}{2x^{1/2}}\right)^{x^{1/2}\log^2 x - 2}$$

and, thus, tends to zero as $x \to \infty$. Hence

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}(B_x) = 1 \,. \tag{5.14}$$

But $Y_0(\underline{y})$ is a constant and, taking $\eta < \frac{\delta}{2}\lambda_2^{1/2}$, (5.13) implies $|Y_i(\underline{y})| < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$ for large x and hence that $Y_i = Y_i(\underline{y})$ satisfy (5.5).

From the above and Lemma 2 we conclude that the conditional distribution of Z_x given $A_x \cap B_x$ is asymptotically normal with zero mean and unit variance. It then follows from (5.11) and (5.14) that the same holds for the distribution of Z_x itself, and the proof is complete.

6. Remarks. 1. The parking process described in Section 1 may also be described as the process of taking independent observations on a rectangular random variable, but rejecting all those observations which differ by less than unity from any previously observed and not rejected observation. The retained observations form a finite dependent stochastic sequence and we have studied the asymptotic behaviour of the length of this sequence. It would be interesting to extend the results to other kinds of dependence, and the preceding section indicates such possibilities; however, one would have to prove some relations like (5.1) and (5.2) and we do not know how to do this under reasonably general assumptions (see, however, the next remark).

2. Returning to the parking problem, we may equivalently consider a street of unit length and cars of length $1/x$ with x tending to infinity. This suggests at once generalizing the problem by replacing the rectangular density by other probability densities. Assume e.g. that the position of the center of each parked car is a random variable whose density is constant on each half of the street but that the constants in the two halves are different. Even in this simple case it is not quite trivial to prove rigorously that the expected total number of cars parked will be approximately $\lambda_1 x$, of those parked in the left half approximately $\lambda_1 x/2$ etc. However, the technique of the end of Section 5 can be used here. This makes it possible to treat densities which are step functions etc.; we expect to study in a future paper the case of continuous densities.

3. In the uniform density case the distribution of the lengths of the empty spaces between the parked cars has been considered by G. BÁNKÖVI [4].

4. It is natural to consider the parking problem in more dimensions. No functional equation similar to the one derived here is available, and a rigorous treatment becomes extremely difficult. In the plane one would consider, say, placing unit squares, with sides parallel to the axes, uniformly in a convex region. Such curiosities occur as lowering the expected total of squares placed while increasing the region (consider, in the (u, v) plane the regions

$$-5/4 \leqq u \leqq 5/4,\ 0 \leqq v \leqq 1 \text{ and } v \geqq 0,\ u + v \leqq 9/4,\ v - u \leqq 9/4) \,.$$

In the one-dimensional case it is clear from the functional equation (transformed as in (3.12)) that $\mu(x)$ is monotone, but the analogous result for homothetic regions in the plane is not evident, even if we confine ourselves to regions which are squares. Some numerical studies of the problem of placing squares in the plane have been carried out by Mrs. I. PALÁSTI, [5].

5. Differentiating (2.3) we have $x\mu'(x+1) + \mu(x+1) = 2\mu(x) + 1$. In view of (4.6) $\mu'(x)$ is approximated extremely closely by $\lambda_1(x+1)/(x-1)$. Higher derivatives may be treated similarly ($\mu(x)$ is, of course, n times differentiable for $x > n$). The same remarks apply to $\sigma^2(x)$ etc.

6. The estimates of the error involved in Theorem 1 can be somewhat sharpened, but this necessitates much work and we seem to have reached the point of diminishing returns. It may be more interesting to study other functional equations by the same method.

(Received January 3, 1964)

REFERENCES

[1] RÉNYI, A.: "On a one-dimensional problem concerning space-filling". *Publ. of the Math. Inst. of the Hungarian Acad. of Sciences*, **3** (1958) 109—127.

[2] NEY, P. E.: "A random interval filling problem". *Annals of Math. Stat.* **33** (1962), 702—718.

[3] DE BRUIJN, N. G.: „On some linear functional equations". *Publicationes Mathematicae* (Debrecen) **1** (1950) 129—134.

[4] BÁNKÖVI, G.: „On gaps generated by a random space filling procedure". *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci* **7** (1962) 395—407.

[5] PALÁSTI, I.: „On some random space filling problems". *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960) 353—360.

О ЗАДАЧЕ »ПАРКИРОВАНИЯ«

A. DVORETZKY и H. ROBBINS

Резюме

В работе [1] A. RÉNYI исследовал одномреную задачу о случайном. заполнении пространства (модель «паркирования»). Процедура состоит в последовательном расположении на отрезке $(0, x)$ случайным образом непересекающихся единичных отрезков. Число расположимых отрезков N_x — случайная величина.

Авторы исследуют асимптотическое поведение моментов величины N_x ((4.6), (4.9), (4.10)). Доказывается двумя способами, что величина Z_x (нормированная величина N_x) имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами (0,1) при $x \to \infty$.

ON SEQUENCES OF QUASI-EQUIVALENT EVENTS II

by

P. RÉVÉSZ

Introduction

In [1] we have introduced the following:

Definition. The events A_n defined on a probability space $\{\Omega, \mathscr{S}, \mathbf{P}\}$ are called quasi-equivalent if the value of the ratio

$$\frac{\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k})}{\mathbf{P}(A_{i_1})\, \mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k})} = \alpha_k \quad (i_j \neq i_l \text{ if } j \neq l)\ (\mathbf{P}(A_i) > 0)$$

depends only on k and it does not depend on the indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). The numbers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ are called the moments of the quasi-equivalent events $A_1, A_2, \ldots$.

The paper [1] contains the characterization of infinite sequences of quasi-equivalent events under the restriction

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) > 0 .$$

The main result of [1] can be summarized as follows:

Theorem A. *Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of quasi-equivalent events defined on the probability space $\{\Omega, \mathscr{S}, \mathbf{P}\}$ such that*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) > 0 .$$

Then there exists a random variable $\lambda(\omega)$ defined on $\{\Omega, \mathscr{S}, \mathbf{P}\}$ with the following properties:

$$\mathbf{P}\left\{0 \leq \lambda(\omega) \leq \inf_k \frac{1}{\mathbf{P}(A_k)}\right\} = 1 \tag{1}$$

$$\mathbf{M}(\lambda^k) = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ are the moments of the events $A_1, A_2, \ldots$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k} \mid \lambda) &= \mathbf{P}(A_{i_1} \mid \lambda)\, \mathbf{P}(A_{i_2} \mid \lambda) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k} \mid \lambda) = \\ &= \lambda^k\, \mathbf{P}(A_{i_1})\, \mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}) \qquad \text{(with probability 1)} \\ &\qquad\qquad (i_j \neq i_l \quad \text{if} \quad j \neq l) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(\omega)}{\mathbf{P}(A_k)} \to \lambda(\omega)\right\} = 1 \tag{4}$$

where $a_k(\omega)$ is the indicator function of A_k,

(5) $$\prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}(A_n, A_{n+1}, \ldots) = \mathscr{B}(\lambda)$$

where $\mathscr{B}(A_n, A_{n+1}, \ldots)$ is the smallest σ-algebra which contains the events $A_n, A_{n+1}, \ldots$ and $\mathscr{B}(\lambda)$ is the smallest σ-algebra with respect to which $\lambda(\omega)$ is measurable. We say that two σ-algebras $\mathscr{F}$ and $\mathscr{G}$ are equal to each other if for every $F \in \mathscr{F}$ there exists a $G \in \mathscr{G}$ such that $\mathbf{P}(F \circ G) = 0$ and conversely for every $G \in \mathscr{G}$ there exists an $F \in \mathscr{F}$ such that $\mathbf{P}(F \circ G) = 0$.

The aim of the present paper is to obtain the characterization of the infinite sequences of quasi equivalent events substituting the condition $\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) > 0$ by weaker conditions.

§ 1. The formulation of Theorems 1 and 2

In the present paper we will study the properties of an infinite sequence of quasi-equivalent events $A_1, A_2, \ldots$ under the following conditions:

Condition a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\, \mathbf{P}(A_k)} < +\infty.$$

Condition b:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{P}(A_k)} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Condition c:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{P}(A_k)} \leq K$$

where K is a positive constant which does not depend on n.

Condition d:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = +\infty.$$

It is easy to see that the Condition a implies the Condition b, the Condition b implies the Condition c and the Condition c implies the Condition d.

We ask: do these conditions imply the statements of Theorem A. More exactly we will prove that if $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of quasi-equivalent events defined on a probability space $\{\Omega, \mathscr{S}, \mathbf{P}\}$ then there exists a random variable $\lambda(\omega)$ defined on $\{\Omega, \mathscr{S}, \mathbf{P}\}$ having some of the following properties:

Property 1.

$$\mathbf{P}\left\{0 \leq \lambda(\omega) \leq \inf_k \frac{1}{\mathbf{P}(A_k)}\right\} = 1,$$

Property 2.

$$\mathbf{M}(\lambda^k) = a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

where $a_1, a_2, \ldots$ are the moments of the events $A_1, A_2, \ldots$.

Property 3.

$$\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k} \mid \lambda) = \mathbf{P}(A_{i_1} \mid \lambda)\, \mathbf{P}(A_{i_2} \mid \lambda) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k} \mid \lambda) =$$
$$= \lambda^k\, \mathbf{P}(A_{i_1})\, \mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}) \qquad \text{(with probability 1)}$$
$$(i_j \neq i_l \quad \text{if} \quad j \neq l)$$

Property 4.

$$\mathbf{P}\{\psi_n \to \lambda\} = 1$$

where $\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{P(A_k)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ and $a_k(\omega)$ is the indicator function of A_k

Property 4*.

$$\mathbf{M}[(\psi_n - \lambda)^2] \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Property 4.**

$$\mathbf{M}(\psi_n\, \varphi) \to \mathbf{M}(\lambda\, \varphi) \qquad (n \to \infty)$$

for every random variable φ having finite variance.

Property 5.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}(A_n, A_{n+1}, \ldots) = \mathscr{B}(\lambda)$$

where $\mathscr{B}(A_n, A_{n+1}, \ldots)$ is the smallest σ-algebra which contains the events $A_n, A_{n+1}, \ldots$ and $\mathscr{B}(\lambda)$ is the smallest σ-algebra with respect to which $\lambda(\omega)$ is measurable. (The equality of two σ-algebras was defined in the introduction).

Now our main result is the following:

Theorem 1.

	1	2	3	4	4*	4**	5
a	$\to$	$\to$	$\to$	$\to$	$\to$	$\to$	$\to$
b	$\to$	$\to$	$\to$	$\not\to$	$\to$	$\to$	$\to$
c	$\to$	$\to$	$\to$	$\not\to$	$\not\to$	$\to$	$\to$

The sign $\to$ resp. $\not\to$ in the i-th row of the k-th column of the table means that the i-th condition implies (resp. does not imply) the k-th property.

Our next theorem is the generalization of Theorem 2b of [1].

Theorem 2. *Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of quasi-equivalent events for which the Condition c is valid and let $K = \inf_k \frac{1}{\mathbf{P}(A_k)}$. Then we can construct a sequence $A_1^*, A_2^*, \ldots$ from the measurable subsets of the rectangle $[0, K] \times [0, 1]$ of the plane such that*

$$\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = \mu(A_{i_1}^* A_{i_2}^* \ldots A_{i_k}^*)$$

$\mu = \nu \times \lambda$ where ν is a Lebesgue—Stieltjes measure on the interval $[0, K]$ and λ is the ordinary Lebesgue measure on $[0, 1]$ and if B_i is the common part of A_i^* and the line $x = x_0$ $(0 \leqq x_0 \leqq K)$ then

$$\lambda(B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_k}) = \lambda(B_{i_1}) \lambda(B_{i_2}) \dots \lambda(B_{i_k}) = \left(\frac{x_0}{K}\right)^k.$$

§ 2. The proof of Theorems 1 and 2

In the proof we will apply many times the following

Lemma (see [2]) *If H is a Hilbert space and f_n is a sequence of elements of H such that*

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, f_k) = \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

and

$$\|f_n\| \leqq C$$

where C is a positive constant and λ_k is a sequence of real numbers. Then f_n converges weakly to an element f of the Hilbert space H i.e.

$$(f_n, g) \to (f, g) \qquad (n \to \infty)$$

for every element g of H.

First of all we will prove that the Condition c implies the Property 4**. To prove this fact it is enough to check that the conditions of the above mentioned Lemma hold if we substitute f_n by

$$\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(\omega)}{\mathbf{P}(A_k)},$$

I.e. we have to prove that

$$\mathbf{M}(\psi_n^2) \leqq C \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{6}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\psi_n \psi_k) \tag{7}$$

exists for every k. (6) follows from the following formula

$$\mathbf{M}(\psi_n^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{P}(A_k)} + \frac{2}{n^2} \sum_{k<j} \frac{\mathbf{P}(A_k A_j)}{\mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(A_j)} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{P}(A_k)} + \frac{2}{n^2} \binom{n}{2} \alpha_2 .$$

Similarly we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\psi_n \psi_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nk} \mathbf{M}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(\omega)}{\mathbf{P}(A_j)} \sum_{l=1}^{k} \frac{a_l(\omega)}{\mathbf{P}(A_l)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nk} \alpha_2 (n-k) k = \alpha_2$$

which implies (7). So we have already proved that Condition c implies Property 4.** (Let the weak limit of the sequence ψ_n be $\lambda(\omega)$.)

Our next step is to prove that Condition c implies the Property 2, more exactly we prove that Property 4** implies Property 2. The Property 2 for $k = 1$ is trivial because

$$1 = \mathbf{M}(\psi_n) = \mathbf{M}(\lambda).$$

The proof for $k = 2$ is the following:

$$\alpha_2 = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\psi_n \psi_k) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{M}(\lambda\psi_k) = \mathbf{M}(\lambda^2).$$

Similarly for $k = 3$ we have

$$\alpha_3 = \lim_{l\to\infty} \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\psi_n \psi_k \psi_l) = \lim_{l\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mathbf{M}(\lambda \psi_k \psi_l) =$$
$$= \lim_{l\to\infty} \mathbf{M}(\lambda^2 \psi_l) = \mathbf{M}(\lambda^3).$$

The proof for any k is completely the same.

Now we prove that

$$\alpha_k \leqq \left(\frac{1}{\mathbf{P}(A_l)}\right)^k \qquad (l = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

(8) is trivial for $k = 1$. The proof for $k = 2$ is the following

$$\alpha_2 = \frac{\mathbf{P}(A_l A_{l+1})}{\mathbf{P}(A_l)\,\mathbf{P}(A_{l+1})} \leqq \frac{\mathbf{P}(A_{l+1})}{\mathbf{P}(A_l)\,\mathbf{P}(A_{l+1})} = \frac{1}{\mathbf{P}(A_l)} \leqq \frac{1}{\mathbf{P}^2(A_l)}.$$

For $k = 3$ similarly we have

$$\alpha_3 = \frac{\mathbf{P}(A_l A_{l+1} A_{l+2})}{\mathbf{P}(A_l)\,\mathbf{P}(A_{l+1})\,\mathbf{P}(A_{l+2})} \leqq \frac{\mathbf{P}(A_{l+1} A_{l+2})}{\mathbf{P}(A_l)\,\mathbf{P}(A_{l+1})\,\mathbf{P}(A_{l+2})} = \frac{\alpha_2}{\mathbf{P}(A_l)} \leqq \frac{1}{\mathbf{P}^3(A_l)}.$$

By induction we can obtain (8) for any k.

Now we prove that Condition c implies Property 1. More exactly we prove that Property 2. and (8) imply Property 1. In fact if

$$\mathbf{M}(\lambda^k) = \alpha_k \leqq \left(\frac{1}{\mathbf{P}(A_l)}\right)^k \quad (k = 1, 2, \ldots; l = 1, 2, \ldots)$$

then

$$\mathbf{P}\left(0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{\mathbf{P}(A_l)}\right) = 1 \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

and this relation implies the Property 1.

Now we can already prove Property 3 by exactly the same method which was used in the proof of Theorem 3 in [1], therefore we do not give in detail this part of our proof. Similarly we do not give in detail the proof of our Theorem 2 because its proof is exactly the same as the proof of Theorem 2b in [1].

Using Theorem 2 and the well known zero-one law we obtain that Condition c implies Property 5.

The fact that Condition b implies Property 4* can be proven by a simple calculation. Property 4 follows from Condition a using Theorem 2 and the well known KOLMOGOROV's strong law of large numbers.

Our last step is to prove that Condition c does not imply Property 4* and Condition b does not imply Property 4. We also do not detail these statements because these statements are well known for independent random variables (Cf [2] pp. 204).

So the proof of our Theorems 1 and 2 are complete.

Remark. It is easy to see that if Condition d does not hold then in general there does not exist a random variable $\lambda(\omega)$ having any of the mentioned Properties. This fact is shown by the following example: Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of events defined in the interval $[0, 1]$ such that

$$\mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{2^i}$$

$$\mathbf{P}(A_i A_j) = \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(A_j) \qquad \text{if } i \neq j$$

$$\mathbf{P}(A_i A_j A_k) = 0 \qquad \text{if } i \neq j \;\; i \neq k \text{ and } j \neq k\,.$$

It is easy to see that this sequence of events can be constructed.

We do not know what happens if Condition d holds but Condition does not hold.

(Received January 7, 1964)

REFERENCES

[1] RÉVÉSZ, P.: "On sequences of quasi-equivalent events I." *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **8** (1963) 73—78.
[2] RÉNYI, A.: "On stable sequences of events". *Sankhya*. Ser. A. 25 (1963) 293—302.
[3] HALMOS, P.: *Measure theory*. Van Nostrand 1950.

О КВАЗИЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ СОБЫТИЙ II.

P. RÉVÉSZ

Резюме

Последовательность событий $A_1, A_2, \ldots$ называется квазиэквивалентной, если значение дроби

$$a_k = \frac{\mathbf{P}(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots A_{i_k})}{\mathbf{P}(A_{i_1})\,\mathbf{P}(A_{i_2})\ldots\mathbf{P}(A_{i_k})} \qquad (i_j \neq i_l, \text{ если } j = l)$$

зависит лишь от k и не зависит от индекхов $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

В настоящей работе изучаются свойства последовательности квазиэквивалентных событий $A_1, A_2, \ldots$ при следующих условиях:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\,\mathbf{P}(A_k)} < +\infty,$

b) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{P}(A_k)} \to 0 \qquad (n \to \infty)\,,$

c) $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mathbf{P}(A_k)} \leqq K$, где K положительная постоянная, независящая от n,

d) $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_k) = +\infty$.

Доказывается, что если выполняются некоторые из этих условий, то существует случайная величина λ со следующими свойствами:

1) $\mathbf{P}\left\{0 \leqq \lambda(\omega) \leqq \inf_k \frac{1}{\mathbf{P}(A_k)}\right\} = 1$,

2) $\mathbf{M}(\lambda^k) = a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$,

3) $\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k} \mid \lambda) = \mathbf{P}(A_{i_1} \mid \lambda) P(A_{i_2} \mid \lambda) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k} \mid \lambda) =$
$= \lambda^k \cdot \mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k})$ с вероятностью 1 $(i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$

4) $\mathbf{P}\{\psi_n \to \lambda\} = 1$, где $\psi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\mathbf{P}(A_k)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$,

и $a_k(\omega)$ — индикаторная функция события A_k.

4*) $\mathbf{M}[(\psi_n - \lambda)^2] \to 0 \qquad (n \to \infty)$

4**) для любой интегрируемой с квадратом случайной величины φ

$$\mathbf{M}(\psi_n \varphi) \to \mathbf{M}(\lambda \varphi) \qquad (n \to \infty)$$

5) $\prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}(A_n, A_{n+1}, \ldots) = \mathscr{B}(\lambda)$,

где $\mathscr{B}(A_n, A_{n+1}, \ldots)$ обозначает σ - алгебру, порожденную событиями $A_n, A_{n+1} \ldots$, а $\mathscr{B}(\lambda)$ обозначает σ - алгебру, порожденную случайной величиной $\lambda(\omega)$. Две σ - алгебры считаются равными, если любой элемент одной из них отличается от некоторого элемента другой лишь на множестве меры нуль и наоборот.

Точную связь между нашими условиями и упомянутыми свойствами случайной величины λ выражает теорема 1.

Легко видеть, что если не выполняется условие d), то, вообще говоря, не существует случайной величины λ, соответствующей любому из свойств 2), 3), 4), 4*), 4**).

Еще не решена проблема относительно того, что произойдет, если условие d) выполнено, а условие c) нет.

ELEMENTARE RELATIONEN BEZÜGLICH DER GLIEDER UND TRENNENDEN PUNKTE VON GRAPHEN

von

T. GALLAI

Wir betrachten den endlichen und zusammenhängenden Graphen G, von dem wir annehmen wollen, daß er aus mehreren Gliedern besteht, also G mindestens einen trennenden Punkt besitzt.[1] Es sollen die Glieder von G mit $G_1, \ldots, G_g$, die trennenden Punkte mit $a_1, \ldots, a_t$ bezeichnet werden. Ferner bezeichne g_i $(i = 1, \ldots, t)$ die Anzahl der mit a_i inzidenten Glieder und t_j $(j = 1, \ldots, g)$ die Anzahl der in G_j liegenden trennenden Punkte. Kürzlich hat HARARY eine Relation zwischen g, t und den g_i gefunden (s. 2], [4]). Man kann diese in der Form

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{t} (g_i - 1) \tag{1}$$

schreiben. In dieser Note wollen wir nun mit Hilfe des zu G gehörigen *Gliedgraphen* (s. [1] S. 14—15) einen neuen Beweis von (1) mitteilen und die zu (1) duale Relation

$$t = 1 + \sum_{j=1}^{g} (t_j - 1) \tag{2}$$

ableiten.

Der zu dem Graphen G gehörige Gliedgraph G^* ist folgendermaßen erklärt (s. [1] S. 14): G^* ist ein paarer Graph, in dem die eine Klasse der Punkte aus den Gliedern $G_1, \ldots, G_g$ von G, die andere aus den trennenden Punkten $a_1, \ldots, a_t$ von G besteht.[2] G^* enthält nur solche Kanten, die zu verschiedenen Klassen gehörige Punkte verbinden, undzwar ist a_i mit G_j dann und nur dann in G^* verbunden, wenn in G der Punkt a_i in dem Glied G_j liegt. Laut dieser Definition ist in G^* der Grad des »Punktes« G_j gleich t_j und der Grad von a_i gleich g_i. Für die Anzahl k der Kanten von G^* gelten daher

$$k = \sum_{i=1}^{t} g_i \tag{3}$$

und

$$k = \sum_{j=1}^{g} t_j\,. \tag{4}$$

---

[1] Wir betrachten nur Graphen ohne Schlingen. Statt Knotenpunkten sagen wir kurz nur Punkte. Bezüglich der Definitionen der Begriffe »Glied« und »trennender Punkt« (Artikulation) s. [1], [2], [3], [4].

[2] Es ist also $\{G_1, \ldots, G_g, a_1, \ldots, a_t\}$ die Menge der Punkte von G^*.

Es ist ferner eine grundlegende Tatsache, daß G^* ein Baum ist (s. [1] S. 15). Daraus folgt die Gleichung

$$g + t = k + 1. \tag{5}$$

($g + t$ gibt die Anzahl der Punkte von G^* an). Ersetzt man nun in (5) den Wert k durch den Ausdruck (3) bzw. (4), so gelangt man zu (1) bzw. (2).

Bemerkungen. 1) Trivialerweise gelten (1) und (2) auch dann, wenn G aus einem einzigen Glied besteht.

2) Erklärt man die Begriffe »Glied« und »trennender Punkt« auch für nicht zusammenhängende Graphen (s. [1]), so können (1) und (2) auch auf solche Graphen verallgemeinert werden. Die entsprechenden Formeln erhält man aus (1) und (2) einfach dadurch, daß man das erste Glied auf der rechten Seite von (1) bzw. (2) durch die Anzahl der Komponenten von G ersetzt.

(Eingegangen: 30. Januar, 1964)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] GALLAI, T.: »Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken«, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962) 3—36.
[2] HARARY, F.: »An elementary theorem on graphs«, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959) 405—407.
[3] KŐNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Leipzig, 1936.
[4] ORE, O.: »*Theory of graphs*«, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **38** (1962).

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СОГЛАСНО ЧЛЕНАМ И РАЗЪЕДИНЯЮЩИМ ВЕРШИНАМ ГРАФОВ

T. GALLAI

Резюме

Пусть будут $G_1, \ldots, G_g$ члены конечного и связного графа, $a_1, \ldots, a_t$ — разъединяющие вершины этого графа, далее пусть означает $g_i (i = 1, \ldots, t)$ число членов, принадлежающих вершине a_i, а $t_j (j = 1, 2, \ldots, g)$ число разделяющих вершин, принадлежащих члену G_j.

При помощи *графа членов* принадлежающего графу G (см. [1]), доказываются соотношения

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{t} (g_i - 1)$$

и ей двойственная формула

$$t = 1 + \sum_{j=1}^{g} (t_j - 1).$$

A GENERALIZATION OF A THEOREM OF E. VINCZE

by

R. G. LAHA[1], E. LUKACS[1] and A. RÉNYI

The functional equation $\varphi(x) = \varphi(ax)\,\varphi(bx)$ $(a, b > 0, a^2 + b^2 = 1)$ was solved by E. VINCZE [1] under the assumption that $\varphi(x)$ is a complex valued function of the real variable x which can be differentiated twice at the origin. This equation occurs in certain problems in probability theory and was therefore studied by a number of authors under the restriction that $\varphi(x)$ is a positive definite function.

In the present note we prove the following generalization of VINCZE's result:

Theorem. *Let $\varphi(x)$ be a complex valued function of the real variable x and let $\{a_j\}$ be a sequence of nonnegative real numbers such that $\sum_{j=1}^{\infty}{}' a_j^2 = 1$ and $0 < a_1 < 1$. Suppose that there exist complex constants A and B such that*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - Ax}{x^2} = B. \tag{1}$$

Assume further that $\varphi(x)$ satisfies for all real x the functional equation

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \varphi(a_j x) \tag{2}$$

where the infinite product converges.[2] *Then $A = 0$ and $\varphi(x) = e^{Bx^2}$.*

Proof. It follows from (1) that $\varphi(x)$ is continuous at $x = 0$. It follows further from the convergence of the infinite product (2) that $\lim_{j\to\infty} \varphi(a_j x) = 1$, and as clearly $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ we obtain $\varphi(0) = 1$. Thus it follows from (1) that

$$\varphi(x) = 1 + Ax + O(x^2) \qquad \text{for} \quad x \to 0. \tag{3}$$

Thus we have

$$\prod_{j=1}^{N} \varphi(a_j x) = e^{A(\sum_{j=1}^{N} a_j)x + O(x^2)}.$$

---

[1] The Catholic University of America. The research of these authors was supported by the National Science Foundation through grant NSF-GP-96.

[2] As usually the convergence of an infinite product $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ is understood in the sense that only a finite number of factors may be equal to 0 and if $z_n \neq 0$ for $n \geqq n_0$ then $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=n_0}^{N} z_n$ exists and is different from 0.

As the product (2) is convergent, it follows that the series $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ is convergent too. Let us put

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = C \,. \tag{4}$$

We have evidently $C > 1$. It follows that $\varphi(x) = e^{ACx+O(x^2)}$ and thus

$$\frac{\varphi(x) - 1 - Ax}{x^2} = \frac{A(C-1)}{x} + O(1) \qquad \text{for } x \to 0. \tag{5}$$

Clearly (5) is compatible with (1) only if $A = 0$. Condition (1) now reduces to

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - 1}{x^2} = B \tag{6}$$

which yields

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \varphi(x)}{x^2} = B \,. \tag{7}$$

Clearly (6) implies that there exist positive numbers d and D such that

$$|\,\varphi(x) - 1\,| < Dx^2 \qquad \text{for } |x| \leq d. \tag{8}$$

As for $|\,z - 1\,| \leq \frac{1}{2}$ we have $|\arg z\,| \leq \frac{\pi}{3}\,|\,z-1\,|$, it follows that for $|\,x\,| \leq \triangle = \min\left(d, \frac{1}{\sqrt{2D}}\right)$ we have

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\arg \varphi(a_j x)\,| < \pi \,.$$

Thus we obtain from (2)

$$\log \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \log \varphi(a_j x) \qquad \text{for } |x| \leq D. \tag{9}$$

We obtain from (9) by iteration for any natural number k

$$\log \varphi(x) = \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_k=1}^{\infty} \log \varphi(a_{j_1} \ldots a_{j_k} x) \,. \tag{10}$$

Since $\max a_j = \alpha < 1$ we see that

$$\max a_{j_1} \ldots a_{j_k} \leq \alpha^k \,. \tag{11}$$

In view of (11) and (7) for any $\varepsilon > 0$ we can choose the value of k so large that

$$|\log \varphi(a_{j_1} \ldots a_{j_k} x) - Bx^2 a_{j_1}^2 \ldots a_{j_k}^2| \leq \varepsilon\, a_{j_1}^2 \ldots a_{j_k}^2 \tag{12}$$

for all $|\,x\,| \leq \triangle$. It follows from (10) and (12) that

$$|\log \varphi(x) - Bx^2| \leq \varepsilon \,. \tag{13}$$

As ε can be chosen arbitrarily small we obtain that $\varphi(x) = e^{Bx^2}$ for $|\,x\,| \leq \triangle$.

Let us put $\psi(x) = \varphi(x)\, e^{-Bx^2}$. Then clearly $\psi(x)$ satisfies for all x the equation

$$\psi(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \psi(a_j x) \tag{14}$$

further $\psi(x) = 1$ for $|x| \leqq \triangle$. Let x_0 denote the upper bound of those positive numbers β for which $\psi(x) = 1$ for $|x| \leqq \beta$. We have already shown that $x_0 \geqq \triangle > 0$. Suppose that x_0 is finite; we shall prove that this leads to a contradiction. Clearly $\psi(\pm x_0) = 1$ because $\max a_j = \alpha < 1$. Let now η be an arbitrary real number such that $1 > \eta > \alpha$; then $\frac{a_j}{\eta} < \frac{a_j}{\alpha} \leqq 1$ so that $\psi\left(\pm \frac{a_j}{\eta} x_0\right) = 1$. It follows that $\psi\left(\pm \frac{x_0}{\eta}\right) = 1$. This however contradicts the definition of x_0. Thus $x_0 = +\infty$ and $\varphi(x) = e^{Bx^2}$ for all x.

We are indebted to P. Bártfai for a valuable remark, which we utilzed in preparing the final version of this paper.

(Received August 28, 1963; in revised form March 9, 1964)

REFERENCE

[1] Vincze, E.: »Bemerkung zur charakterisierung des Gausschen Fehlergesetzes.« *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **7** (1962) 357—361.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ E. VINCZE

R. G. LAHA, E. LUKACS и A. RÉNYI

Резюме

Доказывается следующее обобщение теоремы E. Vincze [1]:

Теорема. *Пусть $\varphi(x)$ — функция вещественной переменной x с комплексными значениями и $\{a_j\}$ — последовательность неотрицательных чисел, для которых $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = 1$ и $0 < a_1 < 1$. Предполагаем, что существуют комплексные константы A и B такие, что*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - Ax}{x^2} = B,$$

и что $\varphi(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \varphi(a_j x),$$

где бесконечное произведение сходится. В этом случае $A = 0$ и $\varphi(x) = e^{Bx^2}$.

BIBLIOGRAPHY[1] LIST OF RECENT PAPERS AND BOOKS WRITTEN BY MEMBERS OF THE INSTITUTE, PUBLISHED OR IN PRINT ELSEWHERE IN FOREIGN LANGUAGES

БИБЛИОГРАФИЯ[1] СПИСОК НОВЫХ РАБОТ ЧЛЕНОВ ИНСТИТУТА, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ДРУГИХ МЕСТАХ В ИНОСТРАННЫХ ЯЗЫКАХ

[1] Ádám, A.: ,,The quasi-series decompositions of two-terminal graphs." *Comptes rendus de la Conférence "Fondaments des Mathématiques, machines mathématiques, et ses applications" tenue a Tihany, 11—15 séptembre 1962."**

[2] Ádám, A.: ,,Einige offene Probleme der Schalttheorie." *Symposium on the theory of graphs and its applications, Smolenice.**

[3] Ádám, A.: ,,Bemerkungen zum graphentheoretischen Satze von I. Fidrich." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.**

[4] Ádám, A.—Culik, K.—Pollák, G.: ,,Ein Satz über teilweise gerichtete Graphen." *Чехословацкий математический журнал* **13** (88) (1963) 619—621.

[5] Adler, G.: ,,Maggiorazione delle tensioni in un corpo elastico mediante gli spostamenti superficiali." *Accademia Nazionale dei Lincei, Rend. Cl. Sci. fiz.-mat. nat. Ser.* 8. **34** (1963) 369—371.

[6] Adler, G.: ,,Majoration du gradient des solutions de l'équation $\Delta u - au_t' = f$." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.**

[7] Alexits, G.: ,,Sur quelques résultats et problèmes concernant la convergence et la sommabilité des séries orthogonales générales." *Revista de la Union Matematica Argentina* **20** (1962) 33—39.

[8] Alexits, G.: ,,*Проблемы сходимости ортогональных рядов.*" Изд. иностранной литературы, Москва, 1963.

[9] Andrásfai, B.: ,,Graphentheoretische Extremalprobleme." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.**

[10] Csáki, E.—Németh, E.: ,,Methods of mathematical statistics for evaluating electric breakdown measuring series." *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering* **7** (1963) 9—35.

[11] Csáki, P.—Fischer, J.—Juvancz, I.: ,,Evaluation of response curves by the use of extreme values." *Biometrics.**

[12] Császár, Á.—Czipszer, J.: ,,Sur des critères généraux d'approximation uniforme." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica.**

[13] Császár, Á.: ,,Transposition de structures syntopogênes." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica.*

[14] Császár, Á.: ,,Sur les limites extrêmes de fonctions d'intervalle." *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées.**

[15] Fenyő, I.: ,,Mathematische Methoden in der ärtzlichen Diagnostic" *Wiss. Nachr. der Techn. Univ. Dresden* **11** (1962) 79.

[16] Fenyő, I.: "Une Extention du Calcul Operationel." *Rend. Ist. di Alt. Mat.**

[17] Fejes-Tóth, L.—Heppes, A.: ,,Über stabile Körpersysteme." *Compositio Mathematica* **15** (1963) 119—126.

[18] Freud, G.: ,,Über ein Jackson'sches Approximationsverfahren." *Kolloquium über Approxinationstheorie (Oberwolfach).* Birkhäuser Verlag, Basel.*

[1] Papers or books with incomplete bibliographical data, marked by an asterisk, are in print.

[1] Работы с непольными библиографическими данными, отмечанные звездочкой, находятся в печати.

[19] FREUD, G.: ,,Über lineare Approximationsverfahren in kompakten topologischen Räumen." *Kolloquium über Approximationstheorie (Oberwolfach)*. Birhäuser Verlag, Basel.*

[20] FUCHS, L.: ,,Ranks of modules". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica.**

[21] FUCHS, L.: ,,Some generalization of the exact sequences concerning Hom and Ext." Proc. of Colloquium on Abelian Groups.*

[22] FUCHS, L.: *Partially ordered algebraic systems.* Akadémiai Kiadó — Pergamon Press, Budapest—Oxford—London—New York, IX 229.

[23] FUCHS, L.: ,,Note on factor groups in complete directs sums." *Bull. Acad. Polon. Sci.* **11** (1963) 39—40.

[24] FUCHS, L.: ,,On algebraically compact abelian groups." *Journ. of Nat. Sci. & Math.* **3** (1963) 73—83.

[25] FUCHS, L.: ,,Recent results and problems in abelian groups." Topics in Abelian Groups, 1963.

[26] GALLAI, T.: ,,Critical graphs". *Symposium on the theory of graphs and its applications, Smolenice.**

[27] GALLAI, T.—ERDŐS, P.: ,,Solution of a problem of Dirac." *Symposium on the theory of graphs and its applications, Smolenice.**

[28] KALMÁR, L.: ,,Algorithmische Sprache und Programmierung von Rechenautomaten." *Mathematische und physikalisch-technische Probleme aer Kybernetik* (Berlin, 1963), 147—176.

[29] KALMÁR, L.: ,,Über eine Variante des Neumannschen selbstreproduzierenden Automaten." *Mathematische und physikalisch-technische Probleme der Kybernetik* (Berlin, 1963), 522—528.

[30] KALMÁR, L.: ,,Über eine erkenntnistheoretische Wurzel des ,Anti-Kybernetismus'." *Kybernetik in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft der DDR* (Berlin, 1963),53—56.

[31] KALMÁR, L.: ,,On an algebraic theory of automatical digital computers." *Proceedings of the IFAC Conference on relay systems and finite automata, Moscow September—October* 1962.*

[32] KALMÁR, L.: ,,Sur un modèle algébrique de calculatrice automatique." *Comptes rendus du 3^{me} Congrès de l'Association Francaise de Calcul et de Traitement d'Information, Mai* 1963, *Toulouse.**

[33] KOVÁCS, I.: ,,Ergodic theorems for gages." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **24** (1963) 103—118.

[34] MAKAI, E.: ,,Sur la convergence des séries de Fourier des fonctions de carré sommable." *Comptes Rendus Ac. Sci. Paris* **257** (1963) 1893—1895.

[35] MAKAI, E.: ,,On the summability of the Fourier series of L^2 integrable functions I." *Publ. Math. (Debrecen).**

[36] MAKKAI, M.: "On a generalization of a theorem of E. W. Beth." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.a*

[37] MAKKAI, M.: ,,Solution of a problem of G. Grätzer concerning endomorphism semigroups". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungariae.**

[38] MUSZKA, D.: ,,Die Sicherheit des Kraftfahrzeugverkehrs und die Automatik." *Mathematische und physikalisch-technische Probleme der Kybernetik* (Berlin, 1963), 325—332.

[39] POLLÁK, G.: ,,Bemerkungen zur Holomorphentheorie der Ringe." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged).**
POLLÁK, G.: see [4].

[40] PRÉKOPA, A.: ,,On a storage problem." *Proceedings of the Colloquium on Applications of Mathematics in Economics Budapest, 1963, June 18—22.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964.*

[41] PRÉKOPA, A.: ,,On stochastic programming." *Revue International de l'Institut Statistique, Paris.**

[42] RÉDEI, L.: *Die Begründung der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrien.* Akadémiai Kiadó, Budapest.*

[43] RÉNYI, A.-ERDŐS, P.: ,,Remarks on a theorem of Obreanu." *Canadian Mathematical Bulletin* **6** (1963) 267—273.

[44] RÉNYI, A.: ,,On stable sequences of events." *Sankhya.*! Ser. A. 25 (1963) 293—302.

[45] RÉNYI, A.: ,,Un dialogue." Cahiers Rationalistes, No. 208—209, I—II. L'Enseignement Élémentaire des Mathématiques, Paris, 1963.

[46] RÉNYI, A.: ,,Sur les espaces simples des probabilités conditionnelles." *Annales de l'Institut H. Poincaré, Nouv. Sér.* 1.*

[47] RÉNYI, A.: „On the distribution of values of additive number theoretic functions." *Publicationes Mathematicae (Debrecen).* **10** (1963) 264—273.

[48] RÉNYI, A.: „On the foundations of information theory." ISI 34th Session, Ottawa, 1963.*

[49] RÉNYI, A.—RÉVÉSZ, P.: „A study of sequences of equivalent events as special stable sequences." *Publicationes Mathematicae (Debrecen).* **10** (1963) 319—325.

[50] RÉNYI, A.—RÉNYI, K.: „On 'small' coefficients of the power series of an entire function." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica.* **6** (1963) 27—38.

[51] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: „Probabilistic methods in graph theory." Journal d'Analyse.*

[52] RÉNYI, A.—SULANKE, R.: „Über die konvexe Hülle von *n* Zufällig gewählten Punkten, II." *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete.**

[53] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.—NEVEU, J.: „An elementary inequality between the probability of events." *Scandinavia Mathematica.* **13** (1963) 99—104.

[54] RÉNYI, A.: „On two mathematical models of the traffic on a divided highway." *Journal of Applied Probability.**

[55] SCHMIDT, E. T.: „Über endliche Zerlegungverbände." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica.**

[56] SCHMIDT, E. T.: „Unterstrukturverbänden und Kongruenzverbänden." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.**

[57] STEINFELD, O.: „Über Zerlegungssätze in radikalfreien und regulären (*)-Verbandshalbgruppen." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged).**

[58] SZABÓ, Á.—CALOGERO, G.: „Beltistos Logos." *La Cultura (Roma)* **1** (1963) 607—630.

[59] SZÁSZ, F.: „Über Artinsche Ringe." *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys.* **11** (1963) 351—354.

[60] SZÁSZ, F.: „Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe.„ *Monatshefte für Mathematik* **67** (1963) 359—362.

[61] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: „Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique." *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris* **256** (1963) 3236—3238.

[62] SZŐKEFALVI-NAGY, B.—FOIAŞ, C.: „Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert." *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris* **256** (1963) 3413—3415.

[63] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: „Un calcul fonctionnel pour opérateurs linéaires de l'espace hilbertien et certaines de ses applications." *Studia Math.*, Seria Specjalna, Z. I. (1963) 119—127.

[64] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: „The 'Outer Functions' and their rôle in functional calculus." *Proc. of the International Congress of Math.* (1962) 421—425.

[65] SZŐKEFALVI-NAGY, B.—FOIAŞ, C.: „Sur les contractions de l'espace de Hilbert VII." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged).**

[66] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: „Isometrical flows in Hilbert space." *Cambridge Phil. Mag.**

[67—68] TURÁN, P.—KNAPOWSKI, S.: „Further developments in the comparative prime number theory I, II." *Acta Arithmetica.**

[69] TURÁN, P.—KNAPOWSKI, S.: „On an assertion of Chebyshev." *Journal d'Analyse Math.**

[70—71] TURÁN, P.—DANCS, Z.: „On the distribution of values of entire-functions defined by differential-equations I, II." *Publicationes Mathematicae (Debrecen).**

[72] VARGA, O.: »Herleitung des Cartanschen euklidischen Zusammenhänge in Finslerräumen mit Hilfe der Riemannschen Geometrie.« *Acta Phys. Debrecina* **8** (1962) 121—124.

[73] VARGA, O.: „Über Hyperflächen konstanter Normalkrümmung." *Tensor.**

[74] VINCZE, I.: „Über das Ehrenfestsche Modell der Wärmeübertragung." *Archiv der Mathematik.**

[75] VINCZE, I.: „Über einige Fragen der biometrischen Anwendungen der Mathematik." *Biometrische Zeitschrift.**

EXACT DATA OF PAPERS MENTIONED EARLIER WITH INCOMPLETE BIBLIOGRAPHICAL DATA[2]

ТОЧНЫЕ ДАННЫЕ РАБОТ ПРИВЕДЕННЫХ РАНЬШЕ С НЕПОЛНЫМИ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ[2]

V.: [77] TURÁN, P.: „Untersuchungen über Dirichlet-Polynome." *Heft 13 der Schriftenreihe der Institute für Mathematik* (1963) 71—79.

VII.: [14] CSÁKI, P.—FISCHER, J.: „Analysis of reaction curves by extreme values." *Acta Medica Academiae Scientiarum Hungaricae* **18** (1962) 363—370.

VII.: [16] CSÁSZÁR, Á.: *Grundlagen der allgemeinen Topologie*. Akadémiai Kiadó Budapest, Teubner Verlag, Leipzig, 1963, 367. o.

VII.: [25] GRÄTZER, G.—SCHMIDT, E. T.: „Characterisations of congruence lattices of abstract algebras." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **24** (1963) 34—59.

VII.: [33] RÉDEI, L.: *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen*. Budapest—Leipzig—Würzburg, 1963.

VII.: [42] HAJÓS, GY.—SURÁNYI, J.—NEUKOMM, GY.: *Hungarian Problem Book I—II*. Random House, New York, L.W. Singer Co, Syracusa, 1963, VII+111, VII+120.

VII.: [55] SZÜSZ, P.: „Über die metrische Theorie der diophantischen Approximation II." *Acta Arithmetica* **8** (1963) 225—241.

VII.: [59] TURÁN, P.—SZEGŐ, G.: „On the monotone convergence of certain Riemann-sums." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **8** (1961) 326—335.

VII.: [60] TURÁN, P.: „On a certain problem in the theory of power-series with graps." Studies in Mathematical Analysis and Related Topics (Essays in Honor of G. Polya), Stanford University Press, 1962, pp. 404—409.

VIII.: [8] BÁNKÖVI, GY.—VAS, É.: „Erfahrungen bei der Einführung der statistischen Qualitätskontrolle in der Schraubenfertigung." *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-naturwissenschaftliche Reihe* **12** (1963) 771—776; und *Fertigungstechnik und Betrieb* **13** (1963) 700—703.

VIII.: [11] CSÁKI, E.—VINCZE, I.: „On some combinatorial relations concerning the symmetric random walk." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **24** (1963) 231—235.

VIII.: [14] CSÁSZÁR, Á.: „Sur les critères locaux de monotonité." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **5** (1962) 43—50.

VIII.: [15] FENYŐ, I.: „Eine Bemerkung über die lineare abhängigen Funktionen." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **9** (1962) 240—242.

VIII.: [22] GEHÉR, L.—FOIAŞ, C.: „Über die Weylsche Vertauschungsrelation." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **24** (1963) 97—102.

VIII.: [49] SCHMIDT, E. T.: „Universalen Algebren mit gegebenen Automorphismengruppen und Unteralgebrenverbänden." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **24** (1963) 251—254.

VIII.: [50] SCHMIDT, E. T. „Über die Kongruenzverbände der Verbände.« *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **9** (1962) 243—256.

VIII.: [52] SERES, I.: „Über die Irreduzibilität gewisser Polynome." *Acta Arithmetica* **8** (1963) 315—335.

VIII.: [53] STEINFELD, O.: „Über Semiringe mit multiplikativer Kürzungsregel." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **24** (1963) 190—195.

VIII.: [58] SZABÓ, Á.: „Der mathematische Begriff δύναμις und das sog. geometrische Mittel." *Maia (Firenze)* **15** (1963) 220—256.

VIII.: [77] VARGA, O.: „Eine einfache Herleitung des Cartanschen Übertragung der Finslergeometrie." *Mathematicae Notae* **18** (1962) 185—196.

VIII.: [80] VINCZE I.: „On some combinatorial relations concerning the symmetric random walk." *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées* **8** (1963) 263—266.

[2] The numbers preceding the serial numbers refer to the volume containing the respective list of papers.

[2] Римская цифра стоящая перед номером работы оказывает на том в котором фигурирует работа с неполными библиографическими данными.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Vidosa László

A kézirat nyomdába érkezett: 1964. II. 26 — Példányszám: 800 — Terjedelem: 21,3 (A/5) ív

64.59002 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. A közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft. *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержашие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия A и B. Серия A выходит на иностранных языках, Серия B — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусках серии A и одного выпуска серии B. Статьи снабжены с резюмами на языках отличающих от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers and papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft ($ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

Ára: 30,— Ft

INDEX

INDEX СОДЕРЖАНИЕ

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

IX. ÉVFOLYAM, A. SOROZAT, 3. FÜZET

1964

*

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ IX, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 3.

1964

*

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME IX, SERIES A, FASC. 3.

1964

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1965

INDEX СОДЕРЖАНИЕ

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

IX. ÉVFOLYAM, A. SOROZAT, 3. FÜZET

1964

*

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ IX, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 3.

1964

*

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME IX, SERIES A, FASC. 3.

1964

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST

1965

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. A közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft. *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержашие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусках серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюмами на языках отличающих от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers and papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft ($ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

ON THE TWIN-PRIME PROBLEM I

by

P. TURÁN

1. The twin-prime problem, which was stated by LANDAU in his Cambridge-Congress lecture in 1912 as the second main problem of the analytical number theory asks whether or not there exists an infinity of prime-pairs (p, q) with $p - q = 2$ or more generally with $p - q = 2\,l$ (l fixed integer). This problem is unsolved up to now though the first explicit remarks on it were made probably by EULER. The classical paper of HARDY and LITTLEWOOD[1] laid down the fundaments of an analytical treatment of additive number theoretical problems and made clear the deep connection of them with the distribution of zeros of DIRICHLET's L-functions. In the case of the twin-prime problem they were led only to the heuristical formula

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{p=q+2l\\ p\leq x}} \log p \cdot \log q = 2\,A \prod_{\substack{q|l\\ q>2}} \frac{q-1}{q-2}, \tag{1.1}$$

where empty product means always 1 and A stands for the Hardy—Littlewood constant

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p\geqq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \sim 0{,}66\ . \tag{1.2}$$

Asymptotic formulae for the number of twin-primes as easy consequences of the formula (1.1) have been checked numerically to a rather large extent; but counts do not prove and as they say (p. 68. l. c.) "it is only proofs that count".

2. The attack of HARDY—LITTLEWOOD l.c. to solve the ternary Goldbach problem was — after the first complete proof of VINOGRADOFF — completed by LINNIK[2] and ČUDAKOV,[3] using density theorems concerning the zeros of L-functions. Hence the proof depends roughly speaking "on *all* zeros of all L-functions". Though Goldbach's problem and twin-prime problem were generally accepted to be closely related (HARDY—LITTLEWOOD called them on p. 40 l.c. as conjugate problems) we want to call the attention in this note to the fact that *the solution of the twin-prime problem depends only upon the non-trivial L-zeros of the Dirichlet L-functions with*

$$|\, Im\,\varrho \,| \leqq e^4 \tag{2.1}$$

[1] *Acta Math.* **44** (1922) 1—70.
[2] *Doklady Acad. Nauk SSSR* 1945. p. 3—7.
[3] *Annals of Math.* 1947. p. 515—545.

i.e. upon the "small" L-zeros. We shall confine ourselves for the sake of simplicity to the case of the "genuine" twin-primes i.e. to the case $p - q = 2$. The above conclusion we shall draw from formula (2.4) below, *which holds without any unproved conjectures.* Let for any integer $r \geqq 2$ the function $R_r(x)$ be defined[4] by

$$R_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^r \cos xt\, dt. \tag{2.2}$$

We shall denote the characters belonging to the multiplicative group of the reduced residue classes mod k by $\chi(n, k)$ (since k will change) the complex variable by $s = \sigma + it$, the Dirichlet L-functions belonging to $\chi(n, k)$ by $L(s, k, \chi)$ and its non-trivial zeros by $\varrho(\chi) = \sigma_\varrho(\chi) + it_\varrho(\chi)$; by

$$\sum_{\chi \bmod k}{}^{*} \chi(b, k)\, g(s, \chi) \tag{2.3}$$

we want to indicate that the summation is extended to the *primitive* characters belonging to the modulus k (or shortly to *primitive* characters mod k). Then we assert the following

Theorem. *For arbitrary small $\eta > 0$ and $\omega > \omega_0(\eta)$ the inequality*

$$\Bigg| \sum_{\substack{p,q \text{ primes} \\ q = p+2 \\ \omega^{1/4} \leqq p \leqq \omega}} \frac{\log p \log q}{p} R_\nu(2\nu - \log p) - 2A - \tag{2.4}$$

$$- \sum_{\substack{k \leqq \omega \\ k \text{ odd}}} \frac{\mu(k) \log k}{\varphi(k)} \sum_{d/k} \sum_{\chi \bmod d}{}^{*} \bar\chi(-2, d) \cdot \left\{ \sum_{\substack{\varrho(\chi) \\ |t_\varrho(\chi)| \leqq e^4}} \left(e^{2(\varrho-1)} \frac{e^{1-\varrho} - e^{\varrho-1}}{2(1-\varrho)} \right)^{\nu} \right\} \Bigg| \leqq \eta$$

holds, if only the integer ν is any integer with

$$0{,}3 \log \omega \leqq \nu \leqq 0{,}33 \log \omega\,.$$

This is perhaps the first explicitly stated relation connecting the twin-primes with finitely many L-roots. The critical expression in (2.4) is obviously of power-sum-type and hence the difficulty is again reduced to a "one-sided power-sum-theorem"; a type of theorems which led already to several new results in the analytical number-theory.[5] The one-sided theorem[6] however, which was the basis of these new results, assures in its present form an integer ν with the required property only in intervals of length $\geqq \omega^2 \log \omega$.

On the left-side of (2.4) one could replace

$$\sum_{\substack{k \leqq \omega \\ k \text{ odd}}} \text{ by } \sum_{\substack{\log \omega \leqq k \leqq \omega \\ k \text{ odd}}}.$$

---

[4] One could prove that $R_r(x)$ is (even and) positive and monotonically decreasing in the strict sense for $0 \leqq x < r$ and 0 for $x \geqq r$. But these facts are not used in the sequel.

[5] See e.g. our series „Comparative prime-number-theory I—VIII" published in collaboration with S. Knapowski in vol. XIII and XIV of *Acta Math. Hung.* and some further developments to be published jointly in a new series in *Acta Arithmetica.*

[6] See my paper in *Acta Math. Hung.* T. XI fasc. 3—4 (1960).

If the Riemann—Piltz conjecture is supposed to be true then with an arbitrary $a \geqq \log 2$ and

$$\beta > \log \frac{e^{3a} + 1}{3(e^a - 1)}$$

one could prove mutatis mutandis the inequality

$$\frac{1}{a} \sum_{\substack{e^{(\beta-a)\nu} \leqq p \leqq e^{(\beta+a)\nu} \\ p-q=2}} \frac{\log p \log q}{\sqrt{p}} \cdot R_\nu\left(\frac{\beta_\nu - \log n}{a}\right) = 2A\left(e^{\frac{\beta}{2}} \frac{e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}}{a}\right)^\nu (1 + o(1)) +$$

$$+ \sum_{\substack{k \leqq \omega \\ k \text{ odd}}} \frac{\mu(k) \log k}{\varphi(k)} \cdot \left\{\sum_{d/k} \sum_{\chi \bmod d}^{*} \bar{\chi}(-2, d) \sum_{|t_\varrho(\chi)| \leqq e^\gamma} \left(e^{\beta i t_\varrho(\chi)} \frac{\sin a\, t_\varrho(\chi)}{a\, t_\varrho(\chi)}\right)^\nu\right\},$$

if only

$$\gamma > \frac{\beta}{2} + \frac{3}{2} a + \log \frac{a}{e^a - 1}$$

and ν is any integer with

$$\frac{1}{2\beta - \log \dfrac{e^{2a} + 1}{3(e^a - 1)}} \log \omega \leqq \nu \leqq \frac{1}{\beta + a} \log \omega .$$

In this case the summation $\sum\limits_{\substack{k \leqq \omega \\ k \text{ odd}}}$ on the right of (2.5) can be replaced by $\sum\limits_{\substack{\omega^\vartheta \leqq k \leqq \omega \\ k \text{ odd}}}$ with a $\vartheta > 0$.

In the critical sum in (2.4) the same primitive character occurs several times. To eliminate this fact we write it in the form

$$\sum_{\substack{d \leqq \omega \\ d \text{ odd}}} \left\{\sum_{\chi \bmod d}^{*} \bar{\chi}(-2, d) \sum_{\substack{\varrho(\chi) \\ |t_\varrho(\chi)| \leqq e^4}} \left(e^{2(\varrho-1)} \frac{e^{1-\varrho} - e^{\varrho-1}}{2(1-\varrho)}\right)^\nu\right\} \cdot \left\{\sum_{\substack{k \leqq \omega \\ k \text{ odd},\, k \equiv 0 \bmod d}} \frac{\mu(k) \log k}{\varphi(k)}\right\}.$$

Putting in the last sum

$$k = dk_1,\ (k_1, 2) = (k_1, d) = 1$$

this becomes

$$\frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{k_1 \leqq \frac{\omega}{d} \\ (k_1, 2d) = 1}} \frac{\mu(k_1) \log dk_1}{\varphi(k_1)}.$$

If the Riemann—Piltz conjecture is supposed to be true then one could show that the critical sum can be written — with $o(1)$ error — in the form

$$2A \sum_{\substack{d \leq \omega \\ d \text{ odd}}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \left(\prod_{\substack{p/d \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \right) \cdot \left\{ \sum_{\chi \bmod d}^{*} \overline{\chi}(-2, d) \sum_{\substack{\varrho(\chi) \\ |t_\varrho(\chi)| \leq e^4}} \left(e^{2(\varrho-1)} \frac{e^{1-\varrho} - e^{\varrho-1}}{2(1-\varrho)} \right)^{\nu} \right\}. \tag{2.7}$$

To a further discussion of related formulae we shall return in a further paper.

3. For the proof of our theorem — differently from the previous approaches to the problem and much more directly — we start in the half-plane $\sigma > 1$ from the function

$$F_\omega(s) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} \sum_{\substack{1 \leq k \leq \omega \\ k \text{ odd} \\ k/n+2}} \mu(k) \log k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n \frac{\Lambda(n)\, a_\omega(n)}{n^s}. \tag{3.1}$$

We split it into three parts

$$Z_1(s) = \sum_{\substack{n \leq \omega-2 \\ n \text{ odd}}} \frac{\Lambda(n)\, a_\omega(n)}{n^s} \tag{3.2}$$

$$Z_2(s) = \sum_{\substack{n \leq \omega-2 \\ n \text{ even}}} \frac{\Lambda(n)\, a_\omega(n)}{n^s} \tag{3.3}$$

$$Z_3(s) = \sum_{n > \omega-2} \frac{\Lambda(n)\, a_\omega(n)}{n^s}. \tag{3.4}$$

As to $Z_1(s)$ we have obviously

$$a_\omega(n) = -\sum_{k/n+2} \mu(k) \log k = \Lambda(n+2)\,;$$

hence

$$Z_1(s) = \sum_{\substack{n \leq \omega-2 \\ n \text{ odd}}} \frac{\Lambda(n)\, \Lambda(n+2)}{n^s}. \tag{3.5}$$

As to $Z_2(s)$ only the terms with $n = 2^\lambda$ can be nonvanishing. The contribution of $n = 2$ is obviously 0; for $n = 2^\lambda$ with $\lambda \geq 2$ we have

$$a_\omega(2^\lambda) = -\sum_{k/(2^{\lambda-1}+1)} \mu(k) \log k = \Lambda(2^{\lambda-1}+1)$$

i.e.

$$Z_2(s) = \sum_{4 \leq 2^\lambda \leq \omega-2} \frac{\Lambda(2^{\lambda-1})\, \Lambda(2^{\lambda-1}+1)}{2^{\lambda s}}. \tag{3.6}$$

Hence we have the representation

$$(3.7)\quad F_\omega(s) = \sum_{\substack{n \le \omega - 2 \\ n \text{ odd}}} \frac{\Lambda(n)\,\Lambda(n+2)}{n^s} + \sum_{4 \le 2^\lambda \le \omega - 2} \frac{\Lambda(2^{\lambda-1})\,\Lambda(2^{\lambda-1}+1)}{2^{\lambda s}} + Z_3(s)$$

valid for $\sigma > 1$.

4. On the other hand changing the order of summations in (3.1) we get for

$$(4.1)\quad \begin{aligned} F_\omega(s) &= -\sum_{\substack{k \le \omega \\ k \text{ odd}}} \mu(k) \log k \sum_{n \equiv -2(k)} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \\ &= \sum_{\substack{k \le \omega \\ k \text{odd}}} \frac{\mu(k)\log k}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \chi(-2, k) \frac{L'}{L}(s, k, \chi). \end{aligned}$$

Next we try to introduce primitive characters. As obvious from (4.1) it suffices to consider *squarefree* k-moduli. If $\chi(n, k)$ is equivalent to a primitive character $\chi^*(n, k^*)$, k^*/k then, as well-known

$$L(s, k, \chi) = L(s, k^*, \chi^*) \prod_{p / \frac{k}{k^*}} \left(1 - \frac{\chi^*(p, k^*)}{p^s}\right)$$

i.e.

$$(4.2)\quad \begin{aligned} \frac{L'}{L}(s, k, \chi) &= \frac{L'}{L}(s, k^*, \chi^*) + \sum_{p / \frac{k}{k^*}} \frac{\chi^*(p, k^*) \log p}{p^s - \chi^*(p, k^*)} = \\ &= \frac{L'}{L}(s, k^*, \chi^*) + \sum_{p / \frac{k}{k^*}} \log p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi^*(p^r, \chi^*)}{p^{rs}}. \end{aligned}$$

Hence from (4.1) — with the convention (2.3) — we get the second representation

$$(4.3)\quad \begin{aligned} F_\omega(s) &= \sum_{\substack{k \le \omega \\ k \text{odd}}} \frac{\mu(k)\log k}{\varphi(k)} \sum_{d/k} \sum_{\chi \bmod d}{}^{*} \bar{\chi}(-2, d) \frac{L'}{L}(s, d, \chi) + \\ &+ \sum_{\substack{k \le \omega \\ k \text{odd}}} \frac{\mu(k)\log k}{\varphi(k)} \sum_{d/k} \sum_{\chi \bmod d}{}^{*} \chi^*(-2, d) . \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi^*(p^r, d) \log p}{p^{rs}} \right\} \overset{\text{def}}{=} G_1(s) + G_2(s) \end{aligned}$$

which gives at the same time the analytical continuation of $F_\omega(s)$ for $\sigma > 0$ (we do not need more).

5. We shall need the

Lemma I. *For* $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{100}$ *we have for* $\sigma \geqq \varepsilon$ *the inequality*

$$| G_2(s) | \leqq c_1(\varepsilon)\log^6 \omega$$

where $c_\nu(\varepsilon)$ *depend only upon* ε.

Proof. First we consider the sum

$$s_d(b) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\chi \bmod d}{}^{*} \chi(b, d) \tag{5.1}$$

with the convention (2.3), for square-free odd

$$d = q_1 q_2 \ldots q_a \qquad (q_j \text{ different primes}).$$

If g_j are primitive roots $\bmod q_j$ and ξ_j are determined by

$$b \equiv g_j^{\xi_j} \bmod q_j \qquad 0 \leqq \xi_j \leqq q_j - 2$$

$$j = 1, 2, \ldots, a$$

further

$$1 \leqq \nu_j \leqq q_j - 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, a$$

then

$$\chi(b, d) = e^{2\pi i \left(\frac{\nu_1 \xi_1}{q_1 - 1} + \ldots + \frac{\nu_a \xi_a}{q_a - 1}\right)}.$$

Since $\chi(b, d)$ is primitive if and only if $1 \leqq \nu_j \leqq q_j - 2$ and thus

$$s_d(b) = \prod_{j=1}^{a} s_{q_j}(b)$$

and

$$s_{q_j}(b) = \begin{matrix} q_j - 2 \\ -1 \end{matrix} \text{ if } b \begin{matrix} \equiv \\ \not\equiv \end{matrix} 1 \bmod q_j$$

we have for odd square-free d

$$| s_d(b) | = \prod_{q_j/(b-1,d)} (q_j - 2)\,.$$

Hence

$$| s_d(b) | < \prod_{q_j/(b-1,d)} q_j \leqq (b - 1, d)\,. \tag{5.2}$$

Now we write $G_2(s)$ in the form

$$G_2(s) = \sum_{\substack{k \leqq \omega \\ k \text{ odd}}} \frac{\mu(k) \log k}{\varphi(k)} \sum_{d/k} \sum_{p/\frac{k}{d}} \log p \sum_{r=1}^{\infty} p^{-rs} \cdot \left\{ \sum_{\chi \bmod d}{}^{*} \overline{\chi}(-2, d)\, \chi(p^r, d) \right\}. \tag{5.3}$$

The last sum is obviously

$$\sum_{\chi \bmod d}{}^{*} \chi\big(p^r(-2)^{-1}, d\big) = s_d\big(p^r(-2)^{-1}\big)\,.$$

Hence from (5.3) and (5.2) we get for $\sigma > 0$ — taking in account

$$p^\nu(-2)^{-1} - 1 \equiv p^\nu + 2 \bmod q_j \; -$$

the inequality

$$|G_2(s)| \leqq \sum_{\substack{k \leq \omega \\ k \text{ odd}}} \frac{|\mu(k)| \log k}{\varphi(k)} \sum_{d/k} \sum_{p/\frac{k}{d}} \log p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(p^r + 2, d)}{p^{r\sigma}} <$$

(5.4)
$$< \log^2 \omega \sum_{\substack{k \leq \omega \\ k \text{ odd}}} \frac{|\mu(k)|}{\varphi(k)} \sum_{d/k} \sum_{p/\frac{k}{d}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(p^r + 2, d)}{p^{r\sigma}} .$$

Since k is square-free we can write

$$d = k_1, \qquad \frac{k}{d} = k_2, \qquad (k_1, k_2) = 1$$

and hence from (5.4) for $\sigma \geqq \varepsilon$

$$|G_2(s)| \leqq \log^2 \omega \sum_{\substack{k_1 k_2 \leq \omega \\ (k_1,2)=(k_2,2)=(k_1,k_2)=1}} \frac{|\mu(k_1)\mu(k_2)|}{\varphi(k_1)\,\varphi(k_2)} \sum_{p/k_2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(p^r + 2, k_1)}{p^{r\varepsilon}} \leqq$$

$$\leqq \sum_{3 \leq p \leq \omega} \sum_{\substack{k_1 \leq \omega \\ k_1 \text{ odd}}} \frac{1}{\varphi(k_1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(p^r + 2, k_1)}{p^{r\varepsilon}} \sum_{\substack{k_2 \leq \frac{\omega}{k_1} \\ k_2 \equiv 0 \bmod p}} \frac{1}{\varphi(k_2)} .$$

Since (roughly)

$$\varphi(m) > c_2 \frac{m}{\sqrt{\log m}} ,$$

the last sum is

$$< \frac{1}{c_2} \sqrt{\log \omega} \sum_{\substack{k_2 \leq \omega \\ k_2 \equiv 0 \bmod p}} \frac{1}{k_2} < c_3 \frac{\log^{3/2} \omega}{p}$$

and hence

(5.5)
$$|G_2(s)| < c_3 \log^4 \omega \sum_{p \leq \omega} \frac{1}{p} \sum_{k_1 \leq \omega} \frac{1}{k_1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(p^r + 2, k_1)}{p^{r\varepsilon}} =$$
$$= c_3 \log^4 \omega \sum_{p \leq \omega} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1+r\varepsilon}} \sum_{k_1 \leq \omega} \frac{(p^r + 2, k_1)}{k_1} .$$

If $\tau(m)$ stands for the number of positive divisors of m then the last sum in (5.5) is

$$< \sum_{\delta/(p^r+2)} \delta \sum_{\substack{\delta/k_1 \\ k_1 \leq \omega}} \frac{1}{k_1} = \sum_{\delta/(p^r+2)} \delta \sum_{k_3 \leq \frac{\omega}{\delta}} \frac{1}{\delta\, k_3} < 2 \sum_{\delta/(p^r+2)} \log \omega = 2 \log \omega \cdot \tau(p^r + 2)$$

or, since $\tau(p^r + 2) < c_4(\varepsilon) p^{\frac{r\varepsilon}{2}}$,

$$< c_4(\varepsilon) p^{\frac{r\varepsilon}{2}} \log \omega .$$

Hence from (5.5)

$$| G_2(s) | \leqq c_5(\varepsilon)\log^5 \omega \sum_{p\leqq\omega} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1+\frac{r\varepsilon}{2}}} < c_6(\varepsilon)\log^5 \omega \sum_{p\leqq\omega} \frac{1}{p} < c_{\varepsilon}(\omega)\log^6 \omega . \quad \text{Q.e.d.}$$

6. We shall need some integral-formulae too. Putting with integer $\nu \geqq 2$ and

$$\beta > a > 0$$

$$f_\nu(s) \overset{\text{def}}{=} \left(e^{\beta s}\frac{e^{as} - e^{-as}}{2as}\right)^{\nu} \tag{6.1}$$

we assert the[7]

Lemma II. *With the notation* (2.2) *we have*

$$J(n) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{f_\nu(s)}{n^s} ds = \frac{1}{a} R_\nu\left(\frac{\beta\nu - \log n}{a}\right)$$

for

$$e^{\nu(\beta-a)} \leqq n \leqq e^{\nu(\beta+a)} \tag{6.2}$$

and 0 *otherwise.*

For $n \geqq e^{(\beta+a)\nu}$ we have

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{f_\nu(s)}{n^s} ds = \frac{1}{(2a)^\nu}\sum_{d=0}^{\nu}(-1)^d\binom{\nu}{d}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{e^{\{\beta\nu - \log n + a(\nu-2d)\}s}}{s^\nu} ds = 0$$

indeed since

$$\beta\nu - \log n + (\nu - 2d)\, a \leqq (\beta + a)\,\nu - \log n \leqq 0$$

and as well-known

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{e^{\gamma s}}{s^\nu} ds = 0 \qquad \text{for} \qquad \gamma \leqq 0\,.$$

Further we have obviously

$$J(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(-1)} \frac{f_\nu(s)}{n^s} ds$$

and hence for $n \leqq e^{(\beta-a)\nu}$

$$J(n) = \frac{1}{(2a)^\nu}\sum_{d=0}^{\nu}(-1)^\nu\binom{\nu}{d}\frac{1}{2\pi i}\int_{(-1)}\frac{e^{\{\beta\nu - \log n + (\nu-2d)a\}s}}{s^\nu} ds = 0$$

[7] I realised the usefulness of this "kernel" $f_\nu(s)$ first in my paper "On the so-called density-hypothesis in the theory of zeta-function of Riemann" *Acta Arith.* **IV** (1958) p. 31—56. We reproduce the proof here for the sake of completeness.

since

$$\beta\nu - \log n + (\nu - 2d)a \geqq (\beta - a)\nu - \log n \geqq 0$$

and as well-known

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(-1)}^{\infty} \frac{e^{\gamma s}}{s^\nu} ds = 0 \qquad \text{for} \qquad \gamma \geqq 0\,.$$

Finally for (6.2) we have — shifting the line of integration to the imaginary axis —

$$J(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin at}{at}\right)^\nu e^{it(\beta\nu - \log n)} dt = \frac{1}{a} R_\nu\left(\frac{\beta\nu - \log n}{a}\right)$$

indeed.

7. We shall need[8] further the

Lemma III. *The series*

$$S_{l_1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(n,l_1)=1} \frac{\mu(n)\log n}{\varphi(n)}$$

is convergent. Moreover we have (for odd l_1 the sum 0 and) for even l_1

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,l_1)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{\varphi(n)} = -2A \prod_{\substack{p|l_1\\p>2}} \frac{p-1}{p-2} + O\left(\frac{1}{\log^{10} x}\right)$$

[see (1.1) and (1.2)].

For the proof we start from

$$g(s) = \sum_{\substack{n=1\\(n,l_1)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \cdot \frac{1}{n^s} \tag{7.1}$$

regular for $\sigma > 0$. We have obviously

$$g(s) = \prod_{(p,l_1)=1} \left(1 - \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p^s}\right) \tag{7.2}$$

and hence

$$\begin{aligned} g'(s) &= -\sum_{\substack{n=1\\(n,l_1)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{\varphi(n)} \cdot \frac{1}{n^s} = g(s)\left(\log g(s)\right)' = \\ &= g(s) \sum_{(p,l_1)=1} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{p^s}\right)} \cdot \frac{\log p}{(p-1)p^s} \stackrel{\text{def}}{=} g(s)\, g^*(s)\,. \end{aligned} \tag{7.3}$$

[8] Actually we shall need here only the case $l_1 = 2$.

But

$$g(s) = \prod_{(p,l_1)=1}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)\prod_{(p,l_1)=1}\left\{1-\frac{1}{(p-1)\,p^{s+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s+1}}}\right\} =$$

(7.4)
$$\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{L(s+1, l_1, \chi_0)}\, U_1(s)$$

where $U_1(s)$ — and later $U_2(s), \ldots,$ — are regular in $\sigma \geqq -\frac{1}{2}+\varepsilon$ satisfying here the inequality

$$\frac{1}{c_7(\varepsilon)} \leqq |\, U_\nu(s)\,| \leqq c_7(\varepsilon)\,.$$

Hence from (7.3) we get

$$g^*(s) = -\frac{L'}{L}(s+1, l_1, \chi_0) + U_2(s)$$

i.e. from (7.3) for $\sigma > 0$

(7.5)
$$\sum_{(n,l_1)=1}\frac{\mu(n)\log n}{\varphi(n)}\cdot\frac{1}{n^s} = \frac{L'(s+1, l_1, \chi_0)}{L(s+1, l_1, \chi_0)^2}\, U_1(s) + \frac{U_3(s)}{L(s+1, l_1, \chi_0)}\,.$$

Since the function on the right-side is regular at $s = 0$, routin-methods lead to the formula

(7.6)
$$\sum_{\substack{n\leqq x\\(n,l_1)=1}}\frac{\mu(n)\log n}{\varphi(n)} = U_1(0)\lim_{s\to 1}\frac{L'(s, l_1, \chi_0)}{L(s, l_1, \chi_0)^2} + O\left(\frac{1}{\log^{10} x}\right).$$

Since

$$L(s, l_1, \chi_0) = \zeta(s)\prod_{p/l_1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

we have

$$\lim_{s\to 1}\frac{L'(s, l_1, \chi_0)}{L(s, l_1, \chi_0)^2} = -\prod_{p/l_1}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

i.e. from (7.6) the first term on the right is

$$-\frac{\prod_{(p,l_1)=1}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\prod_{p/l_1}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\,.$$

This is obviously 0 if l_1 is odd. For even l_1 this is

$$-2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\cdot\prod_{\substack{p/l_1\\ p>2}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)}=$$

$$=2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p/l_1\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}=2A\prod_{\substack{p/l_1\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}$$

with the convention of (1.1) and A from (1.2)[9].

8. Returning to the proof of our theorem we take $f_\nu(s)$ from (6.1) with

(8.1) $$\alpha=1,\qquad \beta=2.$$

Then one has

(8.2) $$\beta>\log\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2\alpha}$$

(8.3) $$\beta>\frac{1}{2}\log\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{4\alpha}$$

(8.4) $$\beta>\alpha+\log\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{4\alpha}$$

or

(8.5) $$\frac{1}{2\beta-\log\dfrac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{4}}<\frac{1}{\beta+\alpha}.$$

Hence one can find γ_1 and γ_2 with

(8.6) $$\frac{1}{2\beta-\log\dfrac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{4\alpha}}<\gamma_1<\gamma_2<\frac{1}{\beta+\alpha}$$

[9] It is perhaps not uninteresting to note that e.g. in the case $l_1=2$ the various heuristical approaches led to the constant $2A$ through different series. Hardy—Littlewood got it by summing the series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)^2}\sum_{(r,n)=1}{}' e^{\frac{2\pi i 2r}{n}}$$

Selmer, Lord Cherwell and S. W. Golomb got $2A$ directly through probabilistic reasonings. S. W. Golomb got it in his thesis also by summing the series

$$\frac{1}{4}\sum_{n\,\text{odd}}\frac{\mu(n)\,2^{\nu(n)}\log^2 n}{n}$$

where $\nu(n)$ stands for the number of different prime-factors of n [See *Math. Monthly* **67** (1960) p.767].

and we fix them so.[10] Restricting the integer ν to the interval

$$(8.7) \qquad \gamma_1 \log(\omega - 2) \leqq \nu \leqq \gamma_2 \log(\omega - 2)$$

$$\omega \geqq 100$$

we start from the integral

$$(8.8) \qquad H(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} F_\omega(s+1) f_\nu(s) ds .$$

9. First we use the representation (3.7) of $F_\omega(s)$. Writing it as

$$F_\omega(s) = \sum \frac{A_n}{n^s}$$

this gives owing to lemma II

$$H(\nu) = \sum_n \frac{A_n}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{f_\nu(s)}{n^s} ds = \sum_{e^\nu \leqq n \leqq e^{3\nu}} \frac{A_n}{n} \cdot R_\nu(2\nu - \log n) .$$

Since from (8.6) and (8.7) we have

$$e^{3\nu} < \omega - 2 ,$$

the coefficient-formulae (3.4) and (3.7) give

$$(9.1) \qquad \begin{aligned} H(\nu) = & \sum_{\substack{e^\nu \leqq n \leqq e^{3\nu} \\ n \text{ odd}}} \frac{\Lambda(n)\Lambda(n+2)}{n} R_\nu(2\nu - \log n) + \\ & + \sum_{e^\nu \leqq 2^\lambda \leqq e^{3\nu}} \frac{\Lambda(2^{\lambda-1})\Lambda(2^{\lambda-1}+1)}{2^\lambda} R_\nu(2\nu - \log 2^\lambda) . \end{aligned}$$

Since for real x from (2.2)

$$| R_\nu(x) | \leqq R_\nu(0) < 1 ,$$

the second sum in (9.1) is, using (8.7), absolutely

$$(9.2) \qquad \leqq \sum_{\lambda > \nu} \frac{\lambda \log 2}{2^\lambda} = o(1)$$

if $\omega \to +\infty$. Further the contribution of $n = p^\alpha$ with $\alpha \geqq 2$ to the first sum in (9.1) is for $\omega \to +\infty$

$$< \sum_{\substack{e^\nu \leqq p^\alpha \leqq e^{3\nu} \\ \alpha \geqq 2, p \geqq 3}} \frac{\log^2(p^\alpha + 2)}{p^\alpha} < c_8 \nu^2 \sum_{\substack{e^{3\nu} \geqq n^\alpha \geqq e^\nu, n \geqq 3 \\ \alpha \geqq 2}} \frac{1}{n^\alpha} < c_g \nu^3 e^{-\frac{\nu}{2}} = o(1)$$

and that of $n = q^\beta - 2$, $\beta \geqq 2$ analogously $o(1)$. Hence we got on one hand for $\omega \to +\infty$

$$(9.3) \qquad H(\nu) = \sum_{\substack{e^\nu \leqq p \leqq e^{3\nu} \\ q = p+2}} \frac{\log p \log q}{p} R_\nu(2\nu - \log p) + o(1)$$

---

[10] The values $\gamma_1 = 0.3$, $\gamma_2 = 0.33$ are admissible at the choice (8.1).

where p and q are primes. The range of summation is owing to (8.6) included into

$$\omega^{\frac{1}{4}} \leqq x \leqq \omega \,. \tag{9.4}$$

10. Next we use the representation (4.3). This gives

$$H(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} G_1(s+1) f_\nu(s) ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} G_2(s+1) f_\nu(s)\, ds \stackrel{\text{def}}{=} H_1 + H_2 \,. \tag{10.1}$$

For the estimation of H_2 we shall use lemma I. Obviously we can shift the line of integration to the line $\sigma = -1 + \varepsilon$; hence

$$\begin{aligned} | H_2 | &< c_1(\varepsilon) \log^6 \omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(-1+\varepsilon)2\nu} \frac{e^{(1-\varepsilon)\nu}}{((1-\varepsilon)^2 + t^2)^{\nu/2}} dt < \\ &< c_{10}(\varepsilon) \log^6 \omega \left(\frac{e^{-1+\varepsilon}}{1-\varepsilon}\right)^\nu = o(1) \end{aligned} \tag{10.2}$$

owing to (8.7). As to H_1 we shift the line of integration to the line $\sigma = -2 + \varepsilon$; then we get

$$\begin{aligned} H_1 &= f_\nu(0) \operatorname*{res}_{s=1} G_1(s) + \sum_\varrho f_\nu(\varrho - 1) \operatorname*{res}_{s=\varrho} G_1(s) + \\ &+ f_\nu(-1) \operatorname*{res}_{s=0} G_1(s) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(-2+\varepsilon)} G_1(s+1) f_\nu(s)\, ds \,. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Since from (4.3) standard estimations give on the line $\sigma = -1 + \varepsilon$

$$| G_1(s) | < c_{11}(\varepsilon) \sum_{k \leqq \omega} \log \omega \log (\omega(2 + | t |)) = c_{11}(\varepsilon) \omega \log \omega \cdot \log (\omega(2 + | t |))$$

the last integral H_3 on the right of (10.3) cannot exceed absolutely the quantity

$$c_{12}(\varepsilon)\omega \log \omega \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2(-2+\varepsilon)\nu}}{((2-\varepsilon)^2 + t^2)^{\nu/2}} \cdot \left(\frac{e^{2-\varepsilon} + e^{-2+\varepsilon}}{2}\right)^\nu \log (\omega(2 + | t |))\, dt$$

i.e. a fortiori the quantity

$$c_{13}(\varepsilon)\omega \log^2 \omega \cdot \left(e^{(-2+\varepsilon)2} \frac{e^{2-\varepsilon} + e^{-2+\varepsilon}}{4 - 2\varepsilon}\right)^\nu .$$

Choosing ε sufficiently small, the last factor is with arbitrarily small $\eta > 0$, using (8.7) and (8.6),

$$< (\omega - 2)^{\gamma_1\left\{-2\beta + \log \frac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}{4}\right\} + \frac{\eta}{2}} < \omega^{-1-\frac{\eta}{2}}$$

i.e. for $\omega \to +\infty$

$$H_3 = o(1) \,. \tag{10.4}$$

11. We have to settle the residual-terms in (10.3). Owing to $f_\nu(0) = 1$ and (4.3) the first residual term is

$$-\sum_{\substack{k \leq \omega \\ k \text{ odd}}} \frac{\mu(k) \log k}{\varphi(k)}$$

which is owing to lemma III

$$2A + o(1)\,. \tag{11.1}$$

As to the third residual term in (10.3) we remark first the well-known fact that for primitive characters $L(0, d, \chi) = 0$ if and only if

$$\chi(-1, d) = 1 \qquad \text{and} \qquad d > 1\,. \tag{11.2}$$

Hence this term is owing to (10.3) and (4.3)

$$\left(e^{-2} \frac{e - \frac{1}{e}}{2}\right)^{\nu} \sum_{\substack{k \leq \omega \\ k \text{odd}}} \frac{\mu(k) \log k}{\varphi(k)} \sum_{\substack{d/k \\ d > 1}} \sum_{\chi \bmod d}^{**} \overline{\chi}(-2, d) \tag{11.3}$$

where $\sum^{**}$ means summation over primitive characters mod d, satisfying also (11.2). This sum can be evaluated as follows.[11] One can write it in the form

$$\sum_{\chi \bmod d}^{*} \overline{\chi}(-2, d) \frac{1 + \overline{\chi}(-1, d)}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\chi \bmod d}^{*} \overline{\chi}(-2, d) + \sum_{\chi \bmod d}^{*} \overline{\chi}(2, d) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(s_d(-2) + s_d(2) \right)$$

with the notation (5.1). Since d is again square-free, this is owing to (5.2) absolutely

$$\leq 2\,.$$

Hence the sum in (11.3) is absolutely

$$< 2(2e)^{-\nu} \sum_{k \leq \omega} \frac{|\mu(k)| \log k}{\varphi(k)} \tau(k)$$

which again $o(1)$ owing to (8.7). Collecting all these we have for $\omega \to +\infty$

$$\sum_{\substack{\omega^{1/4} \leq p \leq \omega \\ q = p+2}} \frac{\log p \log q}{p} R_\nu(2\nu - \log p) = \tag{11.4}$$

$$= 2A + \sum_{\substack{k \leq \omega \\ k \text{odd}}} \frac{\mu(k) \log k}{\varphi(k)} \sum_{d/k} \sum_{\chi \bmod d}^{*} \overline{\chi}(-2, d) \,.\, \left\{ \sum_{\varrho(\chi)} \left(e^{2(\varrho-1)} \frac{e^{1-\varrho} - e^{\varrho-1}}{2(1-\varrho)} \right)^{\nu} \right\} + o(1)\,.$$

12. Next we estimate the contribution of the $\varrho(\chi)$'s with

$$|t_\varrho(\chi)| \geq e^{K} (\geq 2), \quad K \text{ to be determined.} \tag{12.1}$$

---

[11] Simplified by remarks of Mr. I. KÁTAI and Mr. I. KÖRNYEI.

We shall use the estimation

$$| f_\nu(\varrho - 1) | \leqq \frac{1}{| t_\varrho(\chi) |^\nu}.$$

Since the number of zeros of $L(s, d, \chi)$ belonging to primitive characters in

$$0 < \sigma < 1\,, \qquad \lambda \leqq t \leqq \lambda + 1$$

is

$$< c_{14} \log \left(d(2 + | \lambda |)\right),$$

the contribution of the zeros with (12.1) is absolutely

$$< c_{14} \log \omega \sum_{k \leqq \omega} \frac{1}{\varphi(k)} \varphi(k) \sum_{n \geqq e^K} \frac{\log kn}{n^\nu} <$$

$$< c_{15}\, \omega \log^2 \omega \sum_{n \geqq e^K} \frac{\log n}{n^\nu} < c_{16} \frac{\omega \log^2 \omega \cdot K \cdot e^K}{e^{K\gamma_1 \log(\omega - 2)}} = o(1)$$

if

$$K > \frac{1}{\gamma_1}$$

i.e. a fortiori [see (8.6)] for

(12.2) $$K = 4\,.$$

This and (11.4) prove the theorem.

(Received june 8, 1964)

О ПРОБЛЕМЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ БЛИЗНЕЦОВ

P. TURÁN

Резюме

Hardy и Littlewood в их классической работе назвали проблему Goldbach-а и проблему простых чисел близнецов сопряженными. О проблеме Goldbach-а уже известно, что ее решение зависит от всех нетривиальных корней всех L — функций Дирихле. В этой статье доказывается, что напротив ожидания положительный или отрицательный ответ на решение проблемы простых чисел близнецов зависит только от «маленьких» корней всех L — функций. Точнее, для любого малого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\omega_0(\varepsilon)$, что при $\omega > \omega_0$ и для целых ν, удовлетворяющих ограничение (2.4), при подходящей положительной $f(p, \nu)$ имеет место

$$\left| \sum_{\substack{\omega^{\frac{50}{150}} \leqq p = q-2 \leqq \omega \\ p \text{ и } q \text{ простые числа}}} \frac{\log p \log q}{p} f(p, \nu) - 2A - Re \sum_{\varrho} b(\varrho)\, \varphi(\varrho)^\nu \right| \leqq \varepsilon\,,$$

где ϱ пробегает те корни, по модулю меньше чем ω, L — функций, для которых $|Im\, \varrho| \leqq e^4$, $b(z)$ и $\varphi(z)$ в явном виде данные подходящие функции, которые являются «маленькими» в данной области, а $A \sim 1{,}32$ константа Hardy—Littlewood-а (ее можно найти в их эвристической формуле для числа простых чисел близнецов, не превышающих x).

ON A CONSEQUENCE OF A MIXING THEOREM OF A. RÉNYI

by

J. MOGYORÓDI

In his paper [1] A. RÉNYI proved the following

Theorem 1. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables defined on the probability space $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}\}$. Let us suppose that theer can be found a sequence of real numbers $\{C_n\}$ and another sequence $\{B_n\}$ of positive numbers for which $B_n \to +\infty$, further a distribution function $F(x)$ such that putting $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ we have*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{B_n} < x\right) = F(x)$$

in every continuity point x of the distribution function $F(x)$. Let $\mathbf{Q}$ be an arbitrary probability measure in Ω and on $\mathcal{A}$ which is absolutely continuous with respect to $\mathbf{P}$. Then we have

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{Q}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{B_n} < x\right) = F(x),$$

if x is any continuity point of $F(x)$.

A consequence of this theorem is the following: Let A be any event of positive probability. Then under the conditions of Theorem 1 we have

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n - C_n}{B_n} < x \,\middle|\, A\right) = F(x)$$

at all continuity points of $F(x)$, where the symbol $\mathbf{P}(B \mid A)$ denotes the conditional probability of the event B under the condition A.

In fact, the conditional probability measure $\mathbf{P}(B \mid A)$ with fixed A, where $\mathbf{P}(A) > 0$, is absolutely continuous with respect to $\mathbf{P}$.

By the aid of Theorem 1 we proved in paper [2] the following

Theorem 2. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables with mean value 0 and variances $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ Put*

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n},$$

where $B_n^2 = D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2$ and suppose $B_n \to +\infty$. Let us suppose that the distribution function $F_n(x)$ of the random variables ζ_n tends to a limiting *distribution function $F(x)$, at every continuity point x. Let us suppose further that*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x) = 1 \, .$$

Then under any condition A having positive probability we have

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}(\zeta_n^2 \mid A) = 1 \, ,$$

where $\mathbf{M}(\tau \mid A)$ denotes the conditional mathematical expectation of the random variable τ under the condition A.

The aim of the present paper is to generalize the result of Theorem 2. Namely the following problem arises: if we take in Theorem 2 an arbitrary continuous function of ζ_n, say $f(\zeta_n)$, and if we suppose that

$$\mathbf{M}(f(\zeta_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dF_n(x) = \int_{\Omega} f(\zeta_n) \, d\mathbf{P}$$

converges to

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dF(x) \, ,$$

then what can be said about the convergence of the conditional mathematical expectations $\mathbf{M}(f(\zeta_n) \mid A)$?

An answer to this question is the following

Theorem 3. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables. Put*

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

where $B_n \to +\infty$. Let us suppose that the distribution function $F_n(x)$ of the random variable ζ_n tends to a limiting distribution function $F(x)$ at all continuity points x of $F(x)$. Let further $f(x)$ be a real-valued continuous function and suppose that the mathematical expectation of $f(\zeta_n)$, i.e. the integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF_n(x)$$

converges to the integral

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dF(x)$$

as $n \to +\infty$. Let us suppose that

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\{x: |f(x)|>N\}} | f(x) | \, dF_n(x) = 0$$

holds uniformly in n. Then under any condition A having positive probability, we have

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}(f(\zeta_n) \mid A) = M \, ,$$

where $\mathbf{M}(f(\zeta_n) \mid A)$ denotes the conditional mathematical expectation of the random variable $f(\zeta_n)$ under the condition A.

Proof. Let us introduce the following notation:

$$g_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } |f(x)| \leqq N \\ N, & \text{if } f(x) > N \\ -N, & \text{if } f(x) < -N \end{cases}.$$

where N is an arbitrary positive number. Then $g_N(x)$ is bounded and continuous. We remark that

$$|f(x) - g_N(x)| \leqq |f(x)| \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

holds also.

It is easy to see that for any $\varepsilon > 0$ we can choose the positive number $N(\varepsilon)$ such that for $N \geqq N(\varepsilon)$ the inequality

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_N(x)\, dF(x) - M \right| < \varepsilon \tag{1}$$

and by the uniform integrability of $f(x)$ with respect to $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ the inequality

$$\frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_{\{x:|f(x)|>N\}} |f(x)|\, dF_n(x) < \varepsilon \tag{2}$$

be satisfied.

Now on the basis of Theorem 1 it follows that for any fixed event A with $\mathbf{P}(A) > 0$,

$$F_n(x \mid A) = \mathbf{P}(\zeta_n < x \mid A) \to F(x)$$

holds as $n \to +\infty$. Thus, $g_N(x)$ being a continuous and bounded function, we can choose the positive integer $n_0 = n_0(\varepsilon)$ such that for $n \geqq n_0$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_N(x)\, dF_n(x \mid A) - \int_{-\infty}^{+\infty} g_N(x)\, dF(x) \right| < \varepsilon \tag{3}$$

holds.

Then, since

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF_n(x \mid A) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_N(x)\, dF_n(x \mid A) + \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x) - g_N(x)\big)\, dF_n(x \mid A)$$

and since

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x) - g_N(x)\big)\, dF_n(x \mid A) \right| \leqq \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_{\{x:|f(x)|>N\}} |f(x)|\, dF_n(x)$$

it follows from (1), (2) and (3) that for $n \geqq n_0$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dF_n(x \mid A) - M \right| < 3\,\varepsilon$$

holds. This proves our assertion.

Remarks. If the condition

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dF(x)$$

is omitted and substituted by the weaker condition that

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dF_n(x) = M$$

exists, then the assertion of Theorem 3 is not valid in general. The following counter-example shows this fact. Let the independent random variables ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be defined as follows:

$$\xi_n = \begin{cases} n+1 & \text{with probability } \dfrac{1}{2(n+1)^2} \\ 0 & \text{with probability } 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}. \\ -(n+1) & \text{with probability } \dfrac{1}{2(n+1)^2} \end{cases}$$

Then $\mathbf{M}(\xi_n) = 0$ and $\mathbf{D}^2(\xi_n) = 1$, where $\mathbf{D}^2(\xi_n)$ denotes the variance of ξ_n. Let further

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}$$

and $F_n(x) = \mathbf{P}(\zeta_n < x)$. We have $\mathbf{M}(\zeta_n) = 0$, $\mathbf{D}^2(\zeta_n) = 1$, that is

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF_n(x) = 1\,.$$

Let us denote by $\psi_n(t)$ the characteristic function of $\sqrt{n}\zeta_n$. Then $\psi_n(t) = \prod_{k=2}^{n+1}\left(1 - \frac{1}{k^2}(1-\cos kt)\right)$ and $\lim_{n\to+\infty} \psi_n(t) = \psi(t)$ exists. I.e. $\mathbf{P}(\sqrt{n}\,\zeta_n < x) = \mathbf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n < x)$ converges to a limiting distribution function. Consequently the limiting distribution of ζ_n is degenerate and thus its variance is 0, and not equal to $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{D}^2(\zeta_n) = 1$. Let now A be the event that the random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ are all equal to 0. Clearly we have

$$\mathbf{P}(A) = \prod_{k=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}$$

and under the condition A

$$\mathbf{M}(\zeta_n^2 \mid A) = \mathbf{D}^2(\zeta_n \mid A) = 0\,.$$

The following argumentation shows that the uniform integrability of $f(\zeta_n)$ with respect to $\mathbf{P}$ is in some sense necessary. Let $f(x)$ be a non-negative continuous function. We know that a necessary and sufficient condition for the uniform integrability of a sequence $\{\tau_n\}$ of random variables is that the relations

$$\int_{\Omega} |\tau_n|\, d\mathbf{P} < k \qquad (k > 0,\ \text{constant})$$

and

$$\lim_{\delta \to 0} \int_A |\tau_n| \, d\mathbf{P} = 0$$

be satisfied uniformly in n, where $\delta = \mathbf{P}(A)$. Put now $\tau_n = f(\zeta_n)$. If we know that for any event A having positive probability the relation

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_A f(\zeta_n) \, d\mathbf{P} = M, \quad (|M| < +\infty), \tag{4}$$

holds, where M is independent of A, then we will have for any A of sufficiently small probability

$$0 \leqq \int_A f(\zeta_n) \, d\mathbf{P} \leqq \varepsilon$$

uniformly in n. Consequently a necessary condition for the existence of the limit (4) is, in the case of non-negative continuous function, the uniform integrability of the random variables $f(\zeta_n)$.

Theorem 1 enables us to formulate Theorem 3 in a more general form. Namely we have the following

Theorem 4. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Put*

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n},$$

where $B_n \to +\infty$. Let us suppose that the distribution function $F_n(x)$ of the random variable ζ_n tends to a limiting distribution function $F(x)$ at all continuity points x of $F(x)$. Let further $f(x)$ be a real-valued continuous function and suppose that

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f(\zeta_n) \, d\mathbf{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dF(x) = M.$$

Let us suppose further that the sequence $f(\zeta_n)$ is uniformly integrable with respect to the probability measure $\mathbf{P}$. Then, if $\mathbf{Q}$ is a probability measure defined in Ω and on $\mathcal{A}$ such that $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ — the Radon–Nikodym derivative of $\mathbf{Q}$ with respect to $\mathbf{P}$ — is bounded, we have

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f(\zeta_n) \, d\mathbf{Q} = M.$$

The proof of Theorem 4 is the same as that of Theorem 3 and thus it can be omitted. I express my thanks to Prof. Rényi for this remark.

(Received April 1, 1963; in revised form October 21, 1964)

REFERENCES

[1] RÉNYI, A: "On mixing sequences of sets." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 215—228.

[2] MOGYORÓDI, J.: "A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables." *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **7** (1962) 409—424.

[3] GNEDENKO, B. V.—KOLMOGOROV, A. N.: *Limit distributions for sums of independent random variable* . Addison-Wesley, Cambridge, 1954.

[4] DOOB, J. L.: *Stochastic Processes.* John Wiley and Sons, New York, 1953.

ОБ ОДНОМ СЛЕДСТВИИ ТЕОРЕМЫ О «ПЕРЕМЕШИВАНИИ» A. RÉNYI

J. MOGYORÓDI

Резюме

С помощью теоремы о «перемешивании» множеств A. RÉNYI [1] доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *последовательность независимых случайных величин. Возьмем*

$$\sigma_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

где $B_n \to +\infty$. *Предположим, что функция распределения* $F_n(x)$ *случайной величины* σ_n *стремится к функции распределения* $F(x)$ *во всех точках непрерывности* x *функции* $F(x)$. *Пусть, далее,* $f(x)$ *непрерывная функция, такая, что математическое ожидание случайной величины* $f(\sigma_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *существует и стремится к величине*

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dF(x) \, .$$

Если далее функция $f(x)$ *равномерно по* n *интегрируема по отношению функций распределения* $F_n(x)$, *т. е.*

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{\{x : |f(x)| > N\}} |\, f(x) \,|\, dF_n(x) = 0$$

выполняется равномерно по n, *то мы имеем*

$$\lim_{n \to +\infty} M\big(f(\sigma_n) \mid A\big) = M \, ,$$

каково бы ни было случайное событие A, *имеющее положительную вероятность. Здесь* $M\big(f(\sigma_n) | A\big)$ *означает условное математическое ожидание случайной величины* $f(\sigma_n)$ *при условии* A.

Теорема 4 является обощением Теоремы 3, если в ней возьмётся вместо условной вероятностной меры произвольная вероятностная мера $\mathbf{Q}$, абсолютно непрерывная по отношению $\mathbf{P}$ и имеющая ограниченную производную Радона—Никодима $\dfrac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ В ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С УЧЕТОМ НЕНАДЕЖНОСТИ ПРИБОРА

J. ТОМКÓ[1]

§ 1. Постановка задачи

В работе [1] учитывалась ненадежность прибора в однолинейной системе массового обслуживания с потерями. В настоящей работе рассматривается следующий случай:

— входящий поток является простейшим с параметром λ,

— требование, поступившее в момент, когда прибор исправен, остается в системе (начинается его обслуживание, или оно становится в очередь, в зависимости от того, свободен прибор или занят обслуживанием раньше пришедшего требования); в момент порчи прибора, требования, находящиеся в системе, теряются, также теряются требования, поступившие во время ремонта прибора.

— длительности обслуживания требований $\xi_i, (i = 1, 2, \dots)$ и времена ремонта $\delta_i, (i = 1, 2, \dots)$ прибора — независимые случайные величины с распределениями вероятностей, соответственно равными $F(x)$ и $G(x)$.

Обозначим через $\omega(t)$ то время, в течение которого прибор после момента t находился бы в исправном состоянии, если после момента t, ему не пришлось бы обслуживать требования.

Через $\tilde{\omega}(t)$ обозначается то время, в течение которого прибор после момента t способен непрерывно обслуживать требования (если в момент t прибор находится в ремонте, тогда $\omega(t) = \tilde{\omega}(t) = 0$).

Предполагается, что $\omega(t) = c\tilde{\omega}(t)$, $c \geqq 1$.

Обозначим точки окончаний ремонтов через $r_i, (i = 0, 1, \dots)$, $r_0 > 0$ или $r_0 = 0$, в зависимости от того, прибор в начальный момент находится в ремонте или исправен. О величинах $\eta_i = \omega(r_i + 0)$, $i \geqq 1$ предположим, что они независимые случайные величины с законом распределения $H(x)$.

Совокупность $\{\omega(t), t \geqq 0\}$ представляет собой случайный процесс, в случае $c > 1$ одна из его возможных траекторий изображена на рис. 1.

Через $\bar{r}_i, (i = 1, 2, \dots)$ мы обозначали начало i-го ремонта, а через $t_i, (i = 1, 2, \dots)$ моменты поступления требований, заставших прибор исправным и свободным. График 1. показывает, что от момента 0 до момента t_1 прибор был свободен и срок его дальнейшей жизни уменьшался пропорционально протекшему времени. В момент t_1 поступило требование, началось его обслуживание, при этом жизненные возможности прибора стали тратиться интенсивнее. В момент $\bar{r}_1$ прибор отказал и началось его восстановление, которое заканчивалось в момент r_1. Все требования, которые нахо-

---

[1] Вычислительный центр, Будапешт.

дились в системе в момент $\bar{r}_1$ и которые поступили во время восстановления прибора, терялись. Дальнейший ход процесса ясен из чертежа.

Пусть:

$\pi_1(t)$ — вероятность того, что в момент t прибор окажется занятым обслуживанием,

$\pi_2(t)$ — вероятность того, что в момент t прибор находится в ремонте,

$\pi_3(t)$ — вероятность того, что в момент t прибор свободен.

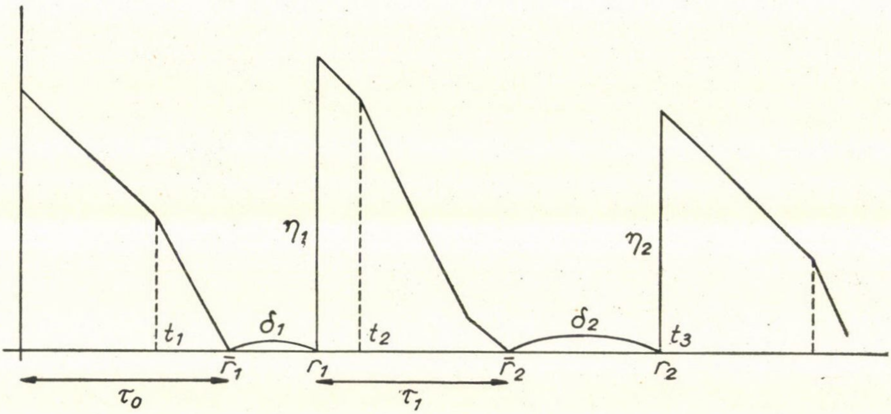


Рис. 1.

Далее, через $D(x)$ — обозначим функцию распределения длительности рабочего периода прибора, который никогда не стареет и не портится. Именно такой случай преимущественно и изучается в литературе.

Пользуясь результатами работы [1], при условии, указанном в теореме 1 следующего § 2, пределы

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t)\ ,\quad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

существуют, и выражаются формулами (12) [1], в которых мы теперь должны заменить функцию $F(x)$ на функцию $D(x)$, и преобразование $\bar{Z}_c(s)$ (10) [1] на

$$\psi_c(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda[1 - \Gamma(cs)]}\ , \quad \text{где} \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, dD(u)\ . \tag{2}$$

Для предлагаемого случая интересно ответить на вопрос, при каких условиях существуют пределы

$$P_k = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\ \{\text{в момент } t \text{ в системе находится } k \text{ требований}\},\quad k \geqq 1 \tag{3}$$

и как их вычислять. Мы покажем, что при довольно простых условиях, вероятности P_k существуют, и найдем производящую функцию $R(z) = \sum_1^\infty P_k z^k$.

§ 2. Марковский процесс, описывающий систему и его эргодичность

Поставленная задача решается с помощью марковского процесса, построенного соответствующим образом. А именно, рассмотрим случайный процесс

$$\gamma(t) = \{e(t)\ ,\ \nu(t)\}$$

Первая компонента $e(t) = k$, $(k \geqq 0)$ если в момент t в системе находится k — требований, $e(t) = -1$ если в момент t прибор находится в ремонте. Вторая компонента $\nu(t)$ имеет разный смысл в зависимости от того, какое значение принимает $e(t)$. В случае $e(t) = 0$, $\nu(t) = \eta(t) = \omega(r_i + 0) - \omega(t)$ (убывание ресурса прибора к моменту t) где r_i — точка окончания ремонта, ближайшая к t слева. В случае $e(t) = k$, $(k \geqq 1)$ $\nu(t)$ есть двухмерный вектор $\{\xi(t),\ \eta(t)\}$, первая компонента которого означает время, потраченное прибором на обслуживание требования, занимающего прибор в момент t, вторая $\eta(t)$ — определена выше. При $e(t) = -1$, $\nu(t) = \mu(t)$ — время, прошедшее к моменту t от начала текущего ремонта.

В силу предположений $\gamma(t)$ является однородным марковским процессом.

С другой стороны, процесс $\gamma(t)$ можно рассматривать как регенерирующий процесс с точками регенерации r_i. Если теперь предполагать, что хотя бы одно из распределений $H(x)$ и $G(x)$ не решетчатое, то $\gamma(t)$ будет апериодическим регенерирующим процессом, и при исследовании эргодичности $\gamma(t)$, можем опираться на теорему 2. Smith-a [3]. Для этой цели, выясним, что будет фазовым пространством процесса $\gamma(t)$. Это пространство состоит из множеств H_k; $k \geqq 0$, H_{-1}, где

$$H_0 \equiv \{\text{точки } \omega_0(u)\ ;\ u \geqq 0\}$$

$$H_k \equiv \{\text{точки } \omega_k(v, u)\ ;\ 0 \leqq cv \leqq u\}\ ;\ k \geqq 1$$

$$H_{-1} \equiv \{\text{точки } \omega_{-1}(w)\ ;\ 0 \leqq w\}\ .$$

Пусть:

$$A_0^{(y)} \equiv \{\omega_0(u)\ ;\ u \leqq y\} \subset H_0\ ,$$

$$A_k^{(x,y)} \equiv \{\omega_k(v, u)\ ;\ v \leqq x\ ,\ u \leqq y\ ;\ cv \leqq u\} \subset H_k$$

$$A_{-1}^{(z)} \equiv \{\omega_{-1}(w)\ ;\ w \leqq z\} \subset H_{-1}\ .$$

Процесс $\gamma(t)$ заведомо будет эргодичным, если существуют пределы:

$$P_0(y) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_0^{(y)}\}$$

$$P_k(x, y) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_k^{(x,y)}\}\ ,\quad k \geqq 1. \tag{1}$$

$$P_{-1}(z) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_{-1}^{(z)}\}$$

При предположении

$$\mathbf{M}\{r_{i+1} - r_i\} = \mathbf{M}\{\tau_i + \delta_i\} < \infty\ ,\quad \tau_i = \bar{r}_{i+1} - r_i$$

(для которого необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{M}\{\eta_i + \delta_i\} < \infty$) вышеуказанная теорема Sмітн-а утверждает, что пределы (1) всегда существуют, если только функции:

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
&\psi_{A_0^{(y)}}(t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_0^{(y)}, \quad \text{и} \quad X > t\} \\
&\psi_{A_k^{(x,y)}}(t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_k^{(x,y)}, \quad \text{и} \quad X > t\}, \ k \geqq 1 \\
&\psi_{A_{-1}^{(z)}}(t) = \mathbf{P}\{\gamma(t) \in A_{-1}^{(z)}, \quad \text{и} \quad X > t\},
\end{aligned}
$$

где $X = r_{i+1} - r_i$, имеют ограниченную вариацию по t на любом конечном интервале t. Для проверки, что в нашем случае это имеет место, можно воспользоваться леммой 2 [3]. Для этого сопоставим каждому конечному интервалу $I = (\alpha, \beta)$, $0 \leqq \alpha < \beta$, случайную величину $Y_I = \sum\limits_1^5 \varepsilon_i$, где

ε_1 — число требований, поступивших в интервале времени I,
ε_2 — число окончаний обслуживания в I,
ε_3 — число r_i, находящихся в I,
ε_4 — число $\bar{r}_i$, находящихся в I,
ε_5 — число тех точек интервала I, в которых наступит по меньшей мере одно из событий $\{\xi(t) = x\}$, $\{\eta(t) = y\}$, $\{\mu(t) = z\}$.

Если теперь взять Y_I, в качестве аддитивной случайной величины y леммы 2 [3], то легко убедиться в выполнении всех условий этой леммы. Нами доказана таким образом

Теорема 1. *Если хотя бы одно из распределений $H(x)$ и $G(x)$ не решетчатое и $\mathbf{M}\{\delta_i + \eta_i\} < \infty$, то процесс $\gamma(t)$ является эргодическим.*

В дальнейшем докажем одну лемму, которая понадобится нам по позже. Рассмотрим ряд событий:

$$\mathscr{E}_0(t, y, \Delta) \equiv \{e(t) = 0 \ ; \ y \leqq \eta(t) < y + \Delta\}$$

$$\mathscr{E}_{-1}(t, z, \Delta) \equiv \{e(t) = -1 \ ; \ z \leqq u(t) < z + \Delta\}$$

и при $k \geqq 1$

$$\mathscr{E}_k(t, x, y, \Delta) \equiv \{e(t) = k \ ; \ x - \Delta \leqq \xi(t) < x \, , \ \ y \leqq \eta(t) < y + \Delta\}.$$

Пусть далее $\{\varkappa_0, \gamma_i\}$, $\{\tilde{\varkappa}_0, \tilde{\gamma}_i\}$ процессы восстановления, где

$$\varkappa_0 = \begin{cases} r_0, & \text{если} \quad r_0 > 0 \\ r_1, & \text{если} \quad r_0 = 0 \end{cases}, \quad \gamma_i = \tau_i + \delta_i$$

$$\tilde{\varkappa}_0 = \bar{r}_1 \, , \ \ \tilde{\gamma}_i = \delta_i + \tau_i .$$

Обозначим через $m(t)$ и $\widetilde{m}(t)$ соответствующие функции восстановления. Из условия теоремы 1, по теореме Вlackwell-а вытекает, что существует $t_0(\Delta)$ такое, что при всех $t > t_0$

$$m(t + \Delta) - m(t) \leqq K\Delta \quad \text{и} \quad \widetilde{m}(t + \Delta) - \widetilde{m}(t) \leqq K\Delta$$

где

$$K = 1 + 1/u^* \qquad u^* = \mathbf{M}\{\delta_i + \tau_i\} .$$

Лемма 1. *Если выполняется условие теоремы* 1, *тогда при любых фиксированных значениях* x, y, z, Δ *для всех* $t > T_o = \max(y, z) + t_0(\Delta)$ *имеют место неравенства:*

а) $\mathbf{P}\{\mathscr{E}_0(t, y, \Delta)\} < K\Delta[1 - H(y)]\,Q(y)$

б) $\mathbf{P}\{\mathscr{E}_{-1}(t, z, \Delta)\} < K\Delta[1 - G(z)]$

в) $\mathbf{P}\{\mathscr{E}_k(t, x, y, \Delta)\} < K\,\lambda\Delta\Delta[1 - F(x)]\,[1 - H(y)]e^{-\lambda x}\dfrac{(\lambda y/c)^{k-1}}{(k-1)\,!}$

для всех $k \geqq 1$, *где преобразование* $\int\limits_0^\infty e^{-su}\,Q(u)du = \dfrac{1}{\lambda}\,\psi_c(s)$ (*см.* (2) § 1).

Доказательство. Простые рассуждения показывают, что а) и б) следуют из результатов [1]. Для доказательства в) рассмотрим события:

$$\mathscr{E}_k(t, x, \tau, y, \Delta) = \mathscr{E}_0\big(t - x - \tau, y - c(x + \tau), \Delta\big) \cap F_k(t, x, \tau, \Delta)$$

где

$$0 \leqq \tau \leqq \frac{y}{c} - x, \quad F_k(t, x, \tau, \Delta) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_{kn}(t, x, \tau, \Delta)$$

и $F_{kn}(t, x, \tau, \Delta)$ — событие, состоящее в том, что в момент $t - x - \tau$ прибор исправен и свободен, в промежутке $(t - x - \tau;\, t - x - \tau + \Delta)$ поступит одно требование, потом за время $\tau + x$ поступает еще $n - 1 + k$ требований, причем суммарное время обслуживания первых n — требований находится между τ и $\tau + d\tau$, а время обслуживания $n + 1$-го требования больше x, и все это происходит так, что прибор в интервале времени $(t - x - \tau, t)$ окажется непрерывно занятым и исправным.

Пусть далее $F^*_{kn}(t, x, \tau, \Delta)$ — событие, означающее то же, что и $F_{kn}(t, x, \tau, \Delta)$, но без требования непрерывной занятости прибора в интервале времени $(t - x - \tau, t)$.

Теперь $F_{kn}(t, x, \tau, \Delta) \subseteq F^*_{nk}(t, x, \tau, \Delta)$, далее

$$\mathbf{P}\{F_k(t, x, \tau, \Delta)|\mathscr{E}_0\big(t - x - \tau,\ y - c(x + \tau), \Delta\big)\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{F_{kn}(t, x, \tau, \Delta)|\mathscr{E}_0\big(t - x - \tau, y - c(x + \tau), \Delta\big)\} \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{F^*_{kn}(t, x, \tau, \Delta)|\mathscr{E}_0\big(t - x - \tau, y - c(x + \tau), \Delta\big)\} \leqq$$

$$\leqq \lambda\Delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1 - H(y)][1 - F(x)]}{1 - H[y - c(x + \tau)]} \cdot \frac{[\lambda(x + \tau)]^{n-1+k}}{(n - 1 + k)!}\, e^{-\lambda(\tau + x)}\, dF^{*(n)}(\tau)$$

следовательно, пользуясь а)

$$\mathbf{P}\{\mathscr{E}_k(t, x, \tau, y, \Delta)\} \leqq K\,\Delta[1 - H\big(y - c(x + \tau)\big)]\,Q\big(y - c(x + \tau)\big) \cdot$$

$$\cdot\, \lambda\Delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1 - H(y)][1 - F(x)]}{1 - H\big(y - c(x + \tau)\big)}\, \frac{[\lambda(x + \tau)]^{k-1+n}}{(n - 1 + k)\,!}\, e^{-\lambda(x+\tau)}\, dF^{*(n)}(\tau)$$

и по формуле полной вероятности находим,

$$\mathbf{P}\{\mathscr{E}_k(t, x, y, \Delta)\} \leqq k\,\lambda\Delta\Delta[1 - H(y)][1 - F(x)] \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{y}{c}-x} Q(y - c(x+\tau)) \frac{[\lambda(x+\tau)]^{n+k-1}}{(n+k-1)\,!} e^{-\lambda(x+\tau)}\, dF^{*(n)}(\tau)\,.$$

В силу $Q(u) \leqq 1$, $u \geqq 0$ после простой оценки суммы получаем в) и этим лемма 1 доказана.

Из леммы 1 легко вывести существование почти всюду плотностей стационарного распределения процесса $\gamma(t)$. В самом деле, если взять в качестве начального распределения процесса $\gamma(t)$ его стационарное распределение, то вероятности, играющих роль в лемме 1 не зависят от t. Значит, утверждения а), б), в) имеют место при всех t и отсюда по известной теореме Радона—Никодима существование почти всюду производных

$$p_{-1}(z) = \frac{\partial P_{-1}(z)}{\partial z}\,, \quad p_0(y) = \frac{\partial P_0(y)}{\partial y}\,, \quad p_k(x, y) = \frac{\partial P_k(x, y)}{\partial x\, \partial y}\,; \qquad k \geqq 1 \tag{3}$$

вытекает. Заметим еще, что если функции (3) при значениях x, y, z определены, то по а), б), в) леммы 1 должны и удовлетворить неравенствам

$$\begin{aligned} &p_{-1}(z) \leqq K[1 - G(z)] \\ &p_0(y) \leqq K[1 - H(y)] \\ &p_k(x, y) \leqq \lambda K[1 - F(x)][1 - H(y)] e^{-\lambda x} \frac{\left(\lambda y \dfrac{1}{c}\right)^{k-1}}{(k-1)\,!}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Существование почти всюду производных (3) в общем случае нам не достаточно. Однако, аналогичные же рассуждения, приведенным в §-е 3 работы [1] показывают, что плотности (3) всюду существуют и без ограничения общности можно предполагать дифференцируемость функций

$$p_k^*(x, y) = \frac{p_k(x, y)}{[1 - F(x)][1 - H(y)]}\,, \quad k \geqq 1\,.$$

§ 3. Нахождение вероятностей состояния системы

Теперь выводим систему интегро-дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции

$$p_0^*(y) = \frac{p_0(y)}{1 - H(y)}\,, \quad p_k^*(x, y) = \frac{p_k(x, y)}{[1 - F(x)][1 - H(y)]}\,, \qquad k \geqq 1\,.$$

Обычным приемом, используя переходные вероятности процесса $\gamma(t)$ за малый промежуток времени, получим соотношения

$$p_1(x, y) = p_1(x - \Delta, y - c\,\Delta)(1 - \lambda\Delta)\,\frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\,\Delta)} + o(\Delta)$$

$$p_k(x, y) = p_k(x - \Delta, y - c\,\Delta)(1 - \lambda\Delta)\,\frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\,\Delta)} +$$

$$+ \lambda\Delta\, p_{k-1}(x - \Delta, y - c\,\Delta)\frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\,\Delta)} + o(\Delta), \quad k \geqq 2 \tag{1}$$

$$p_1(0, y)\Delta = \lambda\Delta\, p_0(y - \Delta)\,\frac{1 - H(y)}{1 - H(y - \Delta)} +$$

$$+ \Delta \int\limits_0^{y/c} p_2(x, y - c\,\Delta)\,\frac{dF(x)}{1 - F(x)}\;\frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta)} + o(\Delta)$$

$$p_k(0, y)\,\Delta = \Delta \int\limits_0^{y/c} p_{k+1}(x, y - c\,\Delta)\frac{dF(x)}{1 - F(x)}\;\frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\,\Delta)} + o(\Delta)\,.$$

После предельного перехода $\Delta \to 0$ для функций $p_0^*(y), p_k^*(x,y), k \geqq 1$ получается система уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c\,\frac{\partial p_1^*}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial p_k^*}{\partial x} + c\,\frac{\partial p_k^*}{\partial y} + \lambda(p_k^* - p_{k-1}^*) = 0\,, \qquad k \geqq 2 \end{aligned} \tag{2}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &p_1^*(0, y) = \lambda p_0^*(y) + \int\limits_0^{y/c} p_2^*(x, y)\,dF(x) \\ &p_k^*(0, y) = \int\limits_0^{y/c} p_{k+1}^*(x, y)\,dF(x)\,; \qquad k \geqq 2 \end{aligned} \tag{3}$$

где $p_0^*(y)$ находится по результатам [1] и ее преобразование Лапласа имеет вид

$$\bar{p}_0^*(s) = \varrho\frac{1}{\lambda}\,\psi_c(s) = \varrho\,\frac{1}{s + \lambda[1 - \Gamma(cs)]}\,; \tag{4}$$

ϱ — соответствующий нормирующий множитель.

Пусть

$$q_k(y) = \int\limits_0^{y/c} p_k^*(x, y)\,dF(x), \;\; k \geqq 2\,,$$

$$P(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(x, y)z^k, \qquad Q(y, z) = \sum_{k=2}^{\infty} q_k(y)z^k.$$

Из неравенств (4) § 2 следует, что эти суммы абсолютно сходятся в круге $|z| \leqq 1$ при любых x, y. Легко видеть, что

$$Q(y, z) = zP(0, y, z) - \lambda p_0^*(y)z^2$$

и что имеет место уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + c\frac{\partial P}{\partial y} + \lambda(1 - z)P = 0\,,$$

откуда находится

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= e^{-\lambda(1-z)x} P(0, y - cx, z) = \\ &= e^{-\lambda(1-z)x}\left[\lambda\, p_0^*(y - cx)\, z + \frac{1}{z} Q(y - cx, z)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом решение системы уравнений (2) с граничными условиями (3) равносильно нахождению функции $Q(u, z)$, или ее преобразования Лапласа $\overline{Q}(s, z) = \int\limits_0^\infty Q(u, z)e^{-su}du$. Для этого находим соотношение между функциями $q_k(u)$. Правую часть (5) представляем в виде бесконечного ряда. Получим,

$$e^{-\lambda(1-z)x}\left[\lambda\, p_0^*(y - cx)\, z + \frac{1}{z} Q(y - cx, z)\right] =$$

$$= e^{-\lambda x}\left[1 + \frac{\lambda x}{1\,!} z + \ldots + \frac{(\lambda x)^k}{k\,!} z^k + \ldots\right] \cdot$$

$$\cdot \left\{[\lambda p_0^*(y - cx) + q_2(y - cx)]\, z + q_3(y - cx)\, z^2 + \ldots + q_{k+1}(y - cx)\, z^k + \ldots\right\} =$$

$$= e^{-\lambda x}\left\{a(y - cx)\, z + \left[a(y - cx)\frac{\lambda x}{1\,!} + q_3(y - cx)\right] z^2 + \ldots + \right.$$

$$+ \left[a(y - cx)\frac{(\lambda\, x)^{k-1}}{(k - 1)!} + q_3(y - cx)\frac{(\lambda\, x)^{k-2}}{(k - 2)\,!} + \ldots + \right.$$

$$\left. \left. + q_k(y - cx)\frac{\lambda x}{1\,!} + q_{k+1}(y - cx)\right] z^k + \ldots\right\}$$

где через $a(y)$ обозначена сумма $\lambda p_0^*(y) + q_2(y)$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z и воспользовавшись граничными условиями (3), находим,

$$q_k(y) = \int\limits_0^{y/c}\left[a(y - cx)\;\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k - 1)!} + q_3(y - cx)\frac{(\lambda x)^{k-2}}{(k - 2)\,!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + q_{k+1}(y - cx)\right] e^{-\lambda x} dF(x)\,.$$

Отсюда, положив $u = cx$, получим

$$q_k(y) = \int_0^y \left[a(y-u) \frac{(\lambda u)^{k-1}}{c^{k-1}(k-1)!} + q_3(y-u) \frac{(\lambda u)^{k-2}}{c^{k-2}(k-2)!} + \ldots + \right. \tag{6}$$

$$\left. + q_{k+1}(y-u) \right] e^{-\frac{\lambda}{c} u} \, dF\left(\frac{u}{c}\right).$$

Если теперь ввести обозначения

$$\bar{a}(s) = \int_0^\infty e^{-su} a(u) du \,, \quad \bar{q}_k(s) = \int_0^\infty e^{-su} q_k(u) du \,,$$

то $\bar{Q}(s, z) = \sum_{k=2}^\infty \bar{q}_k(s) z^k$ и из (6) следует соотношение

$$\bar{q}_k(s) = \bar{a}(s) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} (-1)^{k-1} \Phi^{(k-1)}(cs + \lambda) + \bar{q}_3(s) \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} (-1)^{k-2} \cdot$$

$$\cdot \Phi^{(k-2)}(cs + \lambda) + \ldots + \bar{q}_k(s) \frac{\lambda}{1!} (-1)^1 \Phi^{(1)}(cs + \lambda) + \bar{q}_{k+1}(s) \Phi(cs + \lambda).$$

Теперь

$$\bar{Q}(s, z) = \left[\bar{a}(s) \frac{\lambda}{1!} (-1)^1 \Phi^{(1)}(cs + \lambda) + \bar{q}_3(s) \Phi(cs + \lambda) \right] z^2 +$$

$$+ \left[\bar{a}(s) \frac{\lambda^2}{2!} (-1)^2 \Phi^{(2)}(cs + \lambda) + \bar{q}_3(s) \frac{\lambda}{1!} (-1)^1 \Phi^{(1)}(cs + \lambda) + \bar{q}_4(s) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \Phi(cs + \lambda) \right] z^3 + \ldots$$

Изменив порядок суммирования, получим:

$$\bar{Q}(s, z) = \bar{a}(s) z \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda z)^k}{k!} (-1)^k \Phi^{(k)}(cs + \lambda) +$$

$$+ \bar{q}_3(s) z^2 \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda z)^k}{k!} (-1)^k \Phi^{(k)}(cs + \lambda) + \ldots +$$

$$+ \bar{q}_n(s) z^{n-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda z)^k}{k!} (-1)^k \Phi^{(k)}(cs + \lambda) + \ldots$$

Здесь $\sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda z)^k}{k!} (-1)^k \Phi^{(k)}(cs + \lambda)$ есть ряд Тейлора функции $\Phi[cs + \lambda(1 - z)]$.
Поэтому

$$\bar{Q}(s, z) = z \bar{a}(s) \{ \Phi[cs + \lambda(1 - z)] - \Phi(cs + \lambda) \} +$$

$$+ \Phi[cs + \lambda(1 - z)] \sum_{n=3}^\infty \bar{q}_n(s) z^{n-1} =$$

$$= z[\bar{a}(s) - \bar{q}_2(s)] \Phi[cs + \lambda(1 - z)] - z \bar{a}(s) \Phi(cs + \lambda) +$$

$$+ \frac{1}{z} \Phi[cs + \lambda(1 - z)] \bar{Q}(s, z).$$

Следовательно,

$$(7)\qquad \bar{Q}(s,z)=\frac{z^2\,\lambda\bar{p}_0^*(s)\,\Phi[cs+\lambda(1-z)]-z^2\,\Phi(cs+\lambda)\,[\lambda\bar{p}_0^*(s)+\bar{q}_2(s)]}{z-\Phi[cs+\lambda(1-z)]}.$$

Чтобы определить $\bar{q}_2(s)$, воспользуемся тем, что функция $\bar{Q}(s,z)$ аналитическая в области $\operatorname{Re}s>0$, $|z|<1$. Из этого следует, что корни знаменателя правой части (6) являются также корнями числителя. Как доказано в [2] (стр. 47) уравнение $\Gamma(s)=w=\Phi[s+\lambda(1-w)]$ имеет единственное решение в круге $|w|<1$, в силу которого $z=\Gamma(cs)$ является единственным решением, в круге $|z|<1$, уравнения $z=\Phi[cs+\lambda(1-z)]$. Следовательно, мы получим

$$\bar{q}_2(s)=\lambda\,\bar{p}_0^*(s)\,\frac{\Gamma(cs)-\Phi(cs+\lambda)}{\Phi(cs+\lambda)}=\varrho\psi_c(s)\,\frac{\Gamma(cs)-\Phi(cs+\lambda)}{\Phi(cs+\lambda)}$$

и

$$(8)\qquad \bar{Q}(s,z)=\varrho\,z^2\,\psi_c(s)\,\frac{\Phi[cs+\lambda(1-z)]-\Gamma(cs)}{z-\Phi[cs+\lambda(1-z)]}.$$

Если теперь рассмотреть производящую функцию $R(z)=\sum_{k=1}^{\infty}P_kz^k$ вероятностей (3) §-а 1, то мы имеем,

$$(9)\qquad R(z)=\int_0^\infty\{\int_0^{y/c}P(x,y,z)\,[1-F(x)]\,dx[1-H(y)]\}dy=\int_0^\infty U(y,z)[1-H(y)]dy.$$

В силу (5)

$$U(y,z)=\int_0^{y/c}e^{-\lambda(1-z)x}\left[p_0^*(y-cx)\,z+\frac{1}{z}\,Q(y-cx,z)\right][1-F(x)]\,dx=$$

$$=\int_0^{y}e^{-\lambda(1-z)\frac{w}{c}}\left[\lambda\,p_0^*(y-w)z+\frac{1}{z}\,Q(y-w,z)\right]\left[1-F\left(\frac{w}{c}\right)\right]\frac{dw}{c}$$

вследствие которого

$$\bar{U}(s,z)=\int_0^\infty e^{-sy}\,U(y,z)\,dy=$$

$$(10)\qquad \begin{aligned}&=\left\{\varrho\psi_c(s)+\varrho\,z\,\psi_c(s)\,\frac{\Phi[cs+\lambda(1-z)]-\Gamma(cs)}{z-\Phi[cs+\lambda(1-z)]}\right\}\frac{1-\Phi[cs+\lambda(1-z)]}{cs+\lambda(1-z)}=\\&=\varrho\psi_c(s)\,\frac{z-\Gamma(cs)}{z-\Phi[cs+\lambda(1-z)]}\cdot\frac{1-\Phi[cs+\lambda(1-z)]}{cs+\lambda(1-z)}.\end{aligned}$$

Наш результат может быть формулирован в следующем виде:

Теорема 3. *В предположениях теоремы* 1 *производящая функция* $R(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k z^k$ *имеет вид*

$$R(z) = \int_0^\infty U(y, z)[1 - H(y)]\, dy$$

где преобразование

$$\overline{U}(s, z) = \int_0^\infty e^{-sy}\, U(y, z) dy$$

дается с формулой (10).

Пример:

$$F(x) = 1 - e^{-ux},\ H(x) = 1 - e^{-ax},\ G(x) = 1 - e^{-\beta x}$$

Тогда

$$\Phi(s) = \frac{\mu}{\mu + s}, \qquad \Gamma(s) = \frac{\mu + \lambda + s - \sqrt{(\lambda + s - \mu)^2 + 4s\mu}}{2\,\lambda}$$

$$\psi_c(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda[1 - \Gamma(cs)]} = \frac{2\,\lambda}{\lambda + (2 - c)s - \mu + \sqrt{(\lambda + cs - \mu)^2 + 4\, cs\mu}}$$

и

$$\varrho = \frac{1}{\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{c - 1}{c\,\lambda}\, \psi_c(a)}\,.$$

Производящая функция (9) имеет вид

$$R(z) = \overline{U}(\,a, z) = \varrho\psi_c(\,a)\, z \frac{\Gamma(c\,a) - z}{\lambda z^2 - (\mu + c\,a + \lambda)z + \mu}\,.$$

Величины (1) § 1

$$\pi_1 = R(1) = \overline{U}(\,a,\, 1) = \varrho\psi_c(\,a)\, \frac{1 - \Gamma(c\,a)}{c\,a}$$

$$\pi_2 = \frac{\varrho}{\beta}, \qquad \pi_3 = \frac{\varrho}{\lambda}\, \psi_c(\,a)\,.$$

В случае

$$c = 1$$

$$\varrho = \frac{a\beta}{a + \beta}, \qquad \pi_1 = \lambda\pi_3\, \frac{1 - \Gamma(a)}{a}, \qquad \pi_2 = \frac{a}{a + \beta}$$

$$\pi_3 = \frac{a\beta}{a + \beta}\; \frac{2}{\lambda + a - \mu + \sqrt{(\lambda + a - \mu)^2 + 4\ a\mu}}$$

и

$$R(z) = \pi_3 z\, \frac{\Gamma(a) - z}{\lambda z^2 - (\mu + a + \lambda)\, z + \mu} = \pi_3 z\, \frac{\Gamma(\,a) - z}{(z - z_1)\,(z - z_2)}\,,$$

где

$$z_1 = \frac{\lambda + a + \mu + \sqrt{(\lambda + a - \mu)^2 + 4\,a\mu}}{2\,\lambda} > 1\,, \quad z_2 = \Gamma(\,a)\,.$$

Следовательно

$$R(z) = \pi_3 \frac{z}{z_1 - z} = \pi_3 \sum_1^\infty \left(\frac{1}{z_1}\right)^k z^k$$

и

$$P_k = \pi_3 \left(\frac{1}{z_1}\right)^k, \quad k \geqq 1 .$$

Покажем, что из (10) следует один результат TAKÁCS-а ((67) стр. 72 [2]) Пусть

$$H(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y < T \\ 1, & \text{если} \quad y \geqq T \end{cases} \quad \text{и} \quad c = 1 .$$

Тогда $R(z) = \int\limits_0^T U(y, z) dy = V(T, z)$. Наше утверждение будет верно, если удастся показать, что

$$\lim_{T \to \infty} [P_0 + V(T, z)] = P_0 \frac{(1 - z)\, \Phi[\lambda(1 - z)]}{\Phi[\lambda(1 - z)] - z},$$

где $P_0 = 1 - a\lambda$, $a = \int\limits_0^\infty x dF(x)$ и предположено $\lambda a < 1$.

Из (8) и

$$\frac{1}{s} s\psi_c(s) = \frac{1}{s} \frac{\lambda}{1 - \lambda \dfrac{\Gamma(s) - 1}{s}}$$

следует, что при $s \to 0$

$$\overline{U}(s, z) \sim \frac{1}{s} \varrho \frac{\lambda}{1 - \lambda \Gamma'(0)} \frac{1 - \Phi[\lambda(1 - z)]}{\lambda(1 - z)} z \frac{z - 1}{z - \Phi[\lambda(1 - z)]} .$$

Так как

$$- \Gamma'(0) = \frac{a}{1 - a\lambda}, \quad \frac{\lambda}{1 - \lambda \Gamma'(0)} = \lambda P_0$$

то

$$\overline{U}(s, z) \sim \frac{1}{s} \varrho\lambda P_0 \frac{1 - \Phi[\lambda(1 - z)]}{\lambda(1 - z)} z \frac{z - 1}{z - \Phi[\lambda(1 - z)]} .$$

Откуда по одной тауберовской теореме (Теор. 4.3 стр. 192 [4]) следует

$$V(T, z) \sim T \varrho(T) P_0 \frac{1 - \Phi[\lambda(1 - z)]}{\Phi[\lambda(1 - z)] - z} z .$$

Так как $\varrho(T) = \dfrac{1}{\int\limits_0^\infty [1 - G(u)]\, du + T}$, то получаем, что

$$\lim_{T\to\infty} [P_0 + V(T, z)] = P_0 \left[1 + \frac{1 - \Phi[\lambda(1-z)]}{\Phi[\lambda(1-z)] - z} z\right] = P_0 \frac{(1-z)\,\Phi[\lambda(1-z)]}{\Phi[\lambda(1-z)] - z}$$

и утверждение доказано.

(Поступила: 3. января, 1964 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Томко́ J.: «Однолинейная система массового обслуживания с учетом ненадежности прибора». *Труды математического ист-а Академии Наук Венгрии* **9** (1964).

[2] Takács, L.: *Introduction to the Theory of Queses.* New York Oxford University Press 1962.

[3] Smith, W. L.: "Regenerative stochastic processes." *Proc. Roy. Soc.* ser. A **232** (1955) 6—31.

[4] Widder, D. V.: *The Laplace transform.* Princeton 1941.

ON THE STATIONARY QUEUE-LENGTH DISTRIBUTION IN A SINGLE-CHANNEL SERVICE SYSTEM CONSIDERING THE RELIABILITY OF THE CHANNEL

by

J. TOMKÓ

Summary

A single-channel service system is considered under the following conditions:

the arrival process is of Poisson type with parameter λ;

a call finding the service channel in working order remains in the system (it commences service at the instant of its arrival if the channel is free, and it joins the queue if the channel is occupied); in case of a failure of the channel every call staying in the system will get lost, and the calls arriving when the channel is under repair will get lost as well;

the service times ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ just as the repair times δ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ are independent random variables with distribution functions $F(x)$ and $G(x)$, respectively.

Let $\omega(t)$ denote the period counted from the instant t, in that the channel would remain in working order, if there were no service to be done.

Let $\tilde{\omega}(t)$ denote the period counted from the instant t, in that the channel is able to be continuously serving.

Let be assumed that $\omega(t) = c\tilde{\omega}(t)$, $c \geqq 1$.

Furthermore let r_i ($i = 1, 2, \ldots$) denote the instant of finishing the i-th repair of the channel. The random variables $\eta_i = \omega(r_i + 0)$ are assumed to be independent and to have the same distribution function $H(x)$.

Let be denoted by

$\pi_1(t)$ — the probability of finding at the instant t the channel in service (being occupied),

$\pi_2(t)$ — the probability of finding at the instant t the channel under repair,

$\pi_3(t)$ — the probability of finding at the instant t the channel in a free state,

$P_k(t)$ — the probability of finding at the instant t k calls staying in the system.

It is proved that if $\mathbf{M}\{\eta_i + \delta_i\} < \infty$, and if at least one of the distributions $H(x)$ and $G(x)$ is not a lattice distribution, then the limits $\pi_i = \lim\limits_{t\to\infty} \pi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $P_k = \lim\limits_{t\to\infty} P_k(t)$, $k \geqq 1$ exist; formulas are given for the probabilities π_i and the generating function $R(z) = \sum\limits_{1}^{\infty} P_k z^k$.

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DES SÉRIES DE FABER

par

LÁSZLÓ ALPÁR

§ 1. Introduction

Dans les notes [1] et [2] nous avons établi quelques propositions concernant le comportement de certaines séries de Taylor et de leurs transformées sur la frontière de leur cercle de convergence. La généralisation de ces résultats pour les séries de Faber fait l'objet de l'ouvrage présent.

1.1. Les théorèmes en question. — Soient ζ_0 $(0 < |\zeta_0| < 1)$ un point fixe du plan des z,

$$h_1(z) = \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \tag{1.1}$$

une transformation homographique, et

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.2}$$

une fonction régulière dans le cercle $|z| < 1$. Alors la fonction

$$f_1[h_1(z)] = f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z^n \tag{1.3}$$

est aussi régulière dans le cercle $|z| < 1$. Supposons de plus qu'il existe un point z' sur la circonférence $|z| = 1$ où $f_1(z)$ est encore définie et la série (1.2) converge. Soit z'' le point déterminé par l'équation $h_1(z'') = z'$, donc $|z''| = 1$. Il suit alors de (1.3) que $f_1(z') = f_2(z'')$. Cependant il reste à savoir si la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$ entraîne-t-elle la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$? Ce problème a été soulevé et résolu dans le sens négatif par P. TURÁN [9] qui a démontré l'existence des fonctions $f_1(z)$ telles que, malgré la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$ est divergente.

Nous avons généralisé le résultat de TURÁN dans notre travail [1]. En désignant par $a_m^{(k)}$ la m-ième moyenne (C,k) de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$, par $\beta_m^{(k+\delta)}$ la m-ième moyenne $(C,k+\delta)$ de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$, $k \geqq 0$, $\delta \geqq 0$, nous avons établi les deux propositions suivantes:

Théorème I. — *Si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$ *est sommable* (C, k), *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$ *est sommable* $(C, k + {}^1/_2)$, *et*

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m^{(k)} = \lim_{m\to\infty} \beta_m^{(k+1/2)} . \tag{1.4}$$

Théorème II. — *Soit* $0 \leqq \delta < {}^1/_2$ *un nombre donné. Il existe des fonctions* $f_1(z)$ *telles que, malgré la sommabilité* (C, k) *de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n$ *n'est pas sommable* $(C, k + \delta)$.

Après l'étude de ces propriétes locales, nous avons examiné le comportement des séries (1.2) et (1.3) sur la circonférence $|z| = 1$ et nous avons obtenu les résultats suivants [2]:

Théorème III. — *Il existe des fonctions* $f_1(z)$ *telles que* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ *et, malgré cela,* $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n(\zeta_0)| = \infty$.

Théorème IV. — *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z^n$ *est uniformément convergente pour* $|z| = 1$; *si de plus* $z' = h_1(z'')$, $|z'| = |z''| = 1$, *alors*

$$f_1(z') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z'^n = f_2(z'') = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z''^n . \tag{1.5}$$

Corollaire. — *Si, en considérant la relation* (1,5), *on compare les théorèmes* III *et* IV, *on constate l'existence des couples de fonctions telles que* $f_1(z)$, $f_2(z)$ *qui admettent les mêmes valeurs dans la même succession lorsque* z' *et* z'' *parcourent la circonférence* $|z| = 1$, *pourtant* $f_1(z)$ *est représentée par une série de puissances absolument convergente pour* $|z| = 1$, *tandis que le développement Taylorien de* $f_2(z)$ *est seulement uniformément, mais non absolument convergente lorsque* $|z| = 1$.

Dès lors il se pose d'elle-même la question suivante: Peut-on faire dériver chaque série de puissances uniformément, mais non absolument convergente pour $|z| = 1$ à l'aide d'une transformation du type (1.1) à partir d'une série de puissances convenable, absolument convergente pour $|z| = 1$, si de plus ζ_0 a aussi une valeur appropriée? La réponse est négative. Étant donné que $h_1(z)$ et sa fonction inverse sont de la même structure, le problème peut être formulé encore de la manière suivante: Si la série (1.2) est uniformément, mais non absolument convergente pour $|z| = 1$, peut-on trouver toujours un nombre complexe ζ_0 $(0 < |\zeta_0| < 1)$ de sorte que la série (1.3) soit absolument convergente si $|z| = 1$? Il en répond la proposition ci-après.

Théorème V. — *Il existe des séries* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *uniformément, mais non absolument convergentes sur la circonférence* $|z| = 1$, *dont les transformées, les séries* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z^n$ *sont également uniformément, mais non absolument convergentes pour* $|z| = 1$, *quelle que soit la valeur de* ζ_0.[1]

[1] Ce théorème a été démontré par G. Piranian (cf. [2] pp. 289, 313—315).

Notons enfin que les théorèmes I—V subsistent même si la série (1.2) a un rayon de convergence $R \neq 1$ et, par suite, la transformation (1.1) est remplacée par la fonction

$$h_R(z) = e^{i\vartheta_0} \frac{R^2(z - \zeta_0)}{R^2 - \bar{\zeta}_0 z} \qquad (0 < |\zeta_0| < R),$$

où ϑ_0 est un angle constant.

1.2. Position du problème. — La généralisation des théorèmes énoncés peut se faire par des procédés différents. La fonction analytique envisagée peut être représentée non seulement par sa série de puissances, mais aussi par une autre sorte de série de fonctions convenables convergente dans un domaine plus général que le cercle, et la transformation $h_1(z)$ resp. $h_R(z)$ peut également prendre une forme moins spéciale.

Considérons, pour fixer les idées, dans le plan des z_1 des fonctions $F_1(z_1)$ holomorphes dans un domaine D_1 borné simplement connexe limité par une courbe C_1 fermée simple analytique et régulière; dans un tel domaine on peut représenter $F_1(z_1)$ par sa série de Faber associée à C_1 (cf. § 2). Or, s'il est tout indiqué de choisir pour la représentation de $F_1(z_1)$ la série de Faber, le choix d'une fonction adéquate qui pourrait jouer le rôle de $h_R(z)$ soulève déjà certaines questions.

Nous allons voir dans le § 3 qu'en remplaçant $h_R(z)$ par la fonction homographique

$$z_1 = h(z_2) = \frac{pz_2 + q}{z_2 - z_2^*} \tag{1.6}$$

non dégénérée ($pz_2^* + q \neq 0$) telle que z_2^* soit à l'extérieur de C_2 l'image de C_1 par $h(z_2)$ dans le plan des z_2, alors des propositions analogues aux théorèmes I—V sont valables pour les séries de Faber de $F_1(z_1)$ et de $F_2(z_2) = F_1[h(z_2)]$ lorsque $z_1 \in C_1$, $z_2 \in C_2$.

Dans le § 4 $h_R(z)$ sera remplacée par une fonction *non homographique* $z_1 = k_i(z_2)$ faisant la représentation conforme biunivoque de D_1, l'intérieur de C_1, sur D_2, l'intérieur de C_2 actuellement l'image de C_1 par $k_i(z_2)$. (Si C_1 et C_2 sont deux courbes analytiques régulières données à l'avance, il existe une infinité de fonctions $k_i(z_2)$ avec les propriétés signalées.) Nous allons montrer que dans ce cas il est impossible de déduire des théorèmes I—V les propriétés de la série de Faber de la fonction $F_2^{(i)}(z_2) = F_1[k_i(z_2)]$. Nous ne connaissons pas d'autres procédés appropriés non plus qui fourniraient les propositions correspondantes. Nous avons l'intention de revenir sur ce problème dans une note ultérieure.

Toutefois nous déterminerons à partir de $F_1(z_1)$ des fonctions $F_2^*(z_2)$ pour lesquelles nous établirons des propositions pareilles aux théorèmes I—V exceptées les relations (1.4) et (1.5) qui n'ont pas d'analogues. Nous y parviendrons en effectuant l'application conforme biunivoque de l'extérieur de C_1 sur celui de C_2 par la fonction *non homographique* $z_1 = k_e(z_2)$, C_2 étant maintenant l'image de C_1 par $k_e(z_2)$. [Si C_1 et C_2 sont déjà données, il existe une infinité de fonctions $k_e(z_2)$.] $F_1[k_e(z_2)]$ ne définit pas alors une fonction analytique dans tout le domaine intérieur à C_2, elle n'est donc pas développable en série de Faber relative à C_2. C'est pour cette raison que nous représentons

$F_2^*(z_2)$ par une intégrale. Il s'ensuit, en opposition avec les cas précédents, que la transformation qui fait correspondre C_1 à C_2 et celle qui change $F_1(z_1)$ en $F_2^*(z_2)$ sont différentes.

§ 2. Quelques propriétés des polynomes et des séries de Faber

Nous allons exposer, sans démonstration, certaines propriétés des polynomes et des séries de Faber que nous utiliserons par la suite. Ces résultats sont développés dans les travaux [3], [4], [5] de G. Faber, mais on les retrouve aussi dans les ouvrages plus récents comme p. e. ceux de L. Ilieff [7], H. Tietz [8], J. L. Ullman [10], [11].

2.1. Notations. — *a)* Le contour C considéré soit toujours simple, formé d'un seul arc analytique et régulier, avec l'intérieur $\mathrm{I}(\mathsf{C})$, l'extérieur $\mathrm{E}(\mathsf{C})$; $\bar{\mathrm{I}}(\mathsf{C})$ et $\bar{\mathrm{E}}(\mathsf{C})$ désignent les domaines correspondants fermés.

b) Il existe une fonction, et une seule, $w = \varphi(z)$ faisant la représentation conforme biunivoque de $\bar{\mathrm{E}}(\mathsf{C})$ sur $\bar{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_R)$, où K_R est la circonférence $|w| = R$, et qui, pour des $|z|$ assez élevés, peut être représentée sous la forme

$$w = \varphi(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots . \tag{2.1}$$

Les quantités R, a_0, $a_1, \dots$ sont uniques et déterminées par les propriétés de $\varphi(z)$.

c) Soit K_ϱ la circonférence $|w| = \varrho$ et C_ϱ son image par $\varphi(z)$ (lorsqu'elle existe). Nous écrirons donc aussi C_R au lieu de C.

d) Désignons par

$$z = \psi(w) = w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \frac{\beta_2}{w^2} + \dots \tag{2.2}$$

la fonction inverse de $\varphi(z)$. La série (2.2) converge pour $|w| > r$ et $w \neq \infty$, avec un $r < R$. En effet, C_R étant analytique et régulière $\psi(w)$ est holomorphe non seulement dans $\mathrm{E}(\mathsf{K}_R)$ mais elle est prolongeable au delà de K_R dans $\mathrm{I}(\mathsf{K}_R)$. Il existe donc un nombre $r < R$ telle que (2.2) converge dans $\mathrm{E}(\mathsf{K}_r)$. Par conséquent $\mathsf{C}_r \subset \mathrm{I}(\mathsf{C}_R)$ et $\varphi(z)$ est holomorphe dans $\mathrm{E}(\mathsf{C}_r)$.

2.2. Définition des polynomes de Faber. — Supposons que $|z|$ est suffisamment grand pour que $\varphi(z)$ soit susceptible de la représentation (2.1).

$\Phi_n(z)$, le n-ième polynome de Faber associé au contour C_R, est la partie polynomiale du degré n de l'expression

$$[\varphi(z)]^n = \Phi_n(z) + R_n(z) \tag{2.3}$$

et $R_n(z)$ ne contient que les puissances négatives de z.

On montre également que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} \Phi_n(z) & \text{pour} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad n < 0 \end{cases} \qquad z \in \mathrm{I}(\Gamma) \tag{2.4}$$

où Γ est un contour simple contenant $\mathrm{I}(\mathsf{C}_r)$.

2.3. Série de Faber d'une fonction analytique. — *Chaque fonction $F(z)$ analytique dans $I(C_R)$ peut être représentée par une série de polynomes unique*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(z) \tag{2.5}$$

uniformément et absolument convergente sur chaque sous-ensemble fermé de $I(C_R)$, où les $\Phi_n(z)$ ne dépendent que de C_R, les constantes A_n dépendent aussi de $F(z)$.

Les A_n sont les coefficients de Faber de $F(z)$ relatifs à C_R, (2.5) est la série de Faber de $F(z)$ dans $I(C_R)$; si $F(z)$ possède une singularité sur C_R, on dit que C_R est la courbe de convergence de la série (2.5). Lorsque C_R est une circonférence, la série de Faber se réduit à une série de Taylor.

2.4. Fonction associée. — Le domaine limité par C_R et C_r resp. l'anneau circulaire limité par K_R et K_r joue un rôle important dans les raisonnements de FABER, car c'est le domaine de régularité commun à $\varphi(z)$ et $F(z)$ resp. à $\psi(w)$ et $G(w) = F[\psi(w)]$. Dans cet anneau circulaire $G(w)$ se développe en série de Laurent:

$$G(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n w^n, \qquad r < |w| < R. \tag{2.6}$$

Les coefficients de Faber de $F(z)$ relatifs à C_R sont donnés par la formule:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varrho} \frac{G(w)}{w^{n+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varrho} \frac{F[\psi(w)]}{w^{n+1}}dw, \quad r < \varrho < R, \quad n \geqq 0.$$

Ces coefficients sont uniques tout comme ceux de la série de Laurent de $G(w)$.

Il résulte de (2.1) et (2.6) que

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n [\varphi(z)]^n, \qquad z \in I(C_R) \cap E(C_r) \tag{2.7}$$

et, par suite,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n w^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n w^n = f(w) + g(w) \tag{2.8}$$

Pour $z \in I(C_R) \cap E(C_r)$ resp. $r < |w| < R$. Il est à noter, pour éviter la confusion, que (2.5) a lieu pour $z \in I(C_R)$ mais (2.7) resp. (2.8) seulement dans les domaines annulaires.

$g(w)$ est holomorphe dans $E(K_r)$ avec $g(\infty) = 0$; la série $\sum_{n=-\infty}^{-1} A_n w^n$ est *uniformément et absolument convergente* donc aussi *sommable* (C,k) sur chaque sous-ensemble fermé de $E(K_r)$, en particulier sur $K_R \subset E(K_r)$. Cette circonstance est très important pour nous. Elle signifie que le comportement du développement de $g(w)$ sur K_R n'influence pas, vu les théorèmes à démontrer, les propriétés de la série de Laurent de $f(w) + g(w)$ sur K_R qui sont ainsi déterminées par celles de la série de puissances de $f(w)$.

La fonction $f(w)$ ayant dans son développement Taylorien les mêmes coefficients que la série de Faber de $F(z)$, est la fonction associée à $F(z)$. $f(w)$ est holomorphe dans $I(K_R)$ et de l'allure de sa série de Taylor sur K_R on peut tirer des conclusions sur la nature de la série de Faber de $F(z)$ lorsque $z \in C_R$.

2.5. Évaluation des polynomes de Faber. — *L'inégalité*

$$\lambda \mid w \mid^n < \mid \Phi_n(z) \mid < \mu \mid w \mid^n \tag{2.9}$$

a lieu sur chaque sous-ensemble fermé de $\mathrm{E}(\mathsf{K}_r)$ *et* $\mathrm{E}(\mathsf{C}_r)$, *où* $w = \varphi(z)$, λ *et* μ *sont des constantes indépendantes de* w *resp.* z.

2.6. Suite de coefficients de Faber. — *Étant donnée la suite* $\{\Phi_n(z)\}$ *de polynomes de Faber associée à* C_R *et une suite de nombres* $\{A_n\}$ *vérifiant la relation*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mid A_n \mid^{1/n} = \frac{1}{R_0} \leq \frac{1}{R}, \tag{2.10}$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \, \Phi_n(z)$ *est alors uniformément et absolument convergente sur chaque sous-ensemble fermé de* $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_0})$ *où elle représente une fonction régulière et diverge dans* $\mathrm{E}(\mathsf{C}_{R_0})$.

C_{R_0} est donc la courbe de convergence de la série de Faber en question. Dans les cas que nous avons à traiter, on a $R_0 = R$.

§ 3. Transformation homographique de la série de Faber et de son domaine de convergence

Les courbes C_j $(j = 1, 2)$ ont été définies dans le § 1; C_2 étant à présent l'image de C_1 par $z_1 = h(z_2)$ [cf. (1.6)]. Soient $w_j = \varphi_j(z_j)$, $z_j = \psi_j(w_j)$, K_{R_j}, K_{r_j} des notions rattachées à C_j analogues à celles du § 2 relatives à C_R; écrivons aussi C_{R_j} au lieu de C_j.

Si $F_1(z_1)$ et une fonction analytique dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_1})$, $F_2(z_2) = F_1[h(z_2)]$ est analytique dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_2})$; elles peuvent donc être représentées par leurs séries de Faber respectives et, par application de la formule (2.8), on peut écrir

$$F_j(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \Phi_n^{(j)}(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} w_j^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)} w_j^n = f_j(w_j) + g_j(w_j) \tag{3.1}$$

où l'indice j se réfère à C_{R_j}; (3.1) a lieu pour

$$z_j \in \mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_j}) \cap \mathrm{E}(\mathsf{C}_{r_j}), \ r_j < \mid w_j \mid < R_j .$$

D'après ce que nous venons de dire sur la fonction associée, tout revient à trouver une relation entre $f_1(w_1)$ et $f_2(w_2)$ resp. entre w_1 et w_2. Il découle de (1.6), (2.1) et (2.2) que

$$w_1 = \varphi_1(h[\psi_2(w_2)]) = \varphi_1 \left(\frac{p \, \psi_2(w_2) + q}{\psi_2(w_2) - z_2^*} \right) = t(w_2) . \tag{3.2}$$

$t(w_2)$ applique d'une manière conforme et biunivoque $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_{R_2})$ sur $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_{R_1})$. En effet, $t(w_2)$ est manifestement une fonction univalente dans $\mathrm{E}(\mathsf{K}_{R_2})$ et si $w_2 \in \mathsf{K}_{R_2}$, on a $z_2 \in \mathsf{C}_{R_2}$, $z_1 \in \mathsf{C}_{R_1}$ et $w_1 \in \mathsf{K}_{R_1}$; soit de plus $\psi_2(w_2^*) = z_2^*$, alors $t(w_2^*) = \infty$. $t(w_2)$ est donc nécessairement de la forme

$$w_1 = t(w_2) = \frac{R_1}{R_2} e^{i\vartheta_0} \frac{R_2^2 (w_2 - \omega_0)}{R_2^2 - \bar{\omega}_0 \, w_2} \tag{3.3}$$

où ϑ_0, ω_0 $(0 < |\omega_0| < R_2)$ sont des constantes à déterminer. L'équation $t(w_2^*) = \infty$ donne, d'après (3.3), $\omega_0 = \dfrac{R_2^2}{\bar{w}_2^*}$. Pour avoir ϑ_0 désignons par $z_1' \in C_{R_1}$, $z_2' \in C_{R_2}$ deux points liés par l'équation $z_1' = h(z_2')$, et soient $w_1' = \varphi_1(z_1')$, $w_2' = \varphi_2(z_2')$; en posant w_1' et w_2' dans (3.3), on obtient une équation pour ϑ_0.

Faisons encore le changement de variable

$$\frac{R_2}{R_1} w_1 = W = e^{i\vartheta_0} \frac{R_2^2(w_2 - \omega_0)}{R_2^2 - \bar{\omega}_0 w_2} = h_{R_2}(w_2)\,, \tag{3.4}$$

ce qui donne

$$f_1(w_1) = \tilde{f}_1(W) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n W^n\,, \quad g_1(w_1) = \tilde{g}_1(W) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \tilde{a}_n W^n\,, \tag{3.5}$$

avec $\tilde{a}_n = a_n^{(1)}(R_1/R_2)^n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Rappelons ici la remarque faite dans le § 1 sur l'extension possible des théorèmes I—V aux cas des transformations de la forme (3.4). Posons

$$\tag{3.6} \begin{aligned} f_1[h_{R_2}(w_2)] &= \tilde{f}_2(w_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\omega_0, \vartheta_0)\, w_2^n\,, \\ \tilde{g}_1[h_{R_2}(w_2)] &= \tilde{g}_2(w_2) = \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) + \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(\omega_0, \vartheta_0)\, w_2^n\,, \end{aligned}$$

où $\tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) = \tilde{g}_2(\infty)$. Or, d'après ce qui précède $F_2[\psi_2(w_2)] = f_2(w_2) + g_2(w_2) = \tilde{f}_2(w_2) + \tilde{g}_2(w_2)$, avec $g_2(\infty) = 0$. On en conclut que

$$\tag{3.7} \begin{aligned} f_2(w_2) &= \tilde{f}_2(w_2) + \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n\,, \\ g_2(w_2) &= \tilde{g}_2(w_2) - \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(2)} w_2^n\,, \end{aligned}$$

où $b_0(\omega_0, \vartheta_0) + \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0) = a_0^{(2)}$, $b_n(\omega_0, \vartheta_0) = a_n^{(2)}$ pour $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. En tenant compte des expressions (3.1)—(3.7), il vient

$$f_1\left(\frac{R_1}{R_2} e^{i\vartheta_0} \frac{R_2^2(w_2 - \omega_0)}{R_2^2 - \bar{\omega}_0 w_2}\right) = \tilde{f}_1[h_{R_2}(w_2)] = f_2(w_2) - \tilde{b}_0(\omega_0, \vartheta_0)\,. \tag{3.8}$$

C'est la relation cherchée permettant d'employer les théorèmes I—V. En outre on peut tirer de ces mêmes expressions (3.1)—(3.7) que

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} |a_n^{(2)}|^{1/n} = \frac{1}{R_2}\,. \tag{3.9}$$

Ce qui garantit, d'après le théorème 2.6 du § 2, que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ représente une fonction holomorphe dans $I(C_{R_2})$.

Soient enfin $\tilde{z}_1 \in C_{R_1}$, $\tilde{z}_2 \in C_{R_2}$ deux points fixes vérifiants l'égalité $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$, $A_m^{(k)}$ la m-ième moyenne (C, k) de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$, $B_m^{(k+\delta)}$

la m-ième moyenne $(C,k+\delta)$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}\Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$. Ces notations sont nécessaires pour énoncer les propositions nouvelles.

Théorème 1. — *Si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}\Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ *est sommable* (C,k), *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}\Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ *est sommable* $(C,k+{}^1/_2)$, *et*

$$\lim_{m\to\infty} A_m^{(k)} = \lim_{m\to\infty} B_m^{(k+1/2)}. \tag{3.10}$$

Démonstration. — Soit $\tilde{w}_2 = \varphi_2(\tilde{z}_2)$ $(|\tilde{w}_2| = R_2)$; on a donc, vu (3.3) et (3.4),

$$t(\tilde{w}_2) = \tilde{w}_1 = \varphi_1(\tilde{z}_1), \qquad |\tilde{w}_1| = R_1, \qquad \tilde{W} = \frac{R_2}{R_1}\tilde{w}_1 .$$

Les séries $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(1)}\tilde{w}_1^n$, $\sum_{n=-\infty}^{-1}\tilde{a}_n\tilde{W}^n$ sont convergentes [cf. 2.4 et (3.5)], $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}\Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ est sommable (C,k) par hypothèse, il découle donc de (3.1) et (3.5) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}\tilde{w}_1^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_n\tilde{W}^n$ sont aussi sommable (C,k). La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}\tilde{w}_2^n$ est ainsi sommable $(C,k+1/2)$ en vertu du théorème I, et la convergence de $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(2)}\tilde{w}_2^n$ implique, d'après (3.1), la sommabilité $(C,k+{}^1/_2)$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}\Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$.

On a ensuite, selon (1.4),

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m^{(k)} = \lim_{w_1\to\tilde{w}_1} f_1(w_1) = \lim_{m\to\infty}\beta_m^{(k+1/2)} = \lim_{w_2\to\tilde{w}_2} f_2(w_2) \tag{3.11}$$

et, d'après (3.6),

$$g_1(\tilde{w}_1) = \tilde{g}_2(\tilde{w}_2) . \tag{3.12}$$

(3.1), (3.7), (3.11) et (3.12) entraînent

$$\lim_{z_1\to\tilde{z}_1} F_1(z_1) = \lim_{z_2\to\tilde{z}_2} F_2(z_2) .$$

Ce qui, avec la sommabilité des séries considérées, vérifie (3.10).

Théorème 2. — *Soit* $0 \leq \delta < 1/2$ *un nombre donné. Il existe des fonctions* $F_1(z_1)$ *telles que, malgré la sommabilité* (C,k) *de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}\Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}\Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ *n'est pas sommable* $(C,k+\delta)$.

Démonstration. — Soit $f_1(w_1)$ une fonction définie dans $\mathrm{I}(\mathsf{K}_{R_1})$ dont l'existence est assurée par le théorème II, de sorte que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}\tilde{w}_1^n$ soit sommable (C,k). Il existe donc une fonction $F_1(z_1)$ analytique dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_1})$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}\Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ soit aussi sommable (C,k) (cf. théorèmes 2.6 et 2.4). $\tilde{f}_1(W)$

étant de la même nature que $f_1(w_1)$, il résulte du théorème II que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \tilde{w}_2^n$ n'est pas sommable $(C, k+\delta)$; en conséquence la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ n'est pas sommable $(C,k+\delta)$ non plus.

Théorème 3. — *Il existe des fonctions $F_1(z_1)$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1) | < < \infty$ pour $z_1 \in C_{R_1}$ et, malgré cela, $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2) | = \infty$ pour $z_2 \in C_{R_2}$.*

Démonstration. — Soit $f_1(w_1)$ une fonction définie dans $I(K_{R_1})$ dont l'existence est assurée par le théorème III. La fonction $F_1(z_1)$ est déterminée par C_{R_1} et $f_1(w_1)$ comme dans le cas précédent. On a, vu (2.9), (3.1) et (3.5),

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| < \mu \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} w_1^n| = \mu \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{a}_n W^n| < \infty\ , \quad z_1 \in C_{R_1},\ w_1 \in K_{R_1},\ W \in K_{R_2}.$$

Tandis qu'en tenant compte du théorème III et à nouveau de (2.9), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2) | > \lambda \sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(2)} w_2^n | = \infty\ , \qquad z_2 \in C_{R_2},\ w_2 \in K_{R_2}. \tag{3.13}$$

Théorème 4. — *Si $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1) | < \infty$ pour $z_1 \in C_{R_1}$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ est uniformément convergente pour $z_2 \in C_{R_2}$; de plus si $\tilde{z}_1 \in C_{R_1}$, $\tilde{z}_2 \in C_{R_2}$ et $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$, alors*

$$F_1(\tilde{z}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1) = F_2(\tilde{z}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)\ . \tag{3.14}$$

Démonstration. — Il découle de (2.9) et (3.5) que

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} | a_n^{(1)} w_1^n| = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} | \tilde{a}_n W^n| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| < \infty\ , \quad z_1 \in C_{R_1},\ w_1 \in K_{R_1},\ W \in K_{R_2}.$$

Il suit ainsi du thérème IV que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n$ est uniformément convergente pour $| w_2 | = R_2$. $\tilde{g}_2(w_2)$ étant holomorphe sur K_{R_2}, on conclut de (3.1) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ est aussi uniformément convergente pour $z_2 \in C_{R_2}$.

La relation (3.14) résulte de l'égalité $f_1(\tilde{w}_1) = \tilde{f}_1(\tilde{W})$, ainsi que de (1.5) et (3.12).

Un corollaire des théorèmes 3 et 4 analogue à celui des théorèmes III et IV n'a pas de sens dans le cas générale où C_{R_1} et C_{R_2} ne sont pas identiques avec la même courbe.

Il reste à établir que l'inverse du théorème 4 est faux.

Théorème 5. — *Il existe des séries de Faber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)$ uniformément, mais non absolument convergentes sur leur courbe de convergence C_{R_1}, dont les transformées, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ sont également uniformément, mais non* *absolument convergentes pour* $z_2 \in C_{R_2}$, *quelle que soit la transformation homographique* $z_1 = h(z_2)$.

Démonstration. — Soit $f_1(w_1)$ une fonction dont l'existence est assurée par le théorème V. Comme nous venons de voir C_{R_1} et $f_1(w_1)$ permettent de déterminer $F_1(z_1)$, $g_1(w_1)$, $\tilde{f}_1(W)$, $\tilde{g}_1(W)$. $g_1(w_1)$ resp. $\tilde{g}_1(W)$ étant holomorphe sur K_{R_1} resp. K_{R_2}, il suit de (3.1) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)$ est aussi uniformément convergente pour $z_1 \in C_{R_1}$. On tire ensuite de (2.9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| > \lambda \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} w_1^n| = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{a}_n W^n| = \infty, \quad z_1 \in C_{R_1}, w_1 \in K_{R_1}, W \in K_{R_2},$$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)$ est uniformément, mais non absolument convergente sur C_{R_1}.

D'autre part, selon le théorème V, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n$ est uniformément, mais non absolument convergente sur K_{R_2}, et (3.13) a lieu de neuveau. En tenant compte enfin de la régularité de $\tilde{g}_2(w_2)$ sur K_{R_2}, on peut affirmer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ est aussi uniformément, mais non absolument convergente sur C_{R_2}.

§ 4. Transformation conforme générale de la courbe de convergence

Nous allons aborder maintenant le problème plus général en substituant à la fonction particulière $z_1 = h(z_2)$ une transformation non homographique. Considérons, comme cela était prévu dans le § 1, deux alternatives: la correspondance entre $\bar{I}(C_{R_1})$ et $\bar{I}(C_{R_2})$ et celle entre $\bar{E}(C_{R_1})$ et $\bar{E}(C_{R_2})$.

4.1. Application de $\bar{I}(C_{R_1})$ sur $\bar{I}(C_{R_2})$. — Soit $z_1 = k_i(z_2)$ une fonction non homographique transformant d'une manière conforme et biunivoque $\bar{I}(C_{R_1})$ en $\bar{I}(C_{R_2})$. La fonction $F_2^{(i)}(z_2) = F_1[k_i(z_2)]$ est donc holomorphe dans $I(C_{R_2})$ et la formule (3.1) reste valable pour $j = 2$ même si l'on y remplace $F_2(z_2)$, $f_2(w_2)$, $g_2(w_2)$ par $F_2^{(i)}(z_2)$, $f_2^{(i)}(w_2)$, $g_2^{(i)}(w_2)$. Il faut, par conséquent, établir une relation entre $f_1(w_1)$ et $f_2^{(i)}(w_2)$ resp. entre w_1 et w_2. On peut écrire à l'instar de (3.2),

$$w_1 = \varphi_1\big(k_i[\psi_2(w_2)]\big) = t_i(w_2) \,. \tag{4.1}$$

Cependant on ne peut pas tirer de (4.1) les mêmes conclusions que l'on a obtenues de (3.2); en d'autres termes $t_i(w_2)$ n'admet pas la forme (3.3). En effet, C_{R_2} étant analytique et régulière $k_i(z_2)$ est prolongeable au delà de C_{R_2} dans $E(C_{R_2})$, mais étant différente d'une fonction homographique $k_i(z_2)$ doit avoir d'autres singularités dans $E(C_{R_2})$ qu'un seul pôle simple. De plus si $z_1 \neq \infty$ et $w_2 \neq \infty$, $\varphi_1(z_1)$ est holomorphe dans $E(C_{R_1})$ et $\psi_2(w_2)$ dans $E(K_{R_2})$. Il s'ensuit que $t_i(w_2)$ a aussi d'autres singularités dans $E(K_{R_2})$ qu'un seul pôle simple, elle n'est donc pas une fonction homographique et, en conséquence, elle ne peut pas être de la forme (3.3). On en conclut qu'une relation de sorte (3.8), qui constitue la base de nos raisonnements précédents, n'a plus lieu dans le cas envisagé; d'où la proposition.

Théorème 6. — *Les théorèmes* I—V *ne permettent pas d'établir une relation de genre* (3.8) *entre* $f_1(w_1)$ *et* $f_2^{(i)}(w_2)$ *et d'affirmer que les théorèmes* 1—5 *subsistent si l'on y remplace la série de Faber de* $F_2(z_2)$ *par celle de* $F_2^{(i)}(z_2)$.

Observons encore que nous pouvons choisir pour $k_i(z_2)$ une fonction qui applique $\bar{\mathrm{I}}(\mathsf{C}_{R_1})$ sur lui-même. Ce cas particulier présente alors une analogie parfaite avec le problème primitif.

4.2. Application de $\bar{\mathrm{E}}(\mathsf{C}_{R_1})$ **sur** $\bar{\mathrm{E}}(\mathsf{C}_{R_2})$. — Soit $z_1 = k_e(z_2)$ une fonction non homographique faisant la transformation conforme biunivoque de $\bar{\mathrm{E}}(\mathsf{C}_{R_1})$ sur $\bar{\mathrm{E}}(\mathsf{C}_{R_2})$ avec $k_e(z_2^*) = \infty$, $z_2^* \in \mathrm{E}(\mathsf{C}_{R_2})$. $k_e(z_2)$ n'a donc d'autre singularité dans $\mathrm{E}(\mathsf{C}_{R_2})$ que le pôle simple z_2^*. D'autre part C_{R_2} étant analytique et régulière $k_e(z_2)$ se prolonge au delà de C_{R_2} sans être holomorphe dans tout le domaine $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_2})$. La fonction $F_2^{(e)}(z_2) = F_1[k_e(z_2)]$ n'est donc analytique que dans un domaine $\Delta \subset \mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_2})$ tel que C_{R_2} fait partie de la frontière de Δ. Par conséquent $F_2^{(e)}(z_2)$ n'est pas développable en série de Faber et l'on ne peut pas réitérer les raisonnements faits dans le § 3.

Néanmoins il existe une fonction $F_2^*(z_2)$ qui, avec certaines restrictions, possède les mêmes propriétés que $F_2(z_2)$. Pour le prouver représentons $F_2^{(e)}(z_2)$ par une sorte de série de Laurent. À cette fin soit notée par K_{ϱ_2} la circonférence du plus petit rayon dont l'image C_{ϱ_2} [par $\varphi_2(z_2)$] est encore contenue dans $\Delta \cap \mathrm{E}(\mathsf{C}_{r_2})$. On a alors, d'après (2.7) et (2.8),

$$F_2^{(e)}[\psi_2(w_2)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(2)} w_2^n = f_2^{(e)}(w_2) + g_2^{(e)}(w_2), \quad \varrho_2 < |w_2| < R_2 , \tag{4.2}$$

$$F_2^{(e)}(z_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(2)} [\varphi_2(z_2)]^n . \tag{4.3}$$

Soit enfin Γ un contour simple aussi voisin à C_{R_2} que l'on veut et tel que l'on ait $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{\varrho_2}) \subset \mathrm{I}(\Gamma) \subset \mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_2})$. Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour déterminer $F_2^*(z_2)$.

Théorème 7. — *La fonction*

$$F_2^*(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F_1[k_e(\zeta)]}{\zeta - z_2} d\zeta , \qquad z_2 \in \mathrm{I}(\Gamma) \tag{4.4}$$

est holomorphe et développable en série de Faber dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_2})$ *et, à l'exception des relations* (3.10) *et* (3.14), *les théorèmes* 1—5 *restent valables lorsqu'on y remplace la série de Faber de* $F_2(z_2)$ *par celle de* $F_2^*(z_2)$.

Il est à noter qu'en posant dans l'intégrale (4.4) une fonction homographique $h(\zeta)$ au lieu de $k_e(\zeta)$, on aurat $F_2^*(z_2) \equiv F_2(z_2) = F_1[h(z_2)]$.

Démonstration. — La fonction $F_1[k_e(\zeta)] = F_2^{(e)}(\zeta)$ étant continue sur Γ, l'intégrale (4.4) représente une fonction holomorphe dans $\mathrm{I}(\Gamma)$; et comme Γ peut se rapprocher arbitrairement de C_{R_2}, $F_2^*(z_2)$ est holomorphe dans tout le domaine $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_2})$.

De plus, la série (4.3) converge uniformément sur Γ, il est donc légitime de l'intégrer terme à terme. Nous obtenons ainsi, en vertu de (4.3), (4.4) et (2.4),

$$F_2^*(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \int_{\Gamma} \frac{[\varphi_2(\zeta)]^n}{\zeta - z_2} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2) , \qquad z_2 \in \mathrm{I}(\Gamma) , \tag{4.5}$$

ce qui donne, selon (2.8),

$$(4.6)\quad F_2^*[\psi_2(w_2)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} w_2^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_2^* w_2^n = f_2^*(w_2) + g_2^*(w_2)\,, \quad r_2 < | w_2 | < R_2\,.$$

Nous savons en outre que $F_2^*[\psi_2(w_2)] \not\equiv F_2^{(e)}[\psi_2(w_2)]$, d'où , en comparant (4.2) et (4.6),

$$(4.7)\qquad f_2^*(w_2) \equiv f_2^{(e)}(w_2)\,, \qquad g_2^*(w_2) \not\equiv g_2^{(e)}(w_2)\,.$$

C'est à cause de la seconde expression (4.7) que les relations (3.10) et (3.14) ne sont plus valables.

Il reste à prouver que $f_2^{(e)}(w_2)$ s'exprime au moyen de $f_1(w_1)$ en utilisant une transformation de genre (3.8). On a

$$w_1 = \varphi_1(k_e[\psi_2(w_2)]) = t_e(w_2)\ ;$$

on voit bien que la fonction $w_1 = t_e(w_2)$ applique $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_{R_1})$ sur $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_{R_2})$ d'une façon conforme et biunivoque. $k_e(z_2)$ ayant dans $\mathrm{E}(\mathsf{C}_{R_2})$ une seule singularité le pôle simple z_2^*, $k_e[\psi_2(w_2)]$ et $t_e(w_2)$ ont dans $\mathrm{E}(\mathsf{K}_{R_2})$ également une seule singularité le pôle simple $w_2^* = \varphi_2(z_2^*)$. Il en résulte que $t_e(w_2)$ est nécessairement de la forme (3.3), faisant aussi la représentation conforme biunivoque de $\overline{\mathrm{I}}(\mathsf{K}_{R_1})$ sur $\overline{\mathrm{I}}(\mathsf{K}_{R_2})$; les constantes ω_0 et ϑ_0 qui interviennent dans l'expression de $t_e(w_2)$ peuvent être calculées par le procédé employé dans le § 3. La relation (3.8) subsistera donc en y posant $f_2^{(e)}(w_2)$ à la place de $f_2(w_2)$. Soient enfin $\tilde{z}_1 = k_e(\tilde{z}_2)$, $\tilde{z}_1 \in \mathsf{C}_{R_1}$, $\tilde{z}_2 \in \mathsf{C}_{R_2}$. Dès lors l'achèvement de la démonstration du théorème 7 n'est que la répétition des raisonnements du § précédent.

Remarquons pour terminer qu'un cas particulier de la transformation (4.4) où $k_e(\infty) = \infty$, $k_e'(\infty) > 0$, conditions équivalentes à $\omega_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$, a déjà été considéré par P. HEUSER [6], qui a obtenu ainsi les expressions $w_1 = (R_1/R_2)w_2$, $a_n^{(2)} = (R_1/R_2)^n\, a_n^{(1)}$ et

$$F_2^*(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n a_n^{(1)}\, \Phi_n^{(2)}(z_2)$$

cas particuliers des relations (3.3), (3.7) et (4.5).

(Reçu le 6 janvier 1964)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALPÁR L.: „Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence III." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) 97—152.

[2] ALPÁR L.: „Sur certaines transformées des séries de puissance absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **7** (1962) 287—316.

[3] FABER, G.: „Über polynomische Entwickelungen." *Mathematische Annalen* **57** (1903) 389—408.

[4] FABER, G.: „Über polynomische Entwickelungen II." *Mathematische Annalen* **64** (1907) 116—135.

[5] FABER, G.: „Über Tschebyscheffsche Polynome." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **150** (1919—20) 79—105.

[6] HEUSER, P.: „Über eine Transformation der Faberschen Polynomreihen." *Mathematische Zeitschrift* **38** (1934) 777—782.

[7] ILIEFF, L.: *Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
[8] TIETZ, H.: „Faber series and the Laurent decomposition." *The Michigan Mathematical Journal* **4** (1957) 175—179.
[9] TURÁN P.: „A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence-circle." *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1958) 19—26.
[10] ULLMAN, J. L.: „On Faber series. 1. A problem of transfer." *The Michigan Mathematical Journal* **2** (1953—54) 109—114.
[11] ULLMAN, J. L.: „Studies in Faber polynomials I." *Transactions of the American Mathematical Society* **94** (1960) 515—528.

О НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЯДОВ ФАБЕРА

L. ALPÁR

Резюме

Пусть C_1 — простая, замкнутая, аналитическая, регулярная кривая плоскости z_1, и $F_1(z_1)$ — функция аналитическая внутри C_1, и, далее

$$z_1 = h(z_2) = \frac{pz_2 + q}{z_2 - z_2^*} \qquad (pz_2^* + q \neq 0) \tag{1}$$

гомографическое преобразование, которое переводит C_1 в кривую C_2 плоскости z_2 и внутреннюю часть от C_1, в внутреннюю часть от C_2, так, что z_2^* попадает в внешность от C_2. Таким образом функция $F_2(z_2) = F_1(h(z_2))$ является аналитической внутри C_2. Поэтому $F_1(z_1)$ в C_1, $F_2(z_2)$ в C_2 разложимы в ряды Фабера

$$F_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)\,, \tag{2}$$

$$F_2(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)\,, \tag{3}$$

где $\Phi_n^{(j)}(z_j)$ $(j = 1, 2)$ n-ый многочлен Фабера принадлежащая к C_j. Предположим еще, что существует точка $\tilde{z}_1 \in C_1$, в которой $F_1(z_1)$ определена, и ряд (2) суммируемый (C,k). Пусть $\tilde{z}_2 \in C_2$ точка, определена равенством $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$. Пусть означает $A_m^{(k)}$ m-ое среднее (C, k) ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ и $B_m^{(k+\delta)}$ m-ое среднее $(C,k + \delta)$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$, $k \geqq 0$, $\delta \geqq 0$.

Пользуясь этими обозначениями мы можем высказать следующие теоремы:

Теорема 1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ *суммируемый* (C,k), *тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ *суммируемый* $\left(C, k + \dfrac{1}{2}\right)$ *и*

$$\lim_{m\to\infty} A_m^{(k)} = \lim_{m\to\infty} B_m^{(k+1/2)}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть дано δ, где $0 \leqq \delta < \frac{1}{2}$. Существует функция $F_1(z_1)$ для которой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1)$ суммируемый (C, k), но ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2)$ не суммируемый $(C, k+\delta)$.*

Теорема 3. *Существует функция $F_1(z_1)$, для которой $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| < \infty$, когда $z_1 \in C_1$, но $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)| = \infty$ если $z_2 \in C_2$.*

Теорема 4. *Если $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)| < \infty$, когда $z_1 \in C_1$, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ сходится равномерно, если $z_2 \in C_2$ далее, если $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$ и $\tilde{z}_1 \in C_1, \tilde{z}_2 \in C_2$, тогда*

$$F_1(\tilde{z}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{z}_1) = F_2(\tilde{z}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(\tilde{z}_2). \tag{5}$$

Теорема 5. *Существует ряд Фабера $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \Phi_n^{(1)}(z_1)$ который сходится равномерно, но не абсолютно, когда $z_1 \in C_1$ и преобразованный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \Phi_n^{(2)}(z_2)$ также сходится равномерно, но не абсолютно, если $z_2 \in C_2$ для всякого данного преобразования $z_1 = h(z_2)$.*

Теорема 5. означает, что теорема 4 не обратима.

Эти теоремы были выведены из более ранных аналогичных результатов для степенных рядов (см. [1], [2]).

Пусть в дальнейщих $z_1 = k_i(z_2)$ *не гомографическая*, но гомоморфное и однолистное преобразование, которое переводит C_1 в C_2 и внутреннюю часть от C_1 в внутреннюю часть от C_2. Тогда $F_2^{(i)}(z_2) = F_1(k_i(z_2))$ аналитическая функция в C_2.

Теорема 6. высказывает, что из упомянутых результатов для степенных рядов нельзя вывести для ряда Фабера $F_2^{(i)}(z_2)$ теоремы, подобные теоремам 1—5.

Пусть означает наконец $z_1 = k_e(z_2)$ *не гомографическое*, но конформное и однолистное преобразование, которое переводит C_1 в C_2 и внешность от C_1 в внешность от C_2. Тогда $F_2^{(e)}(z_2) = F_1(k_e(z_2))$ не является аналитической функцией в полной внутренней части C_2, только в ее части. Тогда $F_2^{(e)}(z_2)$ не представима в C_2 рядом Фабера. Но пусть Γ простая кривая в C_2 достаточно близка к C_2, тогда можно доказывать следующую:

Теорема 7. *Если z_2 точка в внутренней части от Γ, тогда функция*

$$F_2^*(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F_1(k_e(\zeta))}{\zeta - z_2} d\zeta$$

аналитическая в C_2, разложима там в ряд Фабера, и теоремы 1—5 справедливы (кроме соотношений (4) и (5)), если в них заменить ряд Фабера функции $F_2(z_2)$ рядом Фабера функции $F_2^*(z_2)$.

ON THE STRUCTURE OF THE SEMIGROUP OF STOCHASTIC MATRICES

by

ŠTEFAN SCHWARZ[1]

A $n \times n$ matrix $\mathbf{P} = (p_{ik})$ is called stochastic if $p_{ik} \geqq 0$ for every couple $i, k = 1, 2, \ldots, n$ and $\sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1$ for $i = 1, 2, \ldots, n$.

The product of two stochastic matrices is again a stochastic matrix, hence the set of all $n \times n$ stochastic matrices forms a semigroup which will be denoted by $\mathfrak{S}_n$.

Introduce in $\mathfrak{S}_n$ a natural topology by the requirement $\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ik}^{(n)}) \to \mathbf{P} = (p_{ik})$ if and only if $p_{ik}^{(n)} \to p_{ik}$ for every (i, k). Since the multiplication of matrices in this topology is continuous in both factors, $\mathfrak{S}_n$ becomes clearly a compact (Hausdorff) semigroup.

The purpose of this paper is to study the structure of the semigroup $\mathfrak{S}_n$, in particular, to study how far some known results concerning Markov chains (see e.g. [2] or [4]) are more or less immediate consequences of general results holding for any compact (Hausdorff) semigroup.

The semigroup $\mathfrak{S}_n$ has a special structural feature: the possibility of forming convex linear combinations of elements of $\mathfrak{S}_n$. In section 6 we make use of this property. A few of the results fall under the general theory of affine semigroups which has been iniciated by H. Cohen and H. S. Collins [1]. (See also A. D. Wallace [6].)

1. Preliminaries

For convenience of the reader we briefly recall some known results concerning compact semigroups which we shall freely use in the following.

A) Let S be a compact (Hausdorff) semigroup and a an element $\in S$. Consider the cyclic semigroup $A = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$ and its closure $\bar{A}$. It is known that $\bar{A}$ contains a unique idempotent e_a. More precisely: if $A_k = \{a^k, a^{k+1}, \ldots\}$, then $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k = \Gamma(a)$ is a group and e_a is the unit element of $\Gamma(a)$. We shall say that the *element a belongs* to the idempotent e_a.

The semigroup S contains always at least one idempotent. Denote by $K(e_a)$ the set of all elements $\in S$ belonging to the idempotent e_a. S can be

[1] Technical University, Bratislava.

written as a union of disjoint subsets $S = \bigcup_{\alpha} K(e_\alpha)$. The sets $K(e_\alpha)$ are in general not semigroups.

To every idempotent e_α there exists a unique maximal group $G(e_\alpha) \subset S$ containing e_α as its unit element. The group $G(e_\alpha)$ is closed and we have clearly $G(e_\alpha) \subset K(e_\alpha)$. Further $K(e_\alpha)e_\alpha = e_\alpha K(e_\alpha) = \overline{K(e_\alpha)}\ e_\alpha = e_\alpha \overline{K(e_\alpha)} = G(e_\alpha)$. In particular, if e_α is the unique idempotent contained in the compact abelian semigroup $\bar{A} = \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$, then $\bar{A} \cdot e_\alpha = \Gamma(a)$ and $\Gamma(a)$ is the unique maximal subgroup of $\bar{A}$. (For all these results see [5].)

B) The set $L \subset S$ is called a left ideal of S if $SL \subset L$. Right and two-sided ideals are defined analogously. The notion of a minimal ideal has an obvious meaning.

Every compact semigroup contains a unique minimal two-sided ideal M, which is called the kernel of S. M is a closed (hence compact) subsemigroup of S. If S contains a zero element z, then $M = \{z\}$. There is at most one zero element in any semigroup.

Further every compact semigroup contains minimal left and right ideals respectively. If $\{L_\alpha, \alpha \in \Lambda_1\}$ and $\{R_\beta, \beta \in \Lambda_2\}$ are the sets of all minimal left and right ideals respectively, we have $M = \bigcup_{\alpha\in\Lambda_1} L_\alpha = \bigcup_{\beta\in\Lambda_2} R_\beta$. Moreover $R_\alpha L_\beta = R_\alpha \cap L_\beta = G_{\alpha\beta}$ is a closed group, so that M can be written in the form $M = \bigcup_{\alpha} \bigcup_{\beta} G_{\alpha\beta}$. All groups $G_{\alpha\beta}$ are topologically isomorphic. If $e_{\alpha\beta}$ is the unit element of the group $G_{\alpha\beta}$, then $G(e_{\alpha\beta})$ is exactly the maximal group S belonging to the idempotent $e_{\alpha\beta}$.

C) An idempotent $e \in S$ is called *primitive* if there does not exist an idempotent $f \in S$, $f \neq e$, for which $ef = fe = f$ holds. The set $\{e_{\alpha\beta} \mid \alpha \in \Lambda_2, \beta \in \Lambda_1\}$, i.e. the set of all idempotents contained in M, is precisely the set of all primitive idempotents $\in S$.

If e is a primitive idempotent $\in S$, then Se is a minimal left ideal of S, eS is a minimal right ideal of S and SeS is the kernel of S.

For all the results mentioned in section B) and C) see A. D. WALLACE [7] and the references given there.

D) For further purposes we prove also a simple limit theorem.

Consider the sequence

$$a, a^2, a^3, \ldots \tag{1}$$

and suppose that a belongs to the idempotent e. Denote as above $A_n = \{a^n, a^{n+1}, a^{n+2}, \ldots\}$ so that $\Gamma(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ *is the maximal* group contained in the compact abelian semigroup $\overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$.

If (1) converges, it converges necessarily to e. Suppose for an indirect proof that (1) converges to an element $b \neq e$. Since S is a Hausdorff space there are neighbourhoods $O(b)$ and $O(e)$ such that $O(b) \cap O(e) = \emptyset$. First, by supposition, there is an integer k such that $O(b) \supset A_k = \{a^k, a^{k+1}, \ldots\}$. Secondly, since $e \in \bar{A}_k$ there is an l such that $a^{k+l} \in O(e)$. Hence $a^{k+l} \in O(b) \cap O(e)$ and $O(b) \cap O(e) \neq \emptyset$, contrary to the supposition.

We next prove that if $\Gamma(a) \neq e$ the sequence (1) cannot converge. If $\Gamma(a) \neq e$, there is an element $c \in \Gamma(a)$, $c \neq e$, and $ce = c$. The continuity of multiplication implies that to any neighbourhood $O(c)$ of c there are neighbourhoods $O_1(c)$, $O_2(e)$ such that $O_1(c) \cdot O_2(e) \subset O(c)$. If (1) converges, there is an integer m such that $O_2(e) \supset A_m = \{a^m, a^{m+1}, \ldots\}$. Since $c \in \bar{A}_m$ there is an integer s such that $a^{m+s} \in O_1(c)$. But then

$$a^{m+s} \cdot \{a^m, a^{m+1}, a^{m+2}, \ldots\} = \{a^{2m+s}, a^{2m+s+1}, a^{2m+s+2}, \ldots\} \subset O_1(c)O_2(e) \subset O(c),$$

i.e. (1) converges to c. Since S is a Hausdorff space this is impossible.

Conversely, if $\Gamma(a) = e$ it is clear that (1) converges (to the idempotent e).

With respect to the relation $\bar{A}e = e\bar{A} = \Gamma(a)$ mentioned above we can formulate our result as follows:

Lemma 1. *Suppose that $a \in S$ belongs to the idempotent e. The necessary and sufficient condition for the convergence of the sequence* (1) *is the fulfilment of the relation $ae = ea = e$. We then have $\lim_{m\to\infty} a^m = e$.*

2. Primitive idempotents and the kernel of the semigroup $\mathfrak{S}_n$

We shall apply the results mentioned above to the semigroup $\mathfrak{S}_n$.

The semigroup $\mathfrak{S}_n$ contains idempotents (idempotent stochastic matrices) of every rank r, $1 \leq r \leq n$. For instance

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} r \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

is an idempotent $\in \mathfrak{S}_n$ of rank r.

We show that the primitive idempotents $\in \mathfrak{S}_n$ are precisely the matrices $\in \mathfrak{S}_n$ of rank 1.

Theorem 1. *Every primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$ is of the form*

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{u_1,\ldots,u_n} = \begin{pmatrix} u_1, & u_2, & \ldots, & u_n \\ u_1, & u_2, & \ldots, & u_n \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ u_1, & u_2, & \ldots, & u_n \end{pmatrix}, \quad u_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} u_i = 1. \tag{2}$$

And these are all primitive idempotents $\in \mathfrak{S}_n$.

Proof. a) The rows of a matrix of rank 1 are multiples of one of the rows. Since the row sum in each row is equal to 1, we conclude that any stochastic matrix of rank 1 is of the form (2.) The matrix (2) is clearly an idempotent.

b) We next prove that (2) is a primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$. Let $\mathbf{H} = (h_{ik})$ be any idempotent $\in \mathfrak{S}_n$. It is sufficient to show that $\mathbf{IH} = \mathbf{HI} = \mathbf{H}$ implies $\mathbf{H} = \mathbf{I}$. Now for arbitrary $\mathbf{A} \in \mathfrak{S}_n$

$$\mathbf{AI} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \\ \vdots & & \\ u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \\ \vdots & & \\ u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} = \mathbf{I},$$

hence even the relation $\mathbf{HI} = \mathbf{H}$ itself implies $\mathbf{H} = \mathbf{I}$.

c) Finally we show that no idempotent matrix $\in \mathfrak{S}_n$ of rank > 1 can be a primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$. Suppose that

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

is an idempotent $\in \mathfrak{S}_n$ of rank > 1. Consider the matrix

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_{h_{11} \dots h_{1n}} = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \end{pmatrix}.$$

Since $\mathbf{I}_0$ is of rank 1, we have $\mathbf{H} \neq \mathbf{I}_0$. Our statement will be proved if we show that $\mathbf{I}_0 \mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_0$. First we have (as above) $\mathbf{H}\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_0$. Secondly $\mathbf{I}_0 \mathbf{H} = (q_{ik})$, where $q_{ik} = \sum\limits_l h_{1l} h_{lk}$. Since $\mathbf{H}$ is idempotent we have $\sum\limits_l h_{il} h_{lk} = h_{ik}$, in particular $\sum\limits_l h_{1l} h_{lk} = h_{1k}$. Hence $q_{ik} = h_{1k}$ for every $i = 1, 2, \dots, n$. Therefore $\mathbf{I}_0 \mathbf{H} = \mathbf{I}_0$.

Theorem 1 enables us to find the k e r n e l of $\mathfrak{S}_n$.

Let $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{u_1, \dots, u_n}$ be a primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$. As remarked in the introduction every minimal left ideal of $\mathfrak{S}_n$ is of the form $\mathfrak{S}_n \cdot \mathbf{I}$. By the proof of Theorem 1 $\mathfrak{S}_n \mathbf{I} = \mathbf{I}$. Hence every minimal left ideal of $\mathfrak{S}_n$ is a one-point set $\{\mathbf{I}\} = \{\mathbf{I}_{u_1, \dots, u_n}\}$.

This implies that the kernel M is the set of all primitive idempotents: $M = \bigcup\limits_{(u_1, \dots, u_n)} \{\mathbf{I}_{u_1, \dots, u_n}\}$, where $(u_1, \dots, u_n)$ runs over all n-tuples $(u_1, \dots, u_n)$ for which $u_i \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1$.

If R is a minimal right ideal of $\mathfrak{S}_n$, then, since $\mathbf{A}\mathbf{I}_{u_1, \dots, u_n} = \mathbf{I}_{u_1, \dots, u_n}$ for every $\mathbf{A} \in \mathfrak{S}_n$, we have $R\,\mathbf{I}_{u_1, \dots, u_n} = \{\mathbf{I}_{u_1, \dots, u_n}\} \subset R$. This implies $M = \bigcup\limits_{(u_1, \dots, u_n)} \{\mathbf{I}_{u_1, \dots, u_n}\} \subset R$. Therefore $M = R$ and there is a unique minimal right ideal, which is identical with the kernel M.

Summarily we have proved:

Theorem 2. *The kernel M of the semigroup $\mathfrak{S}_n$ is the set of all primitive idempotents $\in \mathfrak{S}_n$. Every maximal group contained in the kernel is a one-point group. Each primitive idempotent is itself a minimal left ideal of $\mathfrak{S}_n$. $\mathfrak{S}_n$ has a unique minimal right ideal which is identical with the kernel of $\mathfrak{S}_n$.*

Remark. If $n > 1$ we have clearly $M = R$ but $M \neq L$ for any minimal left ideal L. This asymetry is due to the fact that the set of all stochastic matrices is asymetric in the sense that the column sum is not necessarily equal to 1. The set of all double stochastic matrices forms again a compact semigroup $\mathfrak{S}_n^*$. It can be easily shown that the kernel of $\mathfrak{S}_n^*$ contains a single element namely the matrix $\mathbf{I} = (p_{ik})$, where $p_{ik} = \dfrac{1}{n}$ for all i, k. $\mathbf{I}$ plays the role of a zero element in $\mathfrak{S}_n^*$. A more detailed study of the semigroup $\mathfrak{S}_n^*$ will be given elsewhere.

The next two lemmas give further informations concerning primitive idempotents.

Lemma 2. A *stochastic matrix with k positive columns of the form*

$$\begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1k} & 0 & \ldots & 0 \\ p_{21} \cdots p_{2k} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ p_{n1} \cdots p_{nk} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

is idempotent if and only if it is a primitive idempotent of the form

$$\begin{pmatrix} u_1, u_2 \ldots u_k & 0 & \ldots & 0 \\ u_1, u_2 \ldots u_k & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ u_1, u_2 \ldots u_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. Let $u_1 = p_{\varrho 1} = \min(p_{11} \ldots p_{n1})$. The idempotency implies $p_{\varrho 1} = p_{\varrho 1} p_{11} + p_{\varrho 2} p_{21} + \ldots + p_{\varrho k} p_{k1}$. With respect to $1 = p_{\varrho 1} + p_{\varrho 2} + \ldots + p_{\varrho k}$, we have

$$p_{\varrho 1}(p_{11} - p_{\varrho 1}) + p_{\varrho 2}(p_{21} - p_{\varrho 1}) + \ldots + p_{\varrho k}(p_{k1} - p_{\varrho 1}) = 0\,.$$

Since the brackets are $\geqq 0$, we conclude $p_{11} = p_{21} = \ldots = p_{k1} = p_{\varrho 1} = u_1$. For $m > k$ (and $m \leqq n$) we have $p_{m1} = p_{m1} p_{11} + p_{m2} p_{21} + \ldots + p_{mk} p_{k1} = u_1(p_{m1} + p_{m2} + \ldots + p_{mk})$. Hence $p_{m1} = u_1$, i.e. all entries in the first column are equal to u_1. The same argument may be applied to any of the k positive columns. This proves our Lemma.

Lemma 3. *An idempotent $\in \mathfrak{S}_n$ containing a positive column is a primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$.*

Proof. Without loss of generality suppose that in the matrix $\mathbf{P} = (p_{ik})$ we have $p_{11} p_{21} \ldots p_{n1} \neq 0$.

Denote $E = \{j \mid p_{1j} \neq 0\}$, $F = \{j \mid p_{1j} = 0\}$. E is not empty. We prove that for every k we have a) $p_{kj} > 0$ for $j \in E$, b) $p_{kj} = 0$ for $j \in F$.

a) For $j \in E$ the idempotency implies $p_{kj} = \sum_l p_{kl} p_{lj} \geqq p_{k1} p_{1j} > 0$, so that the first statement is true.

b) Denote $p_j = p_{\varrho j} = \max(p_{1j}, p_{2j}, \ldots, p_{nj})$. The idempotency implies

$$p_{kj} = \sum_l p_{kl} p_{lj} \leqq (p_{k1} + \ldots + p_{kn}) p_j - p_{k1} \cdot p_j + p_{k1} \cdot p_{1j}\,.$$

If $j \in F$, $p_{1j} = 0$, so that $p_{kj} \leqq p_j - p_{k1} p_j$ for any k. In particular for $k = \varrho$ we have $p_j \leqq p_j - p_{\varrho 1} p_j$, i.e. $p_{\varrho 1} p_j = 0$. Since $p_{\varrho 1} \neq 0$, we have $p_j = 0$ which proves the second statement.

We have proved that our matrix has a certain number of positive columns while the remaining ones (if there are some) are zero columns. The lemma follows now from Lemma 2.

Remark. By an analogous argument it can be shown that an idempotent $\in \mathfrak{S}_n$ containing a positive row has all rows identical and is therefore a primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$. We shall not need this explicitly.

3. Matrices belonging to primitive idempotents $\in \mathfrak{S}_n$

Consider the sequence

$$\mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \ldots \tag{3}$$

and suppose that $\mathbf{P}$ belongs to the idempotent $\mathbf{I}$. Lemma 1 immediately implies

Lemma 4. *Suppose that* $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_n$ *belongs to the idempotent* $\mathbf{I}$. *The necessary and sufficient condition for the convergence of the sequence* (3) *is the fulfilment of the relation* $\mathbf{PI} = \mathbf{IP} = \mathbf{I}$. *We then have* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^k = \mathbf{I}$.

Recall that $\Gamma(\mathbf{P}) = \mathbf{I} \cdot \overline{\{\mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \ldots\}} = \overline{\{\mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \ldots\}}\,\mathbf{I}$ is the maximal group contained in $\overline{\{\mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \ldots\}}$.

Since the maximal group belonging to a primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$ is a one-point group, we have the following

Theorem 3. *If* $\mathbf{P}$ *belongs to a primitive idempotent* $\in \mathfrak{S}_n$, *then* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^k$ *exists and it is equal to a matrix of the form* (2) *mentioned in Theorem* 1.

This leads to a very natural problem: We have to find all matrices $\in \mathfrak{S}_n$ belonging to primitive idempotents. This will be solved in theorem 6.

Note first: If $\mathbf{P}$ belongs to the idempotent $\mathbf{I}$, then $\mathbf{P}^s$ (for any integer s) belongs to the same idempotent $\mathbf{I}$, and conversely.

Let now $\mathbf{P} = (p_{ik})$ be a matrix $\in \mathfrak{S}_n$ such that for some integer $s \geqq 1$ $\mathbf{P}^s = (p_{ik}^{(s)})$ has at least one positive column. Suppose without loss of generality that this is the first column and denote $m_\varrho = \min (p_{11}^{(\varrho)}, p_{21}^{(\varrho)}, \ldots, p_{n1}^{(\varrho)})$. By supposition $m_s > 0$. The relation $m_s = m_s \sum_l p_{jl} \leqq \sum_{l=1}^{n} p_{jl} p_{l1}^{(s)} = p_{j1}^{(s+1)}$ implies $m_s \leqq m_{s+1}$. Hence the matrices of the sequence $\{\mathbf{P}^s, \mathbf{P}^{s+1}, \mathbf{P}^{s+2}, \ldots\}$ have all entries in the first column $\geqq m_s$. Also any matrix contained in the closure $T_s = \overline{\{\mathbf{P}^s, \mathbf{P}^{s+1}, \mathbf{P}^{s+2}, \ldots\}}$ has all entries in the first column $\geqq m_s$. Since the idempotent contained in T_s has a positive column, we obtain by Lemma 3 the following result:

Theorem 4. *Let* $\mathbf{P}$ *be a stochastic matrix such that for some integer* $s \geqq 1$ $\mathbf{P}^s$ *has at least one positive column. Then* $\mathbf{P}$ *belongs to a primitive idempotent* $\in \mathfrak{S}_n$, *the limit* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^k$ *exists and it is equal to a matrix of the form* (2).

This is one of the fundamental theorems concerning stochastic matrices. (Call it the first main theorem.) We see that it is merely a *consequence of the fact that such a matrix belongs to a primitive idempotent* $\in \mathfrak{S}_n$.

Suppose now that $\mathbf{P} = (p_{ik})$ belongs to the primitive idempotent

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} u_1, \ldots, u_n \\ \vdots \\ u_1, \ldots, u_n \end{pmatrix}, \quad u_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i = 1.$$

The following Theorem 5 is merely a new edition of the well known fact that the system of equations

$$p_{1i} u_1 + p_{2i} u_2 + \ldots + p_{ni} u_n = u_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

has a unique solution $(u_1, \ldots, u_n)$ with $u_i \geqq 0$ and $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$.

Theorem 5. *If* $\mathbf{P}$ *belongs to the primitive idempotent* $\mathbf{I}$, *then* $\mathbf{I}$ *is uniquely determined by the relation* $\mathbf{I} = \mathbf{IP}$.

Proof. Suppose that $\mathbf{H}$ is an idempotent such that $\mathbf{H} = \mathbf{HP}$. This implies $\mathbf{H} = \mathbf{HP} = \mathbf{HP}^2 = \ldots = \mathbf{HP}^k = \ldots$ Since $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^k = \mathbf{I}$, we have $\mathbf{H} = \mathbf{HI}$. On the other hand since $\mathbf{I}$ is primitive, we have (by the proof of Theorem 1) $\mathbf{AI} = \mathbf{I}$ for every $\mathbf{A} \in \mathfrak{S}_n$. Hence, in particular, $\mathbf{HI} = \mathbf{I}$. Therefore $\mathbf{H} = \mathbf{I}$, q.e.d.

Finally, we identify all elements $\in \mathfrak{S}_n$ belonging to some primitive idempotent. Note first: There are matrices of any rank r, $1 \leqq r \leqq n$, which belong to primitive idempotents. For instance, the matrix

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & r & & & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 1/2 & 0 & 0 & \dots & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \dots & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 1/2 & 0 & 0 & \dots & 1/2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

has the rank r and it belongs to a primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$.

Theorem 6. *A matrix* $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_n$ *belongs to some primitive idempotent* $\in \mathfrak{S}_n$ *if and only if there is an integer* s *such that* $\mathbf{P}^s$ *has at least one positive column.*

Proof. With respect to Theorem 4 we have to prove only the necessity of this condition.

Suppose that $\mathbf{P}$ belongs to the idempotent (2). By Theorem 3 $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{P}^k$ exists and it is equal to (2). Suppose without loss of generality that $u_1 > 0$. Since $\lim\limits_{m \to \infty} p_{k1}^{(m)} = u_1 > 0$, there is a $s_0 > 0$ such that for every $s \geqq s_0$ we have $p_{k1}^{(s)} > 0$. Hence the first column of $\mathbf{P}^{s_0}$ is positive. This proves our theorem.

4. The maximal groups $\in \mathfrak{S}_n$

The purpose of this section is to find the structure of the maximal group $G(\mathbf{I})$ belonging to a given idempotent $\mathbf{I} \in \mathfrak{S}_n$. To this end it is necessary to have a survey about all idempotents $\in \mathfrak{S}_n$ (and not merely the primitive idempotents $\in \mathfrak{S}_n$).

As remarked above there are idempotents $\in \mathfrak{S}_n$ of any rank r, $1 \leqq r \leqq n$. For $r = n$ there exists a unique idempotent $\in \mathfrak{S}_n$, namely the unit matrix $\mathbf{I}^{(n)}$ of order n. For $r \leqq n$ we have a result formulated in lemma 5 which was first found by J. L. Doob [3]. An elegant proof is given in L. K. Chung [2] (pp. 116–118).

Lemma 5. *Let* $\mathbf{I} = (p_{ik})$ *be an idempotent* $\in \mathfrak{S}_n$. *The set of indices* $N = \{1, 2, \dots, n\}$ *can be decomposed into the union of disjoint subsets* $N = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_s \cup F$ *(with* F *eventually empty) in such a way that:*

i) $p_{ij} = 0$ *for* $j \in F$.

ii) *There exist positive numbers* p_j *such that*

α) *for* $i \in E_\alpha$, $j \in E_\alpha$ *we have* $p_{ij} = p_j$ *and* $\sum\limits_{j \in E_\alpha} p_j = 1$;

β) *for* $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, $E_\alpha \neq E_\beta$ *we have* $p_{ij} = 0$.

iii) *There exist non-negative numbers* ϱ_{iE_α} *such that for* $i \in F$, $j \in E_\alpha$ *we have* $p_{ij} = \varrho_{iE_\alpha} \cdot p_j$.

Conversely: if $\mathbf{I}$ *satisfies the above conditions, then* $\mathbf{I}$ *is an idempotent* $\in \mathfrak{S}_n$.

By changing in $\mathbf{I}$ suitably the rows and in the same way the columns we may attain that the indices contained in $E_1, E_2, \dots, E_s$ follow in the natural ordering. Since these operations are described by multiplication of $\mathbf{I}$ by a permutation matrix $\mathbf{W}$ from the left and the permutation matrix $\mathbf{W}^{-1}$ from the right, we may say: There exits a $n\times n$ permutation matrix $\mathbf{W}$ such that $\mathbf{WIW}^{-1}$ is of the form

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \vdots & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Q}_s & \mathbf{0}\\ \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 & \dots & \mathbf{F}_s & \mathbf{0}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Hereby (by changing for convenience the notations), $\mathbf{Q}_i$ is a $r_i \times r_i$ matrix of the form

$$\mathbf{Q}_i=\begin{pmatrix}u_i, & u_i', & \dots, & u_i^{(r_i-1)}\\ \vdots & & & \\ u_i, & u_i', & \dots, & u_i^{(r_i-1)}\end{pmatrix} \qquad u_i+u_i'+\dots+u_i^{(r_i-1)}=1.$$

$\mathbf{F}_i$ is a $(n-r_1-\dots-r_s)\times r_i$ matrix of the form

$$\mathbf{F}_i=\begin{pmatrix}\varrho_{E_i}'u_i, & \varrho_{E_i}'u_i', & \dots, & \varrho_{E_i}'u_i^{(r_i-1)}\\ \varrho_{E_i}''u_i, & \varrho_{E_i}''u_i', & \dots, & \varrho_{E_i}''u_i^{(r_i-1)}\\ \vdots & & & \\ \varrho_{E_i}^{(f)}u_i, & \varrho_{E_i}^{(f)}u_i', & \dots, & \varrho_{E_i}^{(f)}u_i^{(r_i-1)}\end{pmatrix}$$

and $\sum\limits_{E_i}\varrho_{E_i}'=\dots=\sum\limits_{E_i}\varrho_{E_i}^{(f)}=1$.

If $n=r_1+\dots+r_s$, the matrices $\mathbf{F}_i$ do not appear at all.

The matrix $\mathbf{U}$ is clearly of rank s.

We state it explicitly:

Theorem 7. *Every idempotent matrix $\mathbf{I}\in\mathfrak{S}_n$ of rank s, $1\leqq s\leqq n$, can be written in the form $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{UW}$, where $\mathbf{W}$ is a permutation matrix and $\mathbf{U}$ a matrix of the type* (4). *Conversely, every matrix of this form is an idempotent $\in\mathfrak{S}_n$.*

Note, of course, that different $\mathbf{W}$ may lead to the same $\mathbf{WUW}^{-1}$.

Before describing now the maximal group $G(\mathbf{I})$ belonging to any idempotent $\mathbf{I}\in\mathfrak{S}_n$ it is advantageous to describe first the maximal group belonging to the unit matrix (of order n) $\mathbf{I}^{(n)}$.

Lemma 6. *The maximal group $G(\mathbf{I}^{(n)})\subset\mathfrak{S}_n$ belonging to the unit matrix $\mathbf{I}^{(n)}$ is exactly the set of all $n\times n$ permutation matrices.*

Hence $G(\mathbf{I}^{(n)})$ contains exactly $n!$ elements.

Proof. Let be $\mathbf{P}=(c_{ik})\in G(\mathbf{I}^{(n)})$. Then there is an element $\mathbf{P}'=(c_{ik}')\in$ $\in G(\mathbf{I}^{(n)})$ such that $\mathbf{PP}'=\mathbf{P}'\mathbf{P}=\mathbf{I}^{(n)}$, i.e.

$$\sum_{k=1}^{n}c_{ik}'c_{ki}=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}c_{ki}'=1 \quad (i=1,2,\dots,n).$$

With respect to the relations $\sum\limits_{k=1}^{n}c_{ik}=\sum\limits_{k=1}^{n}c_{ik}'=1$ we get

$$\sum_{k=1}^{n}c_{ik}'(1-c_{ki})=0\,,\quad \sum_{k=1}^{n}c_{ik}(1-c_{ki}')=0\,.$$

Since each summand is non-negative, we have (for $i, k = 1, 2, \ldots, n$)

$$c'_{ik}(1 - c_{ki}) = 0\,, \qquad c_{ik}(1 - c'_{ki}) = 0\,.$$

If (for some l) $c_{il} = 1$, then for all $k \neq l$ we have $c_{ik} = 0$.

On the other hand, if for some i, l we have $c_{li} < 1$, the relation $c'_{il}(1 - c_{li}) = 0$ implies $c'_{il} = 0$ and with respect to $c_{li}(1 - c'_{il}) = 0$ we get $c_{li} = 0$. This means: If $c_{li} < 1$, then $c_{li} = 0$.

Each entry of $\mathbf{P}$ is either 0 or 1. Hence in every row there is a unique element different from zero and equal to 1. Since $\mathbf{P}$ is non-singular, each column contains exactly one element different from zero.

Conversely: Every matrix having these properties is stochastic, non-singular and is contained in $G(\mathbf{I}^{(n)})$.

Remark. It is obvious that $G(\mathbf{I}^{(n)})$ is at the same time the set of all elements $\in \mathfrak{S}_n$ belonging to the idempotent $\mathbf{I}^{(n)}$, i.e. $K(\mathbf{I}^{(n)}) = G(\mathbf{I}^{(n)})$.

Before proving Theorem 8 we prove two simple lemmas.

Lemma 7. *Let* $\mathbf{B} \in \mathfrak{S}_n$ *belong to the idempotent* $\mathbf{I}$. *If* $\mathbf{W}$ *is a permutation matrix* $\in \mathfrak{S}_n$, *then* $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{W}$ *belongs to the idempotent* $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W}$.

Proof. The element $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W}$ is an idempotent $\in \mathfrak{S}_n$. By continuity of the multiplication the relation $\mathbf{I} \in \overline{\{\mathbf{B}, \mathbf{B}^2, \ldots\}}$ implies

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W} \in \mathbf{W}^{-1}\overline{\{\mathbf{B}, \mathbf{B}^2, \ldots\}}\,\mathbf{W} \subseteqq \overline{\{\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{W}, (\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{W})^2, \ldots\}}\,.$$

Hence $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{W}$ belongs to the idempotent $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W}$.

For further purposes note: An element $\mathbf{B}$ belonging to the idempotent $\mathbf{I}$ is contained in the maximal group $G(\mathbf{I})$ if and only if $\mathbf{B}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{B} = \mathbf{B}$ and there is an element $\mathbf{B}'$ such that $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B}'\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{B}' = \mathbf{B}'$. For then $\{\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{B}^2, \ldots \mathbf{B}', \mathbf{B}'^2, \ldots\}$ forms a cyclic group with $\mathbf{I}$ as unit element contained in $G(\mathbf{I})$ and $\mathbf{B}'$ is the inverse of $\mathbf{B}$ in $G(\mathbf{I})$.

Lemma 8. *If* $G(\mathbf{I})$ *is the maximal group belonging to* $\mathbf{I}$ *and* $\mathbf{W}$ *a permutation matrix, then* $\mathbf{W}^{-1}G(\mathbf{I})\mathbf{W}$ *is the maximal group belonging to* $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W}$. *In formulae:* $G(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W}) = \mathbf{W}^{-1}G(\mathbf{I})\mathbf{W}$.

Proof. If $\mathbf{B} \in G(\mathbf{I})$, then there is a $\mathbf{B}'$ such that we have i) $\mathbf{B}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{B} = \mathbf{B}$, ii) $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}$ with $\mathbf{B}' \in G(\mathbf{I})$, iii) $\mathbf{B}'\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{B}' = \mathbf{B}'$.

By lemma 7 $\mathbf{X} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{W}$ and $\mathbf{Y} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{W}$ belong to the idempotent $\mathbf{V} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W}$. We have i) $\mathbf{V}\mathbf{X} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{W} = \mathbf{X}$ and $\mathbf{X}\mathbf{V} = \mathbf{X}$; ii) $\mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{V}$ and $\mathbf{Y}\mathbf{X} = \mathbf{V}$; iii) $\mathbf{Y}\mathbf{V} = \mathbf{Y}$ and $\mathbf{V}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$. Hence $\mathbf{X}$ is contained in $G(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W})$ and so does $\mathbf{Y}$, which is the inverse of $\mathbf{X}$ in $G(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W})$. Every element $\mathbf{B} \in G(\mathbf{I})$ is transformed by $\mathbf{B} \to \mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{W}$ into an element $\in G(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W})$ and different elements go into different elements $\in G(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W})$. Since the same argument may be used in the opposite direction our lemma is proved.

Since the groups $G(\mathbf{I})$ and $G(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{W})$ are isomorphic the last result implies that in studying the structure of $G(\mathbf{I})$ we may restrict ourselves to the study of the maximal groups belonging to an idempotent of the form (4).

Theorem 8. *The maximal group belonging to the idempotent* $\mathbf{U}$ *of rank* s *is a finite group of order* $s!$. *It is isomorphic with the symetric group of* s *letters.*[2]

Proof. We use the same notations as above and denote $f = n - (r_1 + \ldots \ldots + r_s)$.

---

[2] D. R. Brown has proved the following statement: Any compact group of non-negative matrices is finite. (See [8], where, in particular, questions concerning the connectedness of the set of idempotents in $\mathfrak{S}_n$ are studied.)

1. We shall first find the form of a matrix $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_n$ satisfying the relations $\mathbf{PU} = \mathbf{UP} = \mathbf{P}$. Write to this end $\mathbf{P}$ in the form

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}, & \mathbf{P}_{12}, \ldots, & \mathbf{P}_{1s}, & \mathbf{P}_{1,s+1} \\ \mathbf{P}_{21}, & \mathbf{P}_{22}, \ldots, & \mathbf{P}_{2s}, & \mathbf{P}_{2,s+1} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{P}_{s,1}, & \mathbf{P}_{s,2}, \ldots, & \mathbf{P}_{ss}, & \mathbf{P}_{s,s+1} \\ \mathbf{P}_{s+1,1}, & \mathbf{P}_{s+1,2}, \ldots, & \mathbf{P}_{s+1,s}, & \mathbf{P}_{s+1,s+1} \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{P}_{ik}$ are blocks of the same type as in $\mathbf{U}$, i.e. $\mathbf{P}_{ik}$ $(1 \leq i, k \leq s)$ is a rectangular $r_i \times r_k$ matrix.

The relations $\mathbf{PU} = \mathbf{UP} = \mathbf{P}$ imply (by comparing):

a) $\mathbf{P}_{k,s+1} = \mathbf{0}$ $(k = 1, 2, \ldots, s + 1)$;

b) $\mathbf{P}_{ik} = \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_{ik} = \mathbf{P}_{ik} \mathbf{Q}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$;

c) $\mathbf{P}_{s+1,k} = \mathbf{P}_{s+1,k} \mathbf{Q}_k = \mathbf{F}_1 \mathbf{P}_{1k} + \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_{2k} + \ldots + \mathbf{F}_s \mathbf{P}_{sk}$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$.

Write again

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} u_i, u_i', \ldots, u_i^{(r_i-1)} \\ \vdots \\ u_i, u_i', \ldots, u_i^{(r_i-1)} \end{pmatrix}.$$

The equation $\mathbf{P}_{ik} = \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_{ik}$ implies that $\mathbf{P}_{ik}$ is a $r_i \times r_k$ matrix in which all rows are identical, hence of the form

$$\mathbf{P}_{ik} = \begin{pmatrix} v, v', \ldots, v^{(r_k-1)} \\ \vdots \\ v, v', \ldots, v^{(r_k-1)} \end{pmatrix}.$$

Further we have

$$\mathbf{P}_{ik} \mathbf{Q}_k = (v + v' + \ldots + v^{(r_k-1)}) \begin{pmatrix} u_k, u_k', \ldots, u_k^{(r_k-1)} \\ \vdots \\ u_k, u_k', \ldots, u_k^{(r_k-1)} \end{pmatrix}.$$

Denote $c_{ik} = v + v' + \ldots + v^{(r_k-1)}$. The relation $\mathbf{P}_{ik} = \mathbf{P}_{ik} \mathbf{Q}_k$ implies that $\mathbf{P}_{ik}$ is a $r_i \times r_k$ matrix, which is a product of the number c_{ik} with the matrix having r_i rows, whereby each row is identical with the rows of the matrix $\mathbf{Q}_k$. Denote such a matrix by $\mathbf{Q}_k^{(r_i)}$, hence explicitly

$$\mathbf{Q}_k^{(r_i)} = \begin{pmatrix} u_k, u_k', \ldots, u_k^{(r_k-1)} \\ \vdots \\ u_k, u_k', \ldots, u_k^{(r_k-1)} \end{pmatrix} \quad r_i \text{ rows.}$$

We then have $\mathbf{P}_{ik} = c_{ik} \mathbf{Q}_k^{(r_i)}$.

Note that, in particular, $\mathbf{Q}_k^{(r_k)} = \mathbf{Q}_k$ and that the following relations hold:

(5) $\quad \mathbf{Q}_k^{(r_i)} \mathbf{Q}_l^{(r_k)} = \mathbf{Q}_l^{(r_i)}$, $\mathbf{F}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_i^{(f)}$, where $\mathbf{D}_i = \operatorname{diag}[\varrho_{E_i}, \varrho_{E_i}', \ldots, \varrho_{E_i}^{(f)}]$.

The relation c) implies further

$$\mathbf{P}_{s+1,k} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{F}_i \mathbf{P}_{ik} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_i^{(f)} \cdot c_{ik} \mathbf{Q}_k^{(r_i)} = (\sum_{i=1}^{s} c_{ik} \mathbf{D}_i)\mathbf{Q}_k^{(f)} .$$

Summarily we have: A matrix $\mathbf{P}$ satisfying $\mathbf{UP} = \mathbf{PU} = \mathbf{P}$ is necessarily of the form

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} c_{11}\mathbf{Q}_1^{(r_1)}, & c_{12}\mathbf{Q}_2^{(r_1)}, \ldots, & c_{1s}\mathbf{Q}_s^{(r_1)}, & \mathbf{0} \\ c_{21}\mathbf{Q}_1^{(r_2)}, & c_{22}\mathbf{Q}_2^{(r_2)}, \ldots, & c_{2s}\mathbf{Q}_s^{(r_2)}, & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \\ c_{s1}\mathbf{Q}_1^{(r_s)}, & c_{s2}\mathbf{Q}_2^{(r_s)}, \ldots, & c_{ss}\mathbf{Q}_s^{(r_s)}, & \mathbf{0} \\ (\sum_{i=1}^{s} c_{i1}\mathbf{D}_i)\mathbf{Q}_1^{(f)}, & (\sum_{i=1}^{s} c_{i2}\mathbf{D}_i)\mathbf{Q}_2^{(f)}, \ldots, & (\sum_{i=1}^{s} c_{is}\mathbf{D}_i)\mathbf{Q}_s^{(f)}, & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Since $\mathbf{P}$ is stochastic we have hereby $\sum_{k=1}^{s} c_{ik} = 1$.

2. Suppose moreover that $\mathbf{P}$ is contained in the maximal group $G(\mathbf{U})$. Then there is a matrix $\mathbf{P}' \in G(\mathbf{U})$ such that $\mathbf{PP}' = \mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{U}$. The matrix $\mathbf{P}'$ is of the same form as $\mathbf{P}$ with coefficients c'_{ik}, where $\sum_{k=1}^{s} c'_{ik} = 1$. The matrix identities

$$((c_{ik}\mathbf{Q}_k^{(r_i)}))((c'_{lm}\mathbf{Q}_m^{(r_l)})) = \operatorname{diag}[\mathbf{Q}_1^{(r_1)}, \ldots, \mathbf{Q}_s^{(r_s)}] = ((c'_{ik}\mathbf{Q}_k^{(r_i)}))((c_{lm}\mathbf{Q}_m^{(r_l)}))$$

imply $\sum_{k=1}^{s} c'_{ik} c_{ki} = \sum_{k=1}^{s} c_{ik} c'_{ki} = 1$. From this we obtain analogously as in lemma 6 (with $s = n$) that the matrix

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \\ c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{pmatrix}$$

is a permutation matrix of order s. There exist $s\,!$ such matrices. (By the way, the matrix (c'_{ik}) is the inverse matrix to (c_{ik}) with respect to the unit matrix of order s.)

Conversely, if c_{ik} are chosen in this manner we get by direct multiplication that $\mathbf{P}$ satisfies $\mathbf{PU} = \mathbf{UP} = \mathbf{P}$ and that there is a matrix $\mathbf{P}'$ such that $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{PP}' = \mathbf{U}$, $\mathbf{P}'\mathbf{U} = \mathbf{UP}' = \mathbf{P}'$, i.e. $\mathbf{P}$ is contained in the maximal group $G(\mathbf{U})$. The unique point which needs a more explicit verification is the multiplication of the last row in $\mathbf{P}$ with the columns of $\mathbf{P}'$. We have to prove for instance that

$$\sum_{k=1}^{s} [\sum_{i=1}^{s} (c_{ik}\mathbf{D}_i)\mathbf{Q}_k^{(f)}] \cdot c'_{kl}\mathbf{Q}_l^{(r_k)}$$

is equal to $\mathbf{F}_l$. Now by (5)

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{s} (c_{ik} c'_{kl})\mathbf{D}_i \mathbf{Q}_l^{(f)} = \sum_{i=1}^{s} (c_{i1}c'_{1l} + \ldots + c_{is}c'_{sl})\mathbf{D}_i\mathbf{Q}_l^{(f)} .$$

The bracket is zero except the case $i = l$ when it is equal to 1, so that we have $\mathbf{A} = \mathbf{D}_l \mathbf{Q}_l^{(f)} = \mathbf{F}_l$.

Theorem 8 is completely proved.

Remark. Note that if $c_{ak} = 1$ (and all other entries in the k-th column are zeros), we have

$$\mathbf{P}_{s+1,k} = \mathbf{D}_a \mathbf{Q}_k^{(f)} = \begin{pmatrix} \varrho'_{Ea} \cdot \mathbf{u}_k, \ldots, \varrho'_{Ea}\ \mathbf{u}_k^{(r_k-1)} \\ \vdots \\ \varrho_{Ea}^{(f)} \cdot \mathbf{u}_k, \ldots, \varrho_{Ea}^{(f)}\ \mathbf{u}_k^{(r_k-1)} \end{pmatrix},$$

hence the last block in the k-th column is the $f \times r_k$ matrix $\mathbf{Q}_k^{(f)}$ modified in the sense that the rows are multiplied by the numbers $\varrho'_{Ea}, \ldots, \varrho_{Ea}^{(f)}$ occurring in $\mathbf{F}_a$.

Example. Let $\mathfrak{S}_5$ be the semigroup of stochastic matrices of order 5 and let $\mathbf{U}$ be the following idempotent of rank 3:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varrho_1 u_1 & \varrho_1 u_2 & \varrho_2 & \varrho_3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} &u_1 + u_2 = 1,\ u_1, u_2 > 0, \\ &\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 1. \end{aligned}$$

Then $G(\mathbf{U})$ contains besides $\mathbf{U}$ the following 5 matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varrho_2 u_1 & \varrho_2 u_2 & \varrho_1 & \varrho_3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ \varrho_3 u_1 & \varrho_3 u_2 & \varrho_2 & \varrho_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varrho_1 u_1 & \varrho_1 u_2 & \varrho_3 & \varrho_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varrho_2 u_1 & \varrho_2 u_2 & \varrho_3 & \varrho_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ \varrho_3 u_1 & \varrho_3 u_2 & \varrho_1 & \varrho_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. The second main theorem

The fact that $G(\mathbf{U})$ contains only a finite number of elements has very important consequences for the theory of finite Markov chains.

Suppose that $\mathbf{P}$ belongs to the idempotent $\mathbf{I}$. Since $K(\mathbf{I}) \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}K(\mathbf{I}) = G(\mathbf{I})$, we have $\mathbf{PI} = \mathbf{IP} \in G(\mathbf{I})$. Since $G(\mathbf{I})$ contains only a finite number of elements there is an integer l_0 such that $(\mathbf{PI})^{l_0} = \mathbf{I}$. Choose for l_0 the least integer satisfying this condition. Then the set $\{\mathbf{PI}, \mathbf{P}^2\mathbf{I}, \ldots, \mathbf{P}^{l_0}\mathbf{I} = \mathbf{I}\}$ is a cyclic subgroup of $G(\mathbf{I})$.

Each element of the sequence $\mathbf{P}^{l_0}, \mathbf{P}^{2l_0}, \mathbf{P}^{3l_0}, \ldots$ belongs to the idempotent $\mathbf{I}$ and $\mathbf{P}^{l_0}$ satisfies the condition $\mathbf{P}^{l_0} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}$. By lemma 4 the limit $\lim_{k\to\infty} (\mathbf{P}^{l_0})^k$ exists and it is equal to $\mathbf{I}$. If $\mathbf{I}$ has the rank s, the group $G(\mathbf{I})$ is of order $s!$ so that $l_0 |_{s!}$. We have proved:

Theorem 9. *To any matrix* $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_n$ *there exists an integer* l_0 *such that* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^{kl_0}$ *exists. If* $\mathbf{P}$ *belongs to an idempotent of rank s, then* $l_0 | s!$.

The elements $\mathbf{PI}, \mathbf{P}^2\mathbf{I}, \ldots, \mathbf{P}^{l_0}\mathbf{I} = \mathbf{I}$ are all different. Choose an integer r with $0 \leqq r \leqq l_0 - 1$ and consider the sequence $\{\mathbf{P}^{kl_0+r} \mid k = 1, 2, \ldots\}$. Then $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^{kl_0+r}$ exists and it is equal to $\mathbf{P}^r\mathbf{I} \in G(\mathbf{I})$. This can be immediately generalized as follows:

Corollary. *Under the suppositions of theorem* 9 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^{kl_0+m}$ *exists for every integer* $m > 0$ *and it is equal to the matrix* $\mathbf{P}^r\mathbf{I}$, *where* $r \equiv m (\mathrm{mod}\ l_0)$ *and* $0 \leqq r < l_0$.

Theorem 9 and its corollary constitute the s e c o n d m a i n t h e o r e m concerning stochastic matrices. This theorem is a *consequence of the fact that* $G(\mathbf{I})$ *is finite*. Using the explicit description of $\mathbf{I}$ we can get results concerning the values of entries in the limit matrix $\mathbf{P}^r \cdot \mathbf{I}$.

Remark. For various types of matrices $\mathbf{P}$ the number l_0 has various values. It is not necessary to enter into details and we only briefly remark:

a) A non-negative matrix $\mathbf{P}$ is called M-primitive if for some integer $s \geqq 1$ the matrix $\mathbf{P}^s$ is positive.[3] By theorem 6 if $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_n$ is M-primitive, $\mathbf{P}$ belongs to a primitive idempotent $\mathbf{I}$ and $\mathbf{PI} = \mathbf{I}$, so that $l_0 = 1$.

b) A $n \times n$ non-negative matrix $\mathbf{P}$ is called irreducible if $\mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \ldots + \mathbf{P}^n$ is positive. If $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_n$ is irreducible and non-M-primitive there is a least number $d > 1$ (called the index of imprimitivity of $\mathbf{P}$) such that for some permutation matrix $\mathbf{W}$ we have $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{P}^d\mathbf{W} = \mathrm{diag}\,[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_d]$, where the $\mathbf{A}_i'$s are M-primitive. Therefore we have $l_0 = d$.

c) If $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_n$ is not irreducible, then there is a permutation matrix $\mathbf{W}$ such that $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{PW}$ is of the form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g & & & \\ \mathbf{A}_{g+1,1}, & \ldots, & \mathbf{A}_{g+1,g} & \mathbf{A}_{g+1}, & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{A}_{t,1}, & \ldots, & \mathbf{A}_{t,g}, & \mathbf{A}_{t,g+1} & \ldots & \mathbf{A}_t \end{pmatrix}.$$

Hereby $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_g$ are irreducible stochastic matrices, while $\mathbf{A}_{g+1}, \ldots, \mathbf{A}_t$ are irreducible non-negative but not stochastic matrices (since the row sum is < 1). If $d_1, d_2, \ldots, d_g$ are indices of imprimitivity of $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_g$, then $l_0 =$ least common multiple of $[d_1, d_2, \ldots, d_g]$.

[3] We use the word M-primitive to avoid confusions. An M-primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$ is a primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$. But conversely a primitive idempotent $\in \mathfrak{S}_n$ is not necessarily an M-primitive matrix. A primitive idempotent $\mathbf{I} \in \mathfrak{S}_n$ is M-primitive if and only if all columns in $\mathbf{I}$ are positive.

6. The sequence of arithmetical means

There is a third important theorem concerning stochastic matrices which is formulated in theorem 11 below.

Consider the sequence $\{\mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \ldots\}$. Let $\mathfrak{P}$ be the closed convex hull of this sequence, i.e. the closure of all finite combinations $t_1 \mathbf{P} + t_2 \mathbf{P}^2 + \ldots$ with $t_i \geqq 0$ and $\sum_i t_i = 1$. $\mathfrak{P}$ is clearly a compact abelian subsemigroup of $\mathfrak{S}_n$.

Consider the sequence $\mathbf{S}_m = \frac{1}{m}(\mathbf{P} + \ldots + \mathbf{P}^m)$, $m = 1, 2, \ldots$ and let $\mathbf{S}_0$ be a cluster point of this sequence. Clearly $\mathbf{S}_0 \in \mathfrak{P}$. Let $\{\mathbf{S}_{m_1}, \mathbf{S}_{m_2}, \mathbf{S}_{m_3}, \ldots\}$ be a subsequence which converges to $\mathbf{S}_0$. With respect to the continuity of multiplication the sequence $\{\mathbf{S}_{m_1}\mathbf{P}, \mathbf{S}_{m_2}\mathbf{P}, \mathbf{S}_{m_3}\mathbf{P}, \ldots\}$ converges to $\mathbf{S}_0\mathbf{P}$. Now the corresponding entries in the matrices $\mathbf{S}_{m_i}$ and $\mathbf{S}_{m_i}\mathbf{P}$ differ at most by $\frac{2}{m_i}$, hence both sequences converge to the same element, i.e. $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0\mathbf{P}$.

The last relation implies $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0\mathbf{P} = \mathbf{S}_0\mathbf{P}^2 = \ldots$ and $(\sum_i t_i \mathbf{P}^i)\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0$ for any finite number of $t_i \geqq 0$ with $\sum_i t_i = 1$. With respect to the continuity we then have $\mathbf{Q}\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0\mathbf{Q} = \mathbf{S}_0$ for every $\mathbf{Q} \in \mathfrak{P}$. This means that the abelian semigroup $\mathfrak{P}$ contains $\mathbf{S}_0$ as its zero element. Since any semigroup has at most one zero element, there is a unique cluster point $\mathbf{S}_0$ of $\{\mathbf{S}_m \mid m = 1, 2, \ldots\}$ and $\lim_{m\to\infty} \mathbf{S}_m = \mathbf{S}_0$ follows by the compactness of the semigroup $\mathfrak{P}$. $\mathbf{S}_0$ is clearly an idempotent $\in \mathfrak{S}_n$.

We give an explicit expression for $\mathbf{S}_0$ in terms of the quantities considered above. Suppose that $\mathbf{P}$ belongs to the idempotent $\mathbf{I}$ and let l_0 be the least integer such that $\mathbf{IP}^{l_0} = \mathbf{I}$. Since $\mathbf{I} \in \mathfrak{P}$, and $\mathfrak{P}$ is a semigroup, all elements of the group $\Gamma(\mathbf{P}) = \{\mathbf{IP}, \mathbf{IP}^2, \ldots, \mathbf{IP}^{l_0} = \mathbf{I}\}$ are contained in $\mathfrak{P}$. Since $\mathfrak{P}$ is convex, we also have $\mathbf{I}_1 = \frac{1}{l_0}(\mathbf{IP} + \mathbf{IP}^2 + \ldots + \mathbf{IP}^{l_0}) \in \mathfrak{P}$. Now by direct multiplication we have $\mathbf{I}_1\mathbf{P} = \mathbf{I}_1$, which implies $\mathbf{I}_1(\sum_i t_i \mathbf{P}^i) = \mathbf{I}_1$ for any finite number of $t_i \geqq 0$ such that $\sum_i t_i = 1$. By continuity we get again $\mathbf{I}_1\mathbf{Q} = \mathbf{I}_1$ for any $\mathbf{Q} \in \mathfrak{P}$. Hence $\mathbf{I}_1$ is the zero element of $\mathfrak{P}$. Therefore $\mathbf{S}_0 = \mathbf{I}_1$.

Note that $\mathbf{I}_1$ is exactly the arithmetical mean of the elements of the finite cyclic group $\Gamma(\mathbf{P})$.

We have proved:

Theorem 10. *Let* $\mathbf{P}$ *be any element* $\in \mathfrak{S}_n$ *belonging to the idempotent* $\mathbf{I}$. *Let* l_0 *be the least integer such that* $\mathbf{IP}^{l_0} = \mathbf{I}$. *Then the limit* $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}(\mathbf{P} + \ldots + \mathbf{P}^m)$ *exists and it is equal to* $\frac{1}{l_0}(\mathbf{IP} + \mathbf{IP}^2 + \ldots + \mathbf{IP}^{l_0})$.

(Received January 30, 1964)

REFERENCES

[1] Cohen, H.—Collins, H. S.: „Affine semigroups." *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959) 97—113.
[2] Chung, K. L.: *Markov chains with stationary transition probabilities*. Springer, Berlin 1960.
[3] Doob, J. L.: „Topics in the theory of Markoff chains." *Trans. Amer. Math. Soc.* **52** (1942) 37—64.
[4] Doob, J. L.: *Вероятностные процессы* (перевод с английского). Москва 1956.
[5] Schwarz, Š.: «К теории хаусдорфовых бикомпактных полугрупп». *Чех. мат. ж.* **5** (80) (1955) 2—23.
[6] Wallace, A. D.: „Remarks on affine semigroups." *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960) 110—112.
[7] Wallace, A. D.: „The structure of topological semigroups." *Bull. Amer. Math. Soc.* **61** (1955) 95—112.
[8] Brown, D. R.: *Topological semigroups of non-negative matrices*. Dissertation, Louisiana State University, 1963.

О СТРОЕНИИ ПОЛУГРУППЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Š. SCHWARZ

Резюме

Обозначим символом $\mathfrak{S}_n$ множество всех $n \times n$ стохастических матриц и введем в $\mathfrak{S}_n$ естественную топологию. Тогда $\mathfrak{S}_n$ превращается в бикомпактную топологическую полугруппу.

Целью этой статьи является изучение некоторых свойств полугруппы $\mathfrak{S}_n$. В частности исследуется, до какой степени некоторые результаты касающиеся цепей Маркова являются более или менее непосредственным следствием общих результатов, имеющие место для всякой бикомпактной полугруппы.

В разделе 1 даются некоторые предварительные замечания из общей теории бикомпактных полугрупп. В разделе 2 описываются примитивные идемпотенты и ядро полугруппы $\mathfrak{S}_n$. В разделе 3 доказывается, что существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{P}^k$ для матрицы $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_n$, для которой некоторая степень имеет положительного стольбца, — следствие того, что такая матрица принадлежит (в смысле теории бикомпактных полугрупп) к примитивному идемпотенту $\in \mathfrak{S}_n$. В разделе 4 получены все максимальные группы, лежащие в $\mathfrak{S}_n$. Из обстоятельства, что эти группы конечны, вытекает непосредственно в разделе 5, что для всякого $\mathbf{P} \in \mathfrak{S}_n$ существует число l_0 такое, что $l_0 | n!$ и предел $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{P}^{kl_0}$ существует. В разделе 6 дается общее выражение для предела последовательности аритметических средних.

ÜBER ZERLEGUNGSSÄTZE FÜR TEILWEISE GEORDNETEN HALBGRUPPEN MIT BEDINGTEN DISTRIBUTIVITÄTSREGELN

von

O. STEINFELD

§ 1. Einleitung

Die Verbandshalbgruppen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der teilweise geordneten algebraischen Strukturen. (S. L. FUCHS [3].) Die in dieser Arbeit definierte $(*)$-Verbandshalbgruppe ist eine multiplikative Halbgruppe und ein vollständiger Verband mit gewissen Eigenschaften (2.1)—(2.4) und mit einer »schwachen« Distributivitätsregel $(*)$. Die Menge aller Teilringe eines assoziativen Ringes bildet z. B. eine $(*)$-Verbandshalbgruppe.

In einer früheren Arbeit [13] definierten wir die Begriffe der Absorbenten und Primabsorbenten als Verallgemeinerungen der Ideale und Primideale. Wir gehen jetzt durch die Definitionen der Links-, Rechts-, Bi- und Quasiabsorbenten in dieser Richtung weiter. Eine $(*)$-Verbandshalbgruppe wird radikalfrei genannt, wenn ihr grösstes Element keinen nilpotenten Linksabsorbenten $(\neq 0)$ besitzt.

In § 4 beschäftigen wir uns mit solchen radikalfreien $(*)$-Verbandshalbgruppen, deren grösstes Element Vereinigung von minimalen Rechtsabsorbenten (und Linksabsorbenten) ist. Wir geben für diese $(*)$-Verbandshalbgruppe einige Zerlegungssätze, die den Struktursätzen der halbeinfachen Ringe und den Zerlegungssätzen der vollständig einfachen Halbgruppen analog sind (Sätze 4.2, 4.3, 4.4).

Um zu diesen Ergebnissen zu gelangen, müssen wir eine gemeinsame Verallgemeinerung des Schiefkörpers und der Gruppe mit Nullelement angeben (Lemma 2.5) und einige Sätze über die minimalen Links-, Rechts-, Bi- und Quasiabsorbenten beweisen (§ 3).

In seiner Arbeit [6] gab L. KOVÁCS eine Charakterisierung der regulären Ringe mit Hilfe der Links- und Rechtsideale. In Satz 2.3 definieren wir die regulären $(*)$-Verbandshalbgruppen mit Hilfe der Links-, Rechts- und Quasiabsorbenten. Die regulären $(*)$-Verbandshalbgruppen sind radikalfrei, so lassen sich die erwähnten Zerlegungssätze über die regulären $(*)$-Verbandshalbgruppen in einer schärferen Form übertragen (Sätze 4.2′, 4.6).

§ 2. Grundbegriffe

Es sei $L = \{a, b, \ldots\}$ eine multiplikative Halbgruppe und ein vollständiger Halbverband bezüglich der Durchschnittsoperation $\cap$.

Man kann in L durch

$$a \leq b \Leftrightarrow a \cap b = a \tag{2.1}$$

eine Halbordnungsrelation $\leqq$ definieren. Es gelte

$$a^2 \leqq a \qquad (a \in L)\,, \tag{2.2}$$

$$(\bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega)\, b \leqq \bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega b \quad \text{und} \quad b(\bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega) \leqq \bigcap_{\omega \in \Omega} b a_\omega \qquad (a_\omega,\, b \in L)\,, \tag{2.3}$$

wo Ω eine beliebige Indexmenge bezeichnet. Wir verlangen endlich die Existenz der Elemente 0, e ($\in L$) mit den Bedingungen

$$0 \leqq a \leqq e\,,\ 0a = a0 = 0 \qquad (a \in L)\,. \tag{2.4}$$

Eine algebraische Struktur L mit den obigen Eigenschaften wird eine *$\mathcal{H}$-Halbgruppe* genannt. Mit L bezeichnen wir immer eine $\mathcal{H}$-Halbgruppe. (S. O. Steinfeld [13].)

Aus (2.3) folgt:

$$a \leqq b \Rightarrow ax \leqq bx \quad \text{und} \quad xa \leqq xb \qquad (a, b, x \in L)\,, \tag{2.5}$$

und umgekehrt. L ist also eine halbgeordnete Halbgruppe.

Wir sagen, dass das Element b ($\in L$) ein *Absorbent* eines Elementes a ($\in L$) ist, wenn

$$b \leqq a \tag{2.6}$$

und

$$ab \leqq b\,, \quad ba \leqq b \tag{2.7}$$

bestehen. b heisst ein *Linksabsorbent (Rechtsabsorbent)* von a, wenn (2.6) und (2.7_1) [(2.6) und (2.7_2)] gelten.

Ein Element k ($\in L$) heisst ein *Quasiabsorbent* des Elementes a ($\in L$), wenn

$$k \leqq a \quad \text{und} \quad ka \cap ak \leqq k \tag{2.8}$$

bestehen. Der Durchschnitt $r \cap l$ eines Rechtsabsorbenten r und eines Linksabsorbenten l von a ($\in L$) ist wegen

$$(r \cap l)a \cap a(r \cap l) \leqq ra \cap al \leqq r \cap l$$

ein *Quasiabsorbent* von a. Es gilt

Lemma 2.1. *Ist r ein Rechtsabsorbent, l ein Linksabsorbent des Elementes a ($\in L$), so besteht $rl \leqq r \cap l$.*

Beweis. Da

$$rl \leqq \begin{cases} al \leqq l\,, \\ ra \leqq r \end{cases}$$

gelten, ist unsere Behauptung richtig.

Das Element b($\in L$) heisst ein *Biabsorbent* von a($\in L$), wenn

$$b \leqq a \quad \text{und} \quad bab \leqq b \tag{2.9}$$

gelten. Aus den Definitionen folgt sofort, dass die Quasiabsorbenten von a auch Biabsorbenten von a sind. Es gilt

Lemma 2.2. (Vgl. LAJOS [7].) *Ist b ein Biabsorbent des Elementes $a(\in L)$, so sind bx und xb für jedes Element $x(\leqq a)$ Biabsorbenten von a.*

Beweis. Wegen $b, x \leqq a$ gelten $bx \leqq a$ und $xb \leqq a$. Weiterhin bestehen $bxabx \leqq ba^2bx \leqq babx \leqq bx$ und $xbaxb \leqq xba^2b \leqq xbab \leqq xb$.

Wir definieren für beliebig viele Elemente $a_\lambda(\in L)$ eine Vereinigungsoperation $\cup$ durch

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \bigcap d_\mu , \tag{2.10}$$

wo $d_\mu(\in L)$ die gemeinsamen oberen Schranken aller a_λ durchläuft. Es ist bekannt, dass L bezüglich der in ihm definierten Verknüpfungen $\cap$ und $\cup$ einen vollständigen Verband bildet.

Wir machen von jetzt an eine sehr wesentliche Voraussetzung, die gewisse Distributivitätsregeln vorschreibt.

($\ast$)-Eigenschaft. *Es bezeichne a ein beliebiges Element der $\mathcal{H}$-Halbgruppe L.*

(1) *Sind x, y Elemente von L mit $x \leqq a$ und $y \leqq a$, so sollen*

$$(x \cup ax)y = xy \cup axy \quad \textit{und} \quad y(x \cup ax) = yx \cup yax ,$$

$$(x \cup xa)y = xy \cup xay \quad \textit{und} \quad y(x \cup xa) = yx \cup yxa$$

bestehen.

(2) *Sind m_λ $(\lambda \in \Lambda)$ Linksabsorbenten (Rechtsabsorbenten) des Elementes a und x ein Element von L mit $x \leqq a$, so sollen*

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda)x = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda x \quad \textit{und} \quad x(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} xm_\lambda$$

gelten.

Infolge der Voraussetzung ($\ast$) ist L im allgemeinen keine verbandsgeordnete Halbgruppe; sondern eine Halbgruppe und ein vollständiger Verband mit gewissen bedingten Distributivitätsregeln. Wir nennen eine $\mathcal{H}$-Halbgruppe L mit der ($\ast$)-Eigenschaft eine ($\ast$)-*Verbandshalbgruppe*. Mit V bezeichnen wir immer eine ($\ast$)-Verbandshalbgruppe. Die Elemente $x(0 \leqq x \leqq a)$ des Intervalls $[0, a]$ bilden offenbar eine ($\ast$)-Teilverbandshalbgruppe V_a von V. Natürlich gilt $[0, e] = V_e = V$.

Aus Eigenschaft (1) folgt unmittelbar

$$(x \cup ax \cup xa \cup axa)y = xy \cup axy \cup xay \cup axay \quad \textit{und}$$

$$y(x \cup ax \cup xa \cup axa) = yx \cup yax \cup yxa \cup yaxa .$$

Wegen der Eigenschaft (1) und (2.2) gilt $a(x \cup ax) = ax \cup a^2x = ax \leqq \leqq x \cup ax$. So ist $x \cup ax$ ein Linksabsorbent von a, mit der Eigenschaft $x \leqq x \cup ax$. Ist l ein Linksabsorbent von a mit $x \leqq l$, so besteht $x \cup ax \leqq \leqq l \cup al \leqq l$. Die Elemente $x \cup ax$ bzw. $x \cup xa$ bzw. $x \cup ax \cup xa \cup axa$ sind also *der durch x erzeugte Linksabsorbent bzw. Rechtsabsorbent bzw. Absorbent von a.*

Sind r_λ $(\lambda \in \Lambda)$ Rechtsabsorbenten des Elementes a, so folgt aus der Eigenschaft (2) und (2.7_2)

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda)\, a = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda a \leqq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda . \tag{2.11}$$

Die Vereinigung $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda$ der Rechtsabsorbenten r_λ von a ist also wieder ein Rechtsabsorbent von a.

Bemerkungen 1. Die Teilringe eines assoziativen Ringes R bilden eine ($*$)-Verbandshalbgruppe. Definiert man nämlich den Durchschnitt $S \cap T$ der Teilringe S, T von R in üblicher Weise und das Produkt ST als den durch die Elemente st $(s \in S;\ t \in T)$ erzeugten Teilring von R, so bilden die Teilringe von R eine $\mathcal{H}$-Halbgruppe L_1. Die Links-, Rechtsabsorbenten, usw. eines Elementes entsprechen den Links-, Rechtsidealen usw. eines Teilringes. Nach (2.10) bezeichnet $S \cup T$ den durch S und T erzeugten Teilring von R und $S + T$ besteht aus den Elementen $s + t$ $(s \in S;\ t \in T)$. ($S + T$ ist im allgemeinen kein Teilring von R.)

Sind A und X $(X \subseteqq A)$ Teilringe von R, so bestehen $X \cup AX = X + AX$, $X \cup XA = X + XA$. Wir zeigen, dass z. B. die Distributivitätsregel

$$(X + AX)Y = XY + AXY$$

mit irgendwelchem Teilring Y $(\subseteqq A)$ von R gilt. Wir haben nur einzusehen, dass jedes Element der linken Seite in der rechten Seite enthalten ist. Die linke Seite ist durch die Elemente

$$(x + \sum_i a_i x_i)\, y = xy + \sum_i a_i x_i y \qquad (x, x_i \in X\ ;\ a_i \in A\ ;\ y \in Y)$$

erzeugt. Wegen XA, AX, YA, $AY \subseteqq A$ und $(XY)^2 \subseteqq XY$ sind die Summe und das Produkt der erzeugenden Elemente in $XY + AXY$ enthalten, woraus unsere Behauptung folgt. Ähnlicherweise kann man einsehen, dass auch die anderen Distributivitätsregeln der ($*$)-Eigenschaft (1) in L_1 richtig sind.

Sind $\mathfrak{l}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ Linksideale des Teilringes A von R, so gilt $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{l}_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{l}_\lambda$. Es bezeichnet Y einen Teilring von A. Wir zeigen, dass z. B. die Distributivitätsregel $(\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{l}_\lambda)\, Y = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{l}_\lambda Y$ besteht. Wir haben nur $(\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{l}_\lambda)\, Y \subseteqq \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{l}_\lambda Y$ einzusehen. Die linke Seite wird durch die Elemente $(\sum l_\lambda) y = \sum l_\lambda y$ $(l_\lambda \in \mathfrak{l}_\lambda;\ y \in Y)$ erzeugt. Da $\mathfrak{l}_\lambda$ Linksideale von A sind, sind die Summe und das Produkt der erzeugenden Elemente in $\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{l}_\lambda Y$ enthalten. Die Gültigkeit der übrigen Distributivitätsregeln aus der ($*$)-Eigenschaft (2) in L_1 lässt sich ähnlicherweise einzusehen.

Somit ist L_1 eine ($*$)-Verbandshalbgruppe.

2. Ein anderes Beispiel für die ($*$)-Verbandshalbgruppen liefert die Menge aller Teilhalbgruppen mit Nullelement einer Halbgruppe mit Nullelement, welche durch L_2 bezeichnet wird. Die Gültigkeit der ($*$)-Eigenschaft in L_2 läßt sich ähnlicherweise wie in L_1 einzusehen.

Wir beweisen

Satz 2.3. *In V sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:*

(i) *für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l des Elementes $a(\in V)$ gilt*

$$rl = r \cap l\,; \tag{2.12}$$

(ii) *für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l von a gelten*

a) *r ist idempotent, d. h. $r^2 = r$,*

b) *l ist idempotent,*

c) *rl ist ein Quasiabsorbent von a;*

(iii) *die Quasiabsorbenten von a bilden eine reguläre Teilhalbgruppe*[1] *von V.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Die Bedingung (ii) c) folgt aus (2.12) und der Tatsache, dass $r \cap l$ ein Quasiabsorbent von a ist. Wegen (2.12) gilt $ra = r \cap a = r$, woraus infolge der Eigenschaft (1) $r = r \cap (r \cup ar) = r(r \cup ar) = r^2 \cup rar = r^2$ folgt, was die Bedingung (ii) a) impliziert. Ähnlich kann man die Gültigkeit von (ii) b) einsehen.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es sei k ein Quasiabsorbent von a. Wir zeigen zuerst

$$k = ka \cap ak\,. \tag{2.13}$$

Wegen a) und der Eigenschaft (1) gelten

$$k \leqq k \cup ka = (k \cup ka)^2 = k^2 \cup k^2 a \cup kak \cup kaka \leqq ka\,.$$

Ähnlich gilt $k \leqq ak$, woraus (2.13) wegen (2.8) folgt.

Wegen (2.13) und c) gilt

$$rl = rla \cap arl\,, \tag{2.14}$$

wo r ein Rechtsabsorbent, l ein Linksabsorbent von a ist. Aus (2.13), (2.14) a), b) bekommt man

$$r \cap l = k = ka \cap ak = kaaka \cap akaak = kaak = kak \leqq ral \leqq rl\,,$$

was wegen Lemma 2.1 die Gültigkeit von (2.12) sichert.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Wir zeigen zuerst, dass das Produkt der Quasiabsorbenten k_1, k_2 von a ein Quasiabsorbent von a ist. Wegen (2.12) gilt

$$ak_1 k_2 \cap k_1 k_2 a = k_1 k_2 a a k_1 k_2 \leqq k_1 \cdot k_2 a k_2 \leqq k_1(k_2 a \cap ak_2) \leqq k_1 k_2\,.$$

Somit bilden die Quasiabsorbenten von a eine Teilhalbgruppe K von V. Weiterhin bekommt man wegen der Eigenschaft (1) für einen beliebigen Quasiabsorbenten k von a

$$k \leqq (k \cup ka) \cap (k \cup ak) = (k \cup ka)(k \cup ak) = k^2 \cup kak \leqq ka \cap ak = ka^2 k\,,$$

woraus wegen $ka^2 k \leqq k$

$$k = ka^2 k\,,$$

d. h. die Regularität von K folgt.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Da der Durchschnitt $r \cap l$ eines Rechtsabsorbenten r und eines Linksabsorbenten l von a ein Quasiabsorbent von a ist, existiert ein Quasiabsorbent x von a mit

$$r \cap l = (r \cap l)x(r \cap l) \leqq (r \cap l)a(r \cap l) \leqq ral \leqq rl\,.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Wir nennen das Element $a(\in V)$ und zugleich die ($\ast$)-Verbandshalbgruppe V_a *regulär,* wenn eine der Bedingungen (i), (ii), (iii) in V gilt.

---

[1] Eine Halbgruppe H heisst *regulär,* wenn für jedes Element $a(\in H)$ mindestens ein Element $x(\in H)$ mit $a = axa$ existiert.

Bemerkungen 1. Zu (i) und (ii) ähnliche Charakterisierungen der regulären Ringe und Halbgruppen sind von L. Kovács [6], K. Iséki [4] und J. Calais [1] gegeben.

2. Die zu (i) $\Rightarrow$ (iii) ähnliche Eigenschaft der regulären Halbgruppe hat Lajos S. [7] bewiesen.[2]

Aus Satz 2.3 folgt

Korollar 2.4. *Ist V regulär, so ist für jeden Absorbenten a von e auch die $(\ast)$-Teilverbandshalbgruppe V_a regulär.*

Beweis. Wegen (i) genügt es zu zeigen, dass die Rechts- und Linksabsorbenten von a auch Rechts- und Linksabsorbenten von e sind. Ist l ein Linksabsorbent von a, so ist $l \cup el$ infolge der Eigenschaft (1) ebenfalls ein Linksabsorbent von a und besteht

$$(l \cup el)^2 \leqq a(l \cup el) \leqq l \leqq l \cup el\,,$$

woraus wegen (ii), b) $l = l \cup el$, d. h. $el \leqq l$ folgt. Ebenso sieht man ein, dass für jeden Rechtsabsorbenten r von a auch $re \leqq r$ gilt.

Lemma 2.5. *Für ein Element a $(\neq 0)$ einer $(\ast)$-Verbandshalbgruppe V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(I) *für jedes Element x $(\in V, x \neq 0, x \leqq a)$ gilt $ax = xa = a$;*

(II) *a besitzt nur die trivialen Rechts- und Linksabsorbenten 0 und a, und $a^2 \neq 0$;*

(III) *jeder Rechts- und Linksabsorbent von a ist idempotent und für die Rechtsabsorbenten r, r_1, r_2 $(\neq 0)$ von a die Implikation $rr_1 = rr_2 \Rightarrow r_1 = r_2$ für die Linksabsorbenten l, l_1, l_2 $(\neq 0)$ von a die Implikation $l_1 l = l_2 l \Rightarrow l_1 = l_2$ gelten.*

Beweis. Aus (I) folgt (II) trivialverweise.

(II) $\Rightarrow$ (I). Für das Element $x \neq 0$, $x \leqq a$ gilt $ax = 0$ oder $ax = a$. Der erste Fall ist unmöglich, weil in diesem Falle nach der Eigenschaft (1)

$$a^2 = a(x \cup xa) = ax \cup axa = 0$$

gültig wäre. Ähnlich muss $xa = a (x \neq 0,\ x \leqq a)$ bestehen.

(II) $\Rightarrow$ (III) ist trivial.

(III) $\Rightarrow$ (II). Ist l $(\neq 0)$ ein Linksabsorbent von a, so gilt wegen $l = l^2 \leqq al \leqq l$

$$ll = al\,,$$

woraus $l = a$ folgt. Dasselbe gilt für die Rechtsabsorbenten $r \neq 0$ von a. Damit ist der Beweis beendet.

$a (\in V)$ heisst ein *Divisionselement*, wenn für a eine der Bedingungen (I), (II), (III) gilt.

Ist a ein Divisionselement, so ist V_a wegen (II) und (i) regulär.

Bemerkung. Die Bedingungen (I), (II), (III) können als Definitionen eines Schiefkörpers bzw. einer Gruppe mit Nullelement in L_1 bzw. in L_2 betrachtet werden.

---

[2] Inzwischen ist eine Arbeit von J. Luh »A characterization of regular rings« (*Proc. Japan Acad.* **39** (1963), 741—743) erschienen, in welcher im wesentlichen die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii) für Ringe bewiesen ist.

Wir brauchen noch den folgenden

Satz 2.6. *Es sei p ein Absorbent des Elementes $a(\in V)$. Für p sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(A) *sind b, c Absorbenten von a mit $bc \leqq p$, so gilt entweder $b \leqq p$ oder $c \leqq p$;*

(B) *ist r bzw. l ein Rechtsabsorbent bzw. ein Linksabsorbent von a mit $rl \leqq p$, so gilt entweder $r \leqq p$ oder $l \leqq p$;*

(C) *sind r_1, r_2 Rechtsabsorbenten von a mit $r_1 r_2 \leqq p$, so gilt entweder $r_1 \leqq p$ oder $r_2 \leqq p$;*

(D) *sind l_1, l_2 Linksabsorbenten von a mit $l_1 l_2 \leqq p$, so gilt entweder $l_1 \leqq p$ oder $l_2 \leqq p$;*

(E) *sind x, y $(\leqq a)$ Elemente von V mit $xay \leqq p$, so gilt entweder $x \leqq p$ oder $y \leqq p$.*

Beweis. (A) $\Rightarrow$ (B). Gilt $rl \leqq p$ mit einem Rechtsabsorbenten r und mit einem Linksabsorbenten l von a, so gilt wegen Eigenschaft (1) auch $(r \cup ar)(l \cup la) = rl \cup rla \cup arl \cup arla \leqq p$, woraus nach (A) entweder $r \leqq r \cup ar \leqq p$ oder $l \leqq l \cup la \leqq p$ folgt.

(B) $\Rightarrow$ (C). Sind r_1, r_2 Rechtsabsorbenten von a mit $r_1 r_2 \leqq p$, so gilt nach der Eigenschaft (1) $r_1(r_2 \cup ar_2) = r_1 r_2 \cup r_1 ar_2 = r_1 r_2 \leqq p$, woraus wegen (B) entweder $r_1 \leqq p$ oder $r_2 \leqq r_2 \cup ar_2 \leqq p$ folgt.

Ähnlich kann man (B) $\Rightarrow$ (D) einsehen.

(B) $\Rightarrow$ (E). Besteht für die Elemente x, y $(\leqq a)$ von V die Voraussetzung $xay \leqq p$, so gilt nach der Eigenschaft (1)

$$(x \cup xa)a(y \cup ay) = xay \cup xa^2 y \cup xa^2 y \cup xa^3 y = xay \leqq p,$$

woraus wegen (B) entweder $x \leqq x \cup xa \leqq p$ oder $a(y \cup ay) \leqq p$ folgt. Da die zweite Möglichkeit nach (B) entweder $y \leqq a \leqq p$ oder $y \leqq y \cup ay \leqq p$ impliziert, ist unsere Behauptung (B) $\Rightarrow$ (E) richtig.

Da (C) $\Rightarrow$ (A) und (D) $\Rightarrow$ (A) trivialerweise gelten, haben wir nur (E) $\Rightarrow$ (A) zu zeigen. Sind b, c Absorbenten von a mit $bc \leqq p$, so gilt $bac \leqq bc \leqq p$, was nach (E) entweder $b \leqq p$ oder $c \leqq p$ impliziert.

Ein Absorbent p von a, für welchen eine der Bedingungen (A)—(E) erfüllt ist, heisst *prim*.

Bemerkung. Satz 2.6 liefert eine Charakterisierung der Primideale der Ringe und Halbgruppen. (Vgl. McCoy [8] und Steinfeld [9].)

Satz 2.7. *Es sei q ein Absorbent des Elementes a $(\in V)$. Für q sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(α) *sind x, y $(\leqq a)$ Elemente von V mit $xy \leqq q$, so gilt entweder $x \leqq q$ oder $y \leqq q$,*

(β) *ist l bzw. r ein Linksabsorbent bzw. ein Rechtsabsorbent von a mit $lr \leqq q$, so gilt entweder $l \leqq q$ oder $r \leqq q$.*

Beweis. Aus (α) folgt (β) trivialerweise.

(β) $\Rightarrow$ (α). Ist $xy \leqq q$, so gilt wegen der Eigenschaft (1) auch

$$(x \cup ax)(y \cup ya) = xy \cup xya \cup axy \cup axya \leqq q,$$

woraus entweder $x \leqq x \cup ax \leqq q$ oder $y \leqq y \cup ya \leqq q$ folgt.

Ein Absorbent q von a mit der Eigenschaft (α) oder (β) heisst *vollständig prim*. Ist 0 ein vollständig Primabsorbent von a, so nennen wir a und zugleich V_a *nullteilerfrei*.

Bemerkung. Satz 2.7 liefert eine Charakterisierung der vollständig Primideale der Ringe und Halbgruppen. (Vgl. Steinfeld [9].)

§ 3. Über die minimalen Links-, Rechts-, Bi- und Quasiabsorbenten

Der Absorbent $b(\neq 0)$ des Elementes $a(\in V)$ heisst *minimal,* wenn a keinen Absorbenten b' mit $0 < b' < b$ besitzt. Ähnlich definiert man die minimalen Links-, Rechts-, Bi- und Quasiabsorbenten.

Satz 3.1. *Der Durchschnitt eines minimalen Links- und eines minimalen Rechtsabsorbenten des Elementes $a(\in V)$ ist entweder 0 oder ein minimaler Quasiabsorbent von a.*

Beweis. Es sei k der Durchschnitt eines minimalen Linksabsorbenten l und eines minimalen Rechtsabsorbenten r von a, und $k \neq 0$. Setzen wir voraus, dass es — im Widerspruch zu unserer Behauptung — einen Quasiabsorbenten k' mit $0 < k' < k$ gibt. Wegen der Minimalität von l gilt entweder $ak' = 0$ oder $ak' = l$. Im Fall $ak' = 0$ wäre k' ein Linksabsorbent von a mit $0 < k' < k \leqq l$, was aber wegen der Definition von l unmöglich ist. Folglich ist $ak' = l$. Ebenso folgt $k'a = r$. Daraus ergibt sich $k = l \cap r = ak' \cap k'a \leqq \leqq k'$, was der Bedingung $k' < k$ widerspricht. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

Als ein Analogon des vorigen Satzes gilt

Satz 3.1'. *Das Produkt rl eines minimalen Rechtsabsorbenten r und eines minimalen Linksabsorbenten l von $a(\in V)$ ist entweder 0 oder ein minimaler Biabsorbent von a.*

Beweis. Nach Lemma 2.2 ist rl ein Biabsorbent von a. Es sei b ein Biabsorbent von a, mit $0 < b < rl$. Es gilt $ba^2 b \leqq bab \leqq b$. Da $b \leqq r, l$ ist, sind $ba \leqq r$ und $ab \leqq l$ gültig. Wegen der Minimalität von r und l sind nur die Fälle

$$ba = \begin{cases} 0 \\ r \end{cases} \quad \text{und} \quad ab = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases}$$

möglich. Ist $ba = 0$, so ist b ein Rechtsabsorbent von a mit $0 < b \leqq rl \leqq r$. Daraus folgt wegen der Minimalität von r

$$b = r\,,$$

was $rl \leqq ra = 0$ impliziert. Ähnlich sieht man ein, dass aus $ab = 0$ die Bedingung $rl = 0$ folgt. Somit können wir $ba = r$ und $ab = l$ voraussetzen. Daraus folgt aber $baab = rl \leqq b$, d. h. $b = rl$. Qu. e. d.

Satz 3.2. *Ist b ein minimaler Biabsorbent des Elementes $a(\in V)$, so ist b entweder ein Divisionselement oder gilt $b^2 = 0$.*[3]

Beweis. Es sei x ein Element mit $0 < x \leqq b$. Nach Lemma 2.2 sind bx und xb Biabsorbenten von a. Wegen der Minimalität von b sind nur die Fälle

$$bx = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases} \quad \text{und} \quad xb = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases}$$

möglich. Ist $xb = 0$, so muss nach Eigenschaft (1) auch $(x \cup ax)b = xb \cup \cup axb = 0$ bestehen. Wegen $x \leqq b$ und der Minimalität von b gilt $(x \cup ax) \cap \cap b = b$, woraus $b^2 = 0$ folgt. Ähnlich schliessen wir $b^2 = 0$ aus $bx = 0$.

[3] Ob ein ähnliches Ergebnis über die minimalen Quasiabsorbenten gültig ist, ist eine offene Frage (Vgl. [10] Satz 4a, [11] Satz 3 und [12] Satz 4).

Gelten $bx \neq 0$ und $xb \neq 0$, so ist $bx = xb = b$; folglich ist b nach Lemma 2.5 (I) ein Divisionselement.

Aus Satz 3.1′ und 3.2 folgt nun

Korollar 3.3. *Ist r ein minimaler Rechtsabsorbent, l ein minimaler Linksabsorbent von $a(\in V)$, so ist rl entweder ein Divisionselement oder $(rl)^2 = 0$.*

Ein Teil von Satz 3.2 lässt sich umkehren:

Satz 3.4. *Wenn ein Biabsorbent b des Elementes $a(\in V)$ ein Divisionselement ist, so ist b ein minimaler Biabsorbent von a.*

Beweis. Es sei x ein Biabsorbent von a mit $0 < x \leqq b$. Da nach Lemma 2.5 (I)

$$bx = xb = b \qquad (0 < x \leqq b)$$

gilt, muss $b = b^2 = xbbx \leqq xax \leqq x$, d. h. $x = b$ bestehen.

Satz 3.5. *Ist l ein minimaler Linksabsorbent, r ein minimaler Rechtsabsorbent von $a(\in V)$, so sind die Quadrate der Elemente rl, lr, $r \cap l$ gleichzeitig entweder Null oder nicht-Null.*

Beweis. Es sei zuerst $(rl)^2 = 0$. Ist dabei $rl = 0$, so ist $lrlr = l \cdot rl \cdot r = 0$ und $(r \cap l)(r \cap l) \leqq rl = 0$, also jetzt ist die Behauptung richtig. Ist dagegen $rl \neq 0$ und $(rl)^2 = 0$, so ist entweder $lrl = 0$ oder $lrl \neq 0$. Aus $rl \neq 0$ und $lrl = 0$ folgt wegen der Eigenschaft (1) und der Minimalität von r $l(rl \cup rla) = lrl \cup lrla = 0$ und $(rl \cup rla) \cap r = r$. Dies impliziert $lr = 0$, woraus auch $(l \cap r)(l \cap r) = 0$ folgt. Der zweite Fall $rl \neq 0$ und $lrl \neq 0$ ist unmöglich, denn wegen der Voraussetzung und der Minimalität von l muss $lrl = l$ bestehen. Dies führt aber wegen $(rl)^2 = 0$ zum Widerspruch $0 = rl \cdot rl = r \cdot lrl = rl$.

Jetzt setzen wir voraus, dass $(lr)^2 = 0$ ist. Ist $lr = 0$, so gilt $rl \cdot rl = r \cdot lr \cdot l = 0$ und $(r \cap l)(r \cap l) \leqq lr = 0$. Es sei zunächst $lr \neq 0$ und $(lr)^2 = 0$; es ist entweder $lrl \neq 0$ oder $lrl = 0$. Der Fall $lr \neq 0$ und $lrl \neq 0$ ist wieder unmöglich, da aus $lrl \neq 0$ wieder $lrl = l$ und daraus der Widerspruch $0 = lr \cdot lr = lrl \cdot r = lr$ folgt. Der Fall $lr \neq 0$ und $lrl = 0$ gibt zwei Möglichkeiten: $rl = 0$ oder $rl \neq 0$. Ist $rl = 0$, so ist $(r \cap l)(r \cap l) \leqq rl = 0$. Wenn dagegen $rl \neq 0$ und $lrl = 0$ gelten, bekommen wir wieder — wie oben — $lr = 0$, was der Voraussetzung $lr \neq 0$ widerspricht.

Zuletzt bestehe $(r \cap l)^2 = 0$. Man sieht, dass jetzt wegen $rl \leqq r \cap l$ auch $(rl)^2 = 0$ gilt. Ist ausserdem $rl = 0$, so ist auch $(lr)^2 = 0$ gültig. Wenn dagegen $(rl)^2 = 0$ und $rl \neq 0$ gelten, lässt sich der Beweis wie oben beenden.

Ein Element a von V heisst *nilpotent*, wenn eine natürliche Zahl n mit $a^n = 0$ existiert. Ist l ein nilpotenter Linksabsorbent von e, so ist wegen der Eigenschaft (1) $l \cup le$ ein nilpotenter Absorbent von e.

Besitzt das Element $a(\in V)$ keinen von Null verschiedenen nilpotenten Linksabsorbenten, so nennen wir a und zugleich die $(\ast)$-Verbandshalbgruppe V_a *radikalfrei*.

Wegen der vorigen Bemerkung hat ein radikalfreies Element auch keinen von Null verschiedenen nilpotenten Rechtsabsorbenten. Nach der Bedingung (ii) a) von Satz 2.3 ist eine reguläre $(\ast)$-Verbandshalbgruppe radikalfrei.

Im radikalfreien Falle gilt die Umkehrung von Satz 3.1:

Satz 3.6. *Ist $V_a(a \in V)$ eine radikalfreie $(\ast)$-Verbandshalbgruppe, so ist jeder minimale Quasiabsorbent k von a der Durchschnitt eines geeigneten minimalen Linksabsorbenten und eines minimalen Rechtsabsorbenten von a.*

Beweis. Wegen (2.8) und der Minimalität von k sind die folgenden zwei Fälle möglich:

$$ak \cap ka = \begin{cases} 0 \\ k\,. \end{cases}$$

Es sei zuerst $ak \cap ka = 0$. Es ist entweder $ak = 0$ oder $ak \neq 0$. Im Falle $ak = 0$ ist k $(\neq 0)$ ein Linksabsorbent von a mit $k^2 = 0$, was der Voraussetzung widerspricht. Im Falle $ak \neq 0$ betrachten wir das Produkt kak. Dieses ist wegen $kak \leqq ak \cap ka = 0$ gleich Null, woraus $akak = 0$ folgt, was wegen $ak \neq 0$ wieder unmöglich ist.

Es sei dann $ak \cap ka = k$. Wir behaupten, dass ak bzw. ka ein minimaler Links- bzw. ein minimaler Rechtsabsorbent von a ist. Es genügt die Behauptung für ak zu beweisen. Ist ak nicht minimal, so existiert ein Linksabsorbent l mit

$$0 < l < ak\,. \tag{3.1}$$

Da der Durchschnitt $al \cap ka$ ein Quasiabsorbent von a ist, muss wegen der Voraussetzungen entweder

$$al \cap ka = 0 \tag{3.2}$$

oder

$$al \cap ka = k \tag{3.3}$$

bestehen. Im Falle (3.2) gilt wegen $kl \leqq al \cap ka = 0$ auch $kl = 0$. Das impliziert $akl = 0$, woraus wegen (3.1) $l^2 = 0$, was aber unmöglich ist. Im Falle (3.3) gilt wegen $k \leqq al \leqq l$ auch $ak \leqq l$, was der Annahme (3.1) widerspricht. Damit ist der Beweis beendet.

Ein Analogon von Satz 3.6 ist

Satz 3.6'. *Ist $V_a (a \in V)$ eine radikalfreie* $(\ast)$*-Verbandshalbgruppe, so ist jeder minimale Biabsorbent von $a (\in V)$ das Produkt rl eines geeigneten minimalen Rechtsabsorbenten r und eines minimalen Linksabsorbenten l von a.*

Beweis. Es sei b ein minimaler Biabsorbent von a. Da $ba^2 b$ $(\leqq b)$ auch ein Biabsorbent von a ist, muss entweder $ba^2 b = 0$ oder $ba^2 b = b$ gelten. Ist $ba^2 b = 0$, dann gilt auch $abaaba = 0$, woraus wegen der Radikalfreiheit von V_a die Gültigkeit von $aba = 0$ folgt. So gilt $ba \cdot ba = 0$, was $ba = 0$ impliziert. Der Rechtsabsorbent $b \cup ab$ $(\neq 0)$ hat also die Eigenschaft: $(b \cup ab)^2 \leqq$ $\leqq (b \cup ab)a = ba \cup aba = 0$, was aber der Radikalfreiheit von V_a widerspricht. Folglich besteht

$$ba \cdot ab = b\,. \tag{3.4}$$

Wir zeigen, dass ba ein minimaler Rechtsabsorbent von a ist. Es sei r ein Rechtsabsorbent von a mit $0 < r \leqq ba$. Nach (3.4) gilt $rab \leqq b$, woraus wegen der Minimalität von b entweder $rab = 0$ oder $rab = b$ folgt. Ist $rab = 0$, so gilt $ra \cdot ra \leqq rar \leqq raba = 0$, woraus sich der Widerspruch $r^2 \leqq ra = 0$ ergibt. Daher muss $rab = b$ gelten, woraus $b \leqq r$ folgt. Dies impliziert aber $ba \leqq ra \leqq$ $\leqq r$, also $r = ba$.

Ähnlich sieht man ein, dass ab ein minimaler Linksabsorbent von a ist. Infolge (3.4) ist der Beweis damit beendet.

Aus den Sätzen 3.6, 3.1′, 3.6′, 3.1 und 2.2 (i), folgt

Korollar 3.7. *Ist V_a $(a \in V)$ eine reguläre $(\ast)$-Verbandshalbgruppe, so ist jeder minimale Quasiabsorbent von a ein minimaler Biabsorbent von a und umgekehrt.*

Bemerkung: Sätze 3.1, 3.5, 3.6 und Korollar 3.3 sind Verallgemeinerungen der entsprechenden Ergebnisse von STEINFELD [10], [11], [12].

§ 4. Zerlegungssätze

Wir nennen ein Element $a\,(\in V)$ und zugleich die $(\ast)$-Verbandshalbgruppe V_a *einfach*, wenn a keinen Absorbenten $(\neq 0, \neq a)$ besitzt und $a^2 \neq 0$ gilt.

Aus Satz 2.6 folgt unmittelbar

Korollar 4.1. *Sind r, r' bzw. l, l' beliebige von Null verschiedene Rechtsabsorbenten bzw. Linksabsorbenten eines einfachen Elementes $a\,(\in V)$, so gelten*

$$ll' \neq 0, \quad rr' \neq 0 \quad \text{und} \quad rl \neq 0\,.$$

Eine Zerlegung $a = \bigcup_{\omega \in \Omega} x_\omega$ $(a, x_\omega \in V)$ des Elementes a heisst *direkt*, wenn für jedes x_ω die Bedingung

$$x_\omega \cap \Big(\bigcup_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} x_{\omega'}\Big) = 0$$

gilt.

Das Element $a\,(\in V)$ und zugleich die $(\ast)$-Verbandshalbgruppe V_a wird *vollständig zerlegbar, vollständig links-, rechts-, bi-* oder *quasi-zerlegbar* genannt, je nachdem eine Zerlegung

$$a = \bigcup_{\omega \in \Omega} x_\omega \qquad (\Omega \text{ ist eine beliebige Indexmenge})$$

mit verschiedenen minimalen Absorbenten, Links-, Rechts-, Bi- oder Quasiabsorbenten x_ω gültig ist.

Satz 4.2. *Das Element e von V ist dann und nur dann radikalfrei und vollständig rechts-zerlegbar, wenn $e^2 = e$ ist und für jeden Absorbenten c von e die direkten Zerlegungen*

$$ec = \bigcup_{\mu} a_\mu \quad \textit{und} \quad ce = \bigcup_{\nu} a_\nu \tag{4.1}$$

bestehen, wo die a_μ bzw. die a_ν eindeutig bestimmte, einfache, paarweise annullierende vollständig rechts-zerlegbare Absorbenten von e sind.

Beweis. Es sei e radikalfrei und vollständig rechts-zerlegbar. Dann besteht eine Zerlegung

$$e = \bigcup_{\omega \in \Omega} r_\omega\,, \tag{4.2}$$

wo r_ω verschiedene, minimale Rechtsabsorbenten von e bezeichnen. Da e radikalfrei ist, gilt $r_\omega^2 = r_\omega (\omega \in \Omega)$, was wegen (4.2) und der Eigenschaft (2) $e^2 = e$ impliziert. Wegen der Minimalität von r_ω gilt

$$r_\omega r_{\omega'} = 0 \quad \text{oder} \quad r_\omega \qquad (\omega, \omega' \in \Omega)\,. \tag{4.3}$$

Es ist leicht einzusehen, dass in der Menge der Rechtsabsorbenten r_ω $(\omega \in \Omega)$ die folgende Relation $\equiv$

$$r_\alpha \equiv r_{\alpha'} \Leftrightarrow r_\alpha r_{\alpha'} = r_\alpha \qquad (\alpha, \alpha' \in \Omega) \tag{4.4}$$

eine Klasseneinteilung liefert. Bezeichne a_α die Vereinigung der Elemente r_ω, die *eine Klasse* K_α bilden. Nach (4.2) gilt

$$e = \bigcup_{\alpha \in A} a_\alpha , \tag{4.5}$$

wo A die Indexmenge der verschiedenen Klassen bezeichnet.

Wir zeigen, dass das Element $a_\alpha = \bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega$ ein einfacher Absorbent von e ist. Wegen (4.3), (4.4) und der Eigenschaft (2) gilt

$$a_\alpha a_\beta = \begin{cases} a_\alpha, & \text{wenn } \alpha = \beta , \\ 0, & \text{wenn } \alpha \neq \beta , \end{cases} \tag{4.6}$$

woraus nach (4.5)

$$e a_\alpha = a_\alpha e = a_\alpha \tag{4.7}$$

folgt.

Es sei x $(\neq 0)$ ein Absorbent des Elementes a_α. x ist wegen (4.5) und (4.6) auch ein Absorbent von e. Andererseits gilt nach der Eigenschaft (2)

$$a_\alpha x = \Big(\bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega\Big) x = \bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega x \neq 0 , \tag{4.8}$$

im entgegengesetzten Falle wäre nämlich $x^2 \leqq a_\alpha x = 0$, was der Radikalfreiheit von e widerspräche. Wegen (4.8) muss z. B. für das Element $r_\sigma (\in K_\alpha)$

$$r_\sigma x \neq 0 \Rightarrow r_\sigma x = r_\sigma \leqq x$$

bestehen. Daraus folgt wegen (4.4) und der Eigenschaft (2)

$$x \geqq a_\alpha x \geqq a_\alpha r_\sigma = \bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega r_\sigma = \bigcup_{r_\omega \in K_\alpha} r_\omega = a_\alpha ,$$

d. h. $x = a_\alpha$, womit die Einfachheit von a_α bewiesen ist.

Da a_α ein einfacher Absorbent von e ist, gilt $a_\alpha \cap \big(\bigcup_{\alpha \neq \beta \in A} a_\beta\big) = 0$ oder a_α. Der zweite Fall impliziert $a_\alpha \leqq \bigcup_{\alpha \neq \beta \in A} a_\beta$. Multipliziert man beide Seiten mit a_α, so besteht wegen (4.6) und der Eigenschaft (2)

$$a_\alpha = a_\alpha^2 = a_\alpha\Big(\bigcup_{\alpha \neq \beta \in A} a_\beta\Big) = \bigcup_{\alpha \neq \beta \in A} a_\alpha a_\beta = 0 ,$$

was unmöglich ist. So muss für jedes a_α $(\alpha \in A)$ der erste Fall gelten und (4.5) ist also eine direkte Zerlegung.

Aus der Definition von a_α folgt, dass a_α vollständig rechts-zerlegbar ist.

Um die Eindeutigkeit der Darstellung (4.5) zu zeigen, nehmen wir eine zweite direkte Darstellung

$$e = \bigcup_{\beta \in B} b_\beta , \tag{4.5'}$$

wo b_β einfache Absorbenten von e sind. Wegen (4.5'), (4.7) und der Eigenschaft (2) besteht

$$a_\alpha = ea_\alpha = (\bigcup_{\beta\in B} b_\beta)\, a_\alpha = \bigcup_{\beta\in B} b_\beta\, a_\alpha \neq 0$$

woraus die Existenz mindestens eines Absorbenten b_β mit $b_\beta\, a_\alpha \neq 0$ folgt. Da a_α und b_β einfache Absorbenten von e sind, muss

$$b_\beta a_\alpha = a_\alpha = b_\beta$$

gelten, was die Eindeutigkeit der Darstellung (4.5) sichert. Bezeichne c ($\neq 0$) einen beliebigen Absorbenten von e. Aus (4.5) folgen wegen der Einfachheit der Komponenten a_α und der Eigenschaft (2) die direkten Zerlegungen (4.1) von ec und ce.

Umgekehrt bestehe für jeden Absorbenten c ($\neq 0$) von e die direkte Zerlegung (4.1) mit einfachen, vollständig rechts-zerlegbaren Absorbenten a_μ von e. Daraus folgt wegen

$$a_\mu \leqq \bigcup a_\mu = ec \leqq c\,,$$

dass c nichtnilpotent ist, was die Radikalfreiheit von e sichert. Infolge (4.1) und $e^2 = e$ ist e auch vollständig rechts-zerlegbar.

Damit ist Satz 4.2 bewiesen.

Satz 4.3. *Ist e radikalfrei, so sind die folgenden drei Eigenschaften äquivalent:*

(a) *e ist vollständig quasi-zerlegbar,*

(b) *e ist gleichzeitig vollständig rechts- und links-zerlegbar,*

(c) *e ist vollständig bi-zerlegbar.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Die Bedingung (a) impliziert eine Darstellung von e

$$e = \bigcup k_\omega \tag{4.9}$$

mit minimalen Quasiabsorbenten k_ω von e. Nach Satz 3.6 kann man statt (4.9)

$$e = \bigcup (r_\omega \cap l_\omega)$$

schreiben, wo r_ω bzw. l_ω geeignete minimale Rechts- bzw. Linksabsorbenten von e sind. Daraus folgen die Darstellungen $e = \bigcup r_\omega = \bigcup l_\omega$, was zu beweisen war.

(b) $\Rightarrow$ (c). Es sei e gleichzeitig vollständig rechts- und links-zerlegbar, d. h.

$$e = \bigcup r_\nu = \bigcup l_\mu \tag{4.10}$$

gelte mit minimalen Rechtsabsorbenten r_ν und minimalen Linksabsorbenten l_μ von e. Wegen der Minimalität von l_μ und der Eigenschaft (2) gilt

$$l_\mu = el_\mu = (\bigcup_\nu r_\nu) l_\mu = \bigcup_\nu r_\nu l_\mu\,,$$

woraus nach (4.10)

$$e = \bigcup_\mu \bigcup_\nu r_\nu l_\mu$$

folgt, wo die von Null verschiedenen $r_\nu\, l_\mu$ nach Satz 3.1' minimale Biabsorbenten von e sind.

(c) $\Rightarrow$ (a). Gilt eine Darstellung

$$e = \bigcup b_\varrho \tag{4.11}$$

mit minimalen Biabsorbenten b_ϱ von e, so ist e nach Satz 3.6′ in der Form

$$e = \bigcup r_\varrho l_\varrho \tag{4.12}$$

darstellbar, wo r_ϱ bzw. l_ϱ minimale Rechtsabsorbenten bzw. Linksabsorbenten von e sind. Aus (4.12) folgt wegen $r_\varrho l_\varrho \leqq r_\varrho \cap l_\varrho$ die Darstellung $e = \bigcup (r_\varrho \cap l_\varrho)$, wo $r_\varrho \cap l_\varrho$ nach Satz 3.1 minimale Quasiabsorbenten von e sind.

Über die einfachen, vollständig links- und rechts-zerlegbaren Elementen von V geben die folgenden Eigenschaften weitere Aufklärungen.

Es sei das Element a einfach und es gelte

$$a = \bigcup_{\alpha \in A} r_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} l_\beta , \tag{4.13}$$

wo r_α bzw. b_β verschiedene minimale Rechtsabsorbenten bzw. Linksabsorbenten von a sind.

1. Zu jedem r_α $(\alpha \in A)$ existiert mindestens ein l_{α^*} $(\alpha^* \in B)$, so dass $l_{\alpha^*} r_\alpha = a$ ist und zu jedem $l_\beta (\beta \in B)$ existiert mindestens ein $r_{\beta^*} (\beta^* \in A)$, so dass $l_\beta r_{\beta^*} = a$ gilt.

Wegen (4.13) und der Einfachheit von a besteht nämlich für jedes r_α die Darstellung: $a = ar_\alpha = (\bigcup_{\beta \in B} l_\beta) r_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} l_\beta r_\alpha$. Da für das Paar l_β, r_α entweder $l_\beta r_\alpha = 0$ oder $l_\beta r_\alpha = a$ gilt, muss mindestens ein l_{α^*} mit $l_{\alpha^*} r_\alpha = a$ $(\alpha^* \in B)$ existieren. Die zweite Behauptung kann man ähnlich einsehen.

2. Für jeden Rechtsabsorbenten r $(\neq 0)$ und Linksabsorbenten l $(\neq 0)$ von a gelten $r_\alpha r = r_\alpha$ $(\alpha \in A)$ und $ll_\beta = l_\beta$ $(\beta \in B)$. Nach Korollar 4.1 ist $r_\alpha r \neq 0$, woraus wegen der Minimalität von r_α die Behauptung folgt. Ähnlich beweist man die zweite Behauptung.

3. Es gilt $a = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{\beta \in B} r_\alpha l_\beta$, wo $r_\alpha l_\beta$ $(\alpha \in A;\ \beta \in B)$ lauter verschiedene minimale Biabsorbenten von a sind.

Nach Satz 3.1′ und Korollar 4.1 haben wir nur $r_\alpha l_\beta = r_{\alpha'} l_{\beta'} \Rightarrow r_\alpha = r_{\alpha'}$, $l_\beta = l_{\beta'}$ zu zeigen. Aus $r_\alpha l_\beta = r_{\alpha'} l_{\beta'}$ folgen $ar_\alpha l_\beta = ar_{\alpha'} l_{\beta'} = al_\beta = al_{\beta'} = l_\beta = l_{\beta'}$ und $r_\alpha l_\beta a = r_{\alpha'} l_{\beta'} a = r_\alpha a = r_{\alpha'} a = r_\alpha = r_{\alpha'}$.

4. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent: (a) $l_\beta r_\alpha \neq 0$, (b) $r_\alpha l_\beta$ ist ein Divisionselement, (c) für jedes r_ξ und l_η $(\xi \in A;\ \eta \in B)$ gilt $r_\xi l_\beta r_\alpha l_\eta = r_\xi l_\eta$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Wegen (a) gilt $l_\beta r_\alpha = a$, folglich $(l_\beta r_\alpha)^2 \neq 0$. So besteht nach Satz 3.5 $(r_\alpha l_\beta)^2 \neq 0$, woraus nach Korollar 3.3 die Behauptung (b) folgt.

(b) $\Rightarrow$ (a). Aus (b) folgt $(r_\alpha l_\beta)^2 \neq 0$, was nach Satz 3.5 $(l_\beta r_\alpha)^2 \neq 0$ impliziert, weshalb $l_\beta r_\alpha \neq 0$ gilt.

(a) $\Rightarrow$ (c). Wegen (a) und 2. besteht $r_\xi l_\beta r_\alpha l_\eta = r_\xi a l_\eta = r_\xi l_\eta$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Nach (c) und 3. gilt $r_\xi l_\beta r_\alpha l_\eta = r_\xi l_\eta \neq 0$, was die Behauptung (a) impliziert.

5. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent: (a′) $l_\beta r_\alpha = 0$, (b′) $(r_\alpha l_\beta)^2 = 0$, (c′) für jedes r_ξ und l_η gilt $r_\xi l_\beta r_\alpha l_\eta = 0$.

Da (a′) $\Rightarrow$ (c′) und (c′) $\Rightarrow$ (b′) trivialerweise gelten, haben wir nur (b′) $\Rightarrow$ (a′) zu zeigen. Wegen (b′) besteht $(r_\alpha l_\beta)^2 = 0$, was wegen Satz 3.5 $(l_\beta r_\alpha)^2 = 0$ impliziert, woraus $l_\beta r_\alpha = 0$ folgt.

Infolge der vorigen Eigenschaft gilt

Satz 4.4. *Ist das Element a ($\in V$) einfach und*

$$a = \bigcup_{\alpha \in A} r_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} l_\beta \qquad (\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m},\ \overline{\overline{B}} = \mathfrak{n}) \tag{4.14}$$

mit verschiedenen minimalen Rechtsabsorbenten r_α bzw. Linksabsorbenten l_β von e, so besteht

$$a = \bigcup_\alpha \bigcup_\beta r_\alpha l_\beta \tag{4.15}$$

mit verschiedenen minimalen Biabsorbenten $r_\alpha l_\beta$ ($\alpha \in A$; $\beta \in B$) von a, unter welchen mindestens max ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$) Divisionselemente vorkommen. Weiterhin gilt

$$r_\alpha l_\beta r_{\alpha'} l_{\beta'} = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow l_\beta r_{\alpha'} = 0 \\ r_\alpha l_{\beta'} \Leftrightarrow l_\beta r_{\alpha'} \neq 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \alpha' \in A;\ \beta, \beta' \in B). \tag{4.16}$$

Bemerkungen 1. Man kann die Ergebnisse der Sätze 4.2, 4.3 und 4.4 als ein Analogon der Struktursätze der radikalfreien Ringe betrachten, die mit ihrem Sockel übereinstimmen. (Vgl. VAN DER WAERDEN [15], KERTÉSZ—STEINFELD [5] und SZÁSZ [14].)

2. Es ist bekannt, dass die vollständig einfachen Halbgruppen mit Nullelement die Eigenschaft (b) von Satz 4.3 haben. (S. CLIFFORD—PRESTON [2] Korollar 2.49.) So bietet eine radikalfreie ($\ast$)-Verbandshalbgruppe mit der Eigenschaft (a) [oder (b) oder (c)] eine Verallgemeinerung der vollständig einfachen Halbgruppe mit Nullelement. Korollar 2.52 a in CLIFFORD—PRESTON [2] ergibt sich als ein Spezialfall des Satzes 4.4.

Da eine reguläre ($\ast$)-Verbandshalbgruppe nach Satz 2.3 (ii) radikalfrei ist,[4] können wir die vorigen Ergebnisse für den regulären Fall spezialisieren.

Infolge Satz 2.3 (i) und Korollar 2.4 bekommt man aus Satz 4.2 den

Satz 4.2'. *Das Element e von V ist dann und nur dann regulär und vollständig rechts-zerlegbar, wenn für jeden Absorbenten c von e eine direkte Zerlegung*

$$c = \bigcup_\mu a_\mu$$

gilt, wo a_μ eindeutig bestimmte, einfache, paarweise annullierende, reguläre, vollständig rechts-zerlegbare Absorbenten von e sind.

Im regulären Falle fallen die Bedingungen (a) und (c) von Satz 4.3 wegen Korollar 3.7 überein und die Biabsorbenten $r_\alpha l_\beta$ im Satz 4.4 sind auch minimale Quasiabsorbenten von a.

Als einen Sonderfall von Satz 2.3 beweisen wir

Lemma 4.5. *In V sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:*

(i) *für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l des Elementes a ($\in V$) gilt*

$$rl = r \cap l \leq lr\,,$$

(ii) *jeder Quasiabsorbent von a ist idempotent.*

[4] Bekanntlich sind die halbeinfachen Ringe bzw. die vollständig einfachen Halbgruppen mit Nullelement regulär. Wir konnten ein ähnliches Ergebnis über die ($\ast$)-Verbandshalbgruppen nicht beweisen.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach dem Beweis des Satzes 2.3 gilt $k = ka^2 k$, woraus wegen (i)

$$k = ka \cdot ak \leqq ak \cdot ka$$

folgt. Dies impliziert wegen $a^2 = a \cap a = a$

$$k = ka \cdot kak \cdot ak \leqq ka \cdot ak^2 a \cdot ak = kak \cdot kak = k^2$$

d. h. $k = k^2$ gilt.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es sei r ein Rechtsabsorbent, l ein Linksabsorbent von a. Da $r \cap l$ ein Quasiabsorbent von a ist, gilt nach (ii)

$$r \cap l = (r \cap l)^2 \leqq rl \cap lr ,$$

woraus wegen $rl \leqq r \cap l$ die Behauptung (i) folgt.

Bemerkung. Ein ähnliches Ergebnis wurde in Satz 2 von L. Kovács [6] über Ringe bewiesen.[5]

Satz 4.6. *Ist das Element e ($\in V$) vollständig quasi-zerlegbar und ist jeder Quasiabsorbent von e idempotent, so besitzt V kein von Null verschiedenes nilpotentes Element. Jeder Absorbent c von e hat eine direkte Zerlegung*

$$c = \bigcup_{\mu} a_\mu , \tag{4.17}$$

wo a_μ eindeutige bestimmte, einfache, paarweise annullierende, nullteilerfreie Absorbenten von e sind.

Weiterhin ist jeder Quasiabsorbent von a_μ idempotent und a_μ hat eine Zerlegung

$$a_\mu = \bigcup_{\alpha} k_{\mu\alpha} ,$$

wo $k_{\mu\alpha}$ Divisionselemente sind.

Beweis. Es sei x ($\neq 0$) ein Element von V mit

$$x^n = 0 , \quad x^{n-1} \neq 0 \qquad (n \geqq 2).$$

Dies impliziert nach Lemma 4.5 und Eigenschaft (1)

$$0 \neq x^{n-1} \leqq (x \cup xe) \cap (x^{n-1} \cup ex^{n-1}) = (x \cup xe)(x^{n-1} \cup ex^{n-1}) \leqq$$
$$\leqq (x^{n-1} \cup ex^{n-1})(x \cup xe) = x^n \cup ex^n \cup x^n e \cup ex^n e = 0 ,$$

was unmöglich ist. Nach Lemma 4.5 ist e regulär, so ist die direkte Zerlegung (4.17) nach Satz 4.2 richtig.

Ist l ein Linksabsorbent, r ein Rechtsabsorbent von a_μ, so ist

$$0 \neq rl \leqq lr \tag{4.18}$$

wegen Lemma 4.5 und Korollar 4.1 gültig. Nach Satz 2.7 bedeutet (4.18), dass a_μ in der Tat nullteilerfrei ist.

[5] Es ist eine offene Frage, wie sich die anderen Charakterisierungen im erwähnten Satz von L. Kovács für ($\ast$)-Verbandshalbgruppen übertragen lassen.

Jetzt zeigen wir, dass jeder Quasiabsorbent k von a_μ ein Quasiabsorbent von e ist. Wegen Lemma 4.5 gilt

$$ke \cap ek = (ke \cap ek)^3 \leqq (ke \cap ek)\, a_\mu\, (ke \cap ek) =$$
$$= keek\, a_\mu\, keek \leqq ka_\mu k \leqq k\,,$$

was zu beweisen war.

Endlich ist a_μ vollständig quasi-zerlegbar und die minimalen Quasiabsorbenten von a_μ sind Divisionselemente. Damit ist der Beweis beendet.

(Eingegangen: 25. Februar 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] CALAIS, J.: »Demi-groupes quasi-inversifs.« *Comptes Rendus de l'Acad. Sci.* **252** (1961), 257—259.

[2] CLIFFORD, A. H.—PRESTON, G. B.: *The algebraic theory of semigroups.* I. *Amer. Math. Soc.*, 1961.

[3] FUCHS, L.: *Partially ordered algebraic systems.* Oxford—London—New York—Paris, 1963.

[4] ISÉKI, K.: »A characterisation of regular semi-group«, *Proc. Japan Acad.* **32** (1956), 676—677.

[5] KERTÉSZ, A.—STEINFELD, O.: »A féligegyszerű gyűrűk jellemzéséről.« *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **9** (1959) 301—314.

[6] KOVÁCS, L.: »A note on regular rings«, *Publ. Math.* (Debrecen) **4** (1956), 465—468.

[7] LAJOS, S.: »A félcsoportok ideálelméletéhez.« *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **11** (1961), 57—66.

[8] McCOY, N. H.: »Prime ideals in general rings«. *Amer. J. Math.* **71** (1949) 823—833.

[9] STEINFELD, O.: »Remark on a paper of N. H. McCOY.« *Publ. Math.* (Debrecen) **3** (1953) 171—173.

[10] STEINFELD, O.: »Über die Quasiideale von Halbgruppen.« *Publ. Math.* (Debrecen) **4** (1956) 262—275.

[11] STEINFELD, O.: »Über die Quasiideale von Ringen.« *Acta Sci. Math.* **17** (1956) 170—180.

[12] STEINFELD, O.: »Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern.« *Acta Sci. Math.* **18** (1957) 235—242.

[13] STEINFELD, O.: »Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen.« *Acta Sci. Math.* **22** (1961) 136—149.

[14] SZÁSZ, F.: »A főjobbideálokra nézve minimumfeltételű gyűrűk.« *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 135—177.

[15] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra II.* Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УСЛОВНО ДИСТРИБУТИВНЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП

O. STEINFELD

Резюме

Определенная в настоящей работе (∗)-структура-полугруппа является частично упорядоченной полугруппой и полной структурой, удовлетворяющей некоторому условному закону дистрибутивности. Например, все подкольца ассоциативного кольца образуют (∗)-структуру-полугруппу.

Для некоторых (*)-структур-полугрупп доказываются теоремы разложения, аналогичные теоремам о строении полупростых колец и вполне простых (completely simple) полугрупп.

При доказательстве теорем разложения используются результаты, являющиеся обобщениями некоторых теорем относящихся к односторонним идеалам и квазиидеалам колец и полугрупп.

ON THE THEORY OF RELATIONS

by

A. MÁTÉ[1]

Let E be a given set and suppose that to every element x of E there corresponds a subset $S(x)$ of E such that $x \notin S(x)$. For every subset M of E let

$$S(M) = \bigcup_{x \in M} S(x) .$$

A subset M of E is called independent, if

$$M \cap S(M) = \emptyset .$$

Let E be a separable topological space of the second category without isolated points. For any $x \in E$, let $S(x)$ be nowhere dense in E. P. ERDŐS has proved that there exists an independent set of power $\aleph_0$. It is not known the existence of an independent set of power $\aleph_1$.

We shall prove the following theorem which is a generalization of the theorem of P. ERDŐS.

Theorem. *Let E be a separable topological space of the second category without isolated points. Suppose that the elements of E are arranged in a given wellordering. If for every $x \in E$ the set $S(x)$ is nowhere dense in E, then there exists for every $\alpha < \omega_1$ an independent subset of the type α of E in the given wellordering.*

Proof. Let H be a subset of the second category of E and let $\eta(H) \neq \emptyset$ be a subset of H with the following property (T): For any open subset K of E satisfying $\eta(H) \cap K \neq \emptyset$ the set $\eta(H) \cap K$ is of the second category. It is known that there exists such a subset $\eta(H)$ of H. Thus we have associated to every subset H of the second category of E a non-empty subset of H with the property (T). If the set H has the property (T), then we put $\eta(H) = H$. It is clear that a subset M of $\eta(H)$ is nowhere dense or of the first category in $\eta(H)$ if and only if M is nowhere dense or of the first category in E.

Consider now the ordinal numbers of the subsets of the second category of E with respect to the given wellordering of E. Let φ be the smallest such ordinal number. It is clear that φ is not confinal to an ordinal number which is smaller than ω_1. Let B be a subset of the second category of the type φ of E and $A = \eta(B)$. It is obvious that A has the type φ.

[1] Szeged.

For each subset M of A let $W(M)$ denote the set of all elements of A which are not exceeding all the elements of M in the given wellordering of E [thus $M \subseteqq W(M)$]. It is obvious that $W(M)$ is of the first category if and only if M is not confinal to A. For example if M is a countable set, then $W(M)$ is of the first category.

Suppose now that in every set $K \subseteqq A$ of the second category there is an independent set of the type α, where $\alpha < \xi < \omega_1$. We prove that there exists in every set $P \subseteqq A$ of the second category an independent set of the type ξ. Put $Q = \eta(P)$.

We consider two cases

a) ξ is an ordinal number of the first kind, i.e. $\xi = \alpha + 1$,

b) ξ is an ordinal number of the second kind.

Ad a Let $\{Q_\vartheta\}_{\vartheta<\omega}$ be a countable base of Q. Then there exists in every Q_ϑ an independent set H_ϑ of the type α. Put $H = \bigcup\limits_{\vartheta<\omega} H_\vartheta$. It is obvious that H is a countable set and $H \subset A$ holds, thus $W(H)$ and $S(H)$ are of the first category; i.e. the set $Q^1 = Q - (W(H) \cup S(H))$ is not empty. Let $t \in Q^1$. As $S(t)$ is nowhere dense, there exists an ordinal number $\vartheta < \omega$, such that $S(t) \cap \cap Q_\vartheta = \emptyset$. It is easy to verify that $H_\vartheta \cup \{t\}$ is an independent set with the type $\alpha + 1 = \xi$.

Ad b In this case put $\xi = \sum\limits_{\lambda<\omega} \xi_\lambda$, where $\xi_\lambda < \xi$ for every $\lambda < \omega$. First prove the following

Lemma. *Let $\{Q^0_\vartheta\}_{\vartheta<\omega}$ be a countable base of $Q = Q^0$ and assume that there exists in every Q^0_ϑ an independent set H^0_ϑ of the type ξ_0. Then there exists a set Q^1 of the second category and an ordinal number $\tau_0 < \omega$, such that $\eta(Q^1) = = Q^1 \subseteqq Q^0$, and $W(H^0_{\tau_0}) \cap Q^1 = H^0_{\tau_0} \cap S(Q^1) = S(H^0_{\tau_0}) \cap Q^1 = \emptyset$.*

Proof. Since H^0_ϑ is a countable set and $H^0_\vartheta \subset A$ holds, the sets $W(H^0_\vartheta)$ and $S(H^0_\vartheta)$ are of the first category; hence the set $F^0 = \bigcup\limits_{\vartheta<\omega} \left(W(H^0_\vartheta) \cup S(H^0_\vartheta)\right)$ is also of the first category. Thus the set $M^1 = Q^0 - F^0$ is of the second category. For every $\vartheta < \omega$ let

$$R_\vartheta = \{x \in M^1 : S(x) \cap Q^0_\vartheta = \emptyset\}\,.$$

Since the set $S(x)$ is nowhere dense for every $x \in E$, we get that $M^1 = \bigcup\limits_{\vartheta<\omega} R_\vartheta$. Thus there exists an ordinal number $\vartheta_0 < \omega$, such that R_{ϑ_0} is of the second category. Let $\tau_0 = \vartheta_0$ and $\eta(R_{\vartheta_0}) = Q^1$. It is easy to see that the sets $H^0_{\tau_0}$ and Q^1 satisfy the requirements of the lemma.

If we start with Q^1 instead of Q^0, then we get by the application of the lemma the set Q^2, the ordinal number τ_1 and the set $H^1_{\tau_1}$ with the corresponding properties ..., etc. Repeat this ad infinitum we get successively the sets $Q^0, Q^1, \ldots, Q^\lambda, \ldots$; the ordinal numbers $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_\lambda, \ldots$ and the sets $H^0_{\tau_0}, H^1_{\tau_1}, \ldots, H^\lambda_{\tau_\lambda} \ldots (\lambda < \omega)$, such that for every $\lambda < \omega$ the set Q^λ is of the second category, $Q^{\lambda-1} \supseteqq Q^\lambda$, $\eta(Q^\lambda) = Q^\lambda$ further $H^\lambda_{\tau_\lambda}$ is an independent set of the type ξ_λ with the properties $(\lambda < \gamma < \omega)$:

(1) $W(H^\lambda_{\tau_\lambda}) \cap H^\gamma_{\tau_\gamma} = \emptyset$

(2) $H^\lambda_{\tau_\lambda} \cap S(H^\gamma_{\tau_\gamma}) = \emptyset$

(3) $S(H^\lambda_{\tau_\lambda}) \cap H^\gamma_{\tau_\gamma} = \emptyset$.

Put $H = \bigcup\limits_{\lambda<\omega} H^\lambda_{\tau_\lambda}$. It is easy to verify that the set H is an independent set of the type $\xi = \sum\limits_{\lambda<\omega} \xi_\lambda$.

REFERENCE

Erdős, P.: "Some remarks on set theory III." *Michigan Math. Journ.* **2** (1953) 51—57.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ОТНОШЕНИЙ

A. MÁTÉ

Резюме

Пусть E — топологическое пространство второй категории, не содержащее изолированные точки. Каждому $x \in E$ поставим в соответствие некоторое множество $(x \notin) S(x) \subseteqq E$, нигде не плотное в E. Пусть M — любое подмножество E и положим

$$S(M) = \bigcup_{x \in M} S(x).$$

Множество M называется независимым, если $M \cap S(M) = \emptyset$. По одной теореме P. Erdős-а существует независимое счетное множество. Автор доказывает, что

если дана некоторая вполне-упорядоченость множества E, то каждому порядковому числу $\alpha < \omega_1$ существует независимое множество, порядковый тип которого в вполне-упорядоченности E есть α.

Вопрос о том, что существует—ли независимое несчетное множество, пока не решен.

ON SOME COMBINATORIAL RELATIONS CONCERNING THE SYMMETRIC RANDOM WALK

by

KANWAR SEN[1]

Introduction

In one-dimensional symmetric random walk it is interesting to note how often the particle intersects a given line and also how often it remains above it. I. VINCZE and E. CSÁKI [3] have determined in connection with a statistical problem regarding the GALTON-test the distribution of the number of intersections and also the joint distribution of the number of intersections and of the positive steps in the case the particle returns at the end to the origin. In another paper E. CSÁKI [4] has given the distribution of the number of intersections without assuming to which point the particle returns at the end. In the following paper, I should like to determine the above distributions when the particle reaches at the end some fixed point other than the origin.

This problem may be interpreted as: Two players A and B play a coin tossing game in which player A wins or loses a unit amount according to whether the result of the coin tossing is "head" or "tail". Assuming that at the end of the game A leads over B by certain fixed units, we are interested in investigating how often one overtakes the other and also how often A has been leading over B.

In this paper, we shall consider the sequences $\vartheta \equiv (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{2n})$ of $n+k$ $(+1)$'s and $n-k$ (-1)'s, each possible array has the same probability $\binom{2n}{n-k}^{-1} = \binom{2n}{n+k}^{-1}$. The partial sum of ϑ_i's is denoted by s_i, i.e.,

$$s_i = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_i\,, \; (i = 1, 2, \ldots, 2\,n)\,, \; s_0 = 0 \text{ and } s_{2n} = 2\,k\,.$$

We shall call the array $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2i}, \ldots, s_{2n}\}$ the path of the particle. Thus each array $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{2i}, \ldots, \vartheta_{2n})$ corresponds to a random path of the particle starting at the origin and reaching after $2\,n$ steps the point $(2\,n, 2\,k)$ $(0 < k \leqq n)$. Each path has the same probability. If the points (i, s_i) are represented in a plane and each of them is connected with the next one, then we obtain a figure illustrating the path of the particle. In the following, we shall consider the distributions of λ (number of intersections) and γ (number of positive steps).

---

[1] Dept. of Mathematics and Statistics, University of Delhi (India). This work was done while the author attended the course on probability theory, mathematical statistics and their applications held at the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest in 1963—64, sponsored by the UNESCO.

Notations:

$E_{2n,2k}$: a path $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2i}, \ldots, s_{2n}\}$ with $s_{2n} = 2k$, $0 < k \leq n$, $E_{2n,0} = E_{2n}$. A point $(2i, s_{2i})$ of the path $E_{2n,2k}$ for which $s_{2i} = 0$ and $s_{2i-1} \cdot s_{2i+1} = -1$ is called the intersection point or T-point.

$T^{(r)}$-point: a point $(2i, s_{2i})$ of the path $E_{2n,2k}$ for which either $(s_{2i-1} = r-1,\ s_{2i} = r,\ s_{2i+1} = r+1)$ or $(s_{2i-1} = r+1,\ s_{2i} = r,\ s_{2i+1} = r-1)$ holds. This is called the intersection point in the height r, $T^{(0)} = T$.

$\lambda_{2n}^{(r)}$: number of $T^{(r)}$-points of the path $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2n}\}$, $\lambda_{2n}^{(0)} = \lambda_{2n}$.

$E_{2n,2k}^{l}$: an $E_{2n,2k}$-path with exactly l T-points; $E_{2n,0}^{l} = E_{2n}^{l}$.

$E_{2n,2k,r}^{l}$: an $E_{2n,2k}$-path with exactly l $T^{(r)}$-points; $E_{2n,2k,0}^{l} = E_{2n,2k}^{l}$.

$F_{2n,r}^{l}$: a path $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2n}\}$ with exactly l $T^{(r)}$-points and without assuming where it terminates; $F_{2n,0}^{l} = F_{2n}^{l}$, F_{2n}: a path $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2n}\}$ without knowing where it terminates.

$E_{2n,2k,r}^{(2g,l)}$: an $E_{2n,2k,r}^{l}$-path with $2g$ steps above the height r; $E_{2n,2k,0}^{(2g,l)} = E_{2n,2k}^{(2g,l)}$, $E_{2n,0,0}^{(2g,l)} = E_{2n}^{(2g,l)}$, $E_{2n,2k,0}^{(2g,0)} = E_{2n,2k}^{(2g)}$: an $E_{2n,2k}$-path with $2g$ steps above the axis.

$F_{2n,r}^{(2g,l)}$: an $F_{2n,r}^{l}$-path with $2g$ steps above the height r; $F_{2n,0}^{(2g,l)} = F_{2n}^{(2g,l)}$.

$E_{2n,2k,r}^{(2g)}$: an $E_{2n,2k}$-path with $2g$ steps above the height r.

$F_{2n,r}^{(2g)}$: a path $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2n}\}$ with $2g$ steps above the height r and without assuming where it terminates; $F_{2n,0}^{(2g)} = F_{2n}^{(2g)}$.

$2\gamma_{2n}^{(r)}$: number of steps of the path $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2n}\}$ above the height r, $2\gamma_{2n}^{(0)} = 2\gamma_{2n}$.

H_m^q: a path $\{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$ starting at the origin and reaching for the first time the height q at the m-th step.

$E_{x,y}^{+}$: a path $\{s_0, s_1, \ldots, s_x\}$ from $(0, 0)$ to (x, y) such that $s_0 = 0$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0, \ldots, s_x > 0$ $(s_x = y,\ y > 0)$.

$N(\cdot)$: number of all possible paths whose type is given in the brackets $\left(\text{e.g. } N(E_{2n,2k}) = \binom{2n}{n-k} = \binom{2n}{n+k}\right)$.

§ 1. The number of intersections

We shall give two proofs for the following

Theorem 1.1.

$$N(E_{2n,2k}^{l}) = \frac{2k+2l+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n-k-l}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, n-k, \tag{1}$$

and $0 < k \leq n$.

First proof. Let $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2i}, \ldots, s_{2n}\}$ be a path of $N(E_{2n,2k}^{l})$ with $(2i, 0)$ the last or the l-th T-point (see fig. 1). It means that the section

$\{s_{2i}, s_{2i+1}, \ldots, s_{2n}\}$ of the path is such that it does not cross the axis. Thus the total number of such paths is given by (FELLER [1] p. 71 and [3])

$$N(E^l_{2n,2k}) = N(E^l_{2n,2k} \mid s_1 = +1 \text{ or } -1) =$$
$$= \sum_{i=l}^{n-k} \frac{1}{2} N(E^{l-1}_{2i}) \cdot N(E^+_{2n-2i+1,2k+1}) =$$
$$= \sum_{i=l}^{n-k} \frac{l}{i} \binom{2i}{i-l} \cdot \frac{2k+1}{2n-2i+1} \binom{2n-2i+1}{n-i+k+1}$$

($s_1 = +1$ or -1 according to l even or odd; $l = 0, 1, \ldots, n-k$.)

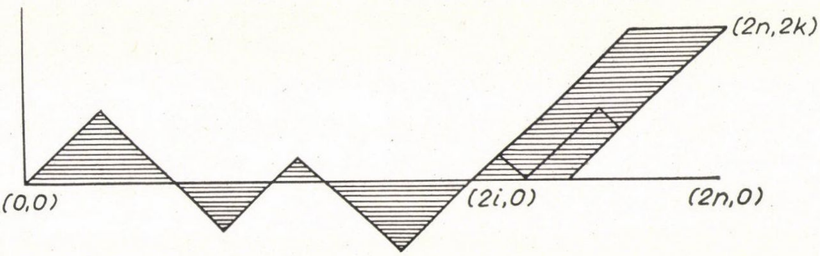


Fig. 1.

If we denote the generating function of the $N(E^l_{2n,2k})$'s by $F_l(v)$, it can be shown that

(2)
$$F_l(v) = \sum_{n-k-l=0}^{\infty} N(E^l_{2n,2k})\, v^{n-l-k} = \sum_{n-k-l=0}^{\infty} \frac{2k+2l+1}{n+k+l+1} \binom{2n}{n-k-l} v^{n-k-}$$

which proves the theorem 1.1.

Second proof. There holds the following

Lemma 1.1.

(3)
$$N(E^l_{2n,2k}) = N(H^{2k+2l+1}_{2n+1}) .$$

For the known relation (see FELLER [1] p. 71)

$$N(H^{2k+2l+1}_{2n+1}) = \frac{2k+2l+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-k-l}$$

the proof of the lemma gives us the proof of the theorem 1.1.

To prove the lemma, we have to establish a one-to-one correspondence between the two types of paths $E^l_{2n,2k}$ and $H^{2k+2l+1}_{2n+1}$ which can be set up in the following way:

Let us consider the path $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2i}, \ldots, s_{2n}\}$ (see fig. 1). According to a proof given in [3] the section $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2i}\}$ corresponds to a path starting at the origin and reaching after $2i$ steps for the first time the height $2l$. Concerning the section between $(2i, 0)$ and $(2n, 2k)$, let us first alter the signs and then the direction, i.e. we replace $\vartheta_{2i}, \vartheta_{2i+1}, \ldots, \vartheta_{2n}$ by $-\vartheta_{2n}, -\vartheta_{2n-1}, \ldots, -\vartheta_{2i}$ and let us attach this transformed section to the end of the previous one (fig. 2).

Finally, let us now insert after ϑ_{2n} a $(+1)$. Thus we obtain a $H^{2k+2l+1}_{2n+1}$-path. By reversing this procedure it may be seen that this transformation is a one-to-one. Then our theorem 1.1 gives immediately the following

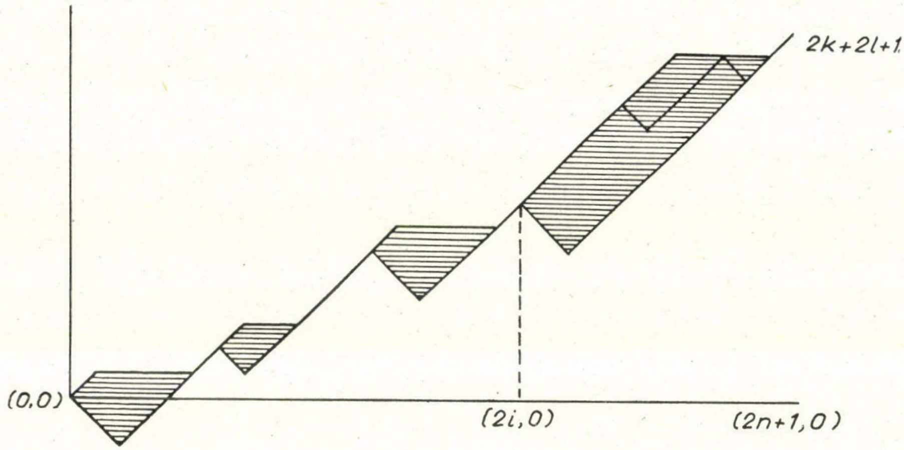


Fig. 2.

Theorem 1.1′.

$$P(\lambda_{2n} = l \mid E_{2n,2k}) = \frac{2k+2l+1}{2n+1} \cdot \frac{\binom{2n+1}{n-k-l}}{\binom{2n}{n-k}}, \; l = 0, 1, \ldots, n-k,$$

(4) or

$$P(\lambda_{2n} < l \mid E_{2n,2k}) = 1 - \frac{\binom{2n}{n-k-l}}{\binom{2n}{n-k}}.$$

We can easily see that

$$E(\lambda_{2n} \mid E_{2n,2k}) = \frac{1}{\binom{2n}{n-k}} \sum_{r=0}^{n-k-1} \binom{2n}{r} = M,$$

(5) and

$$D^2(\lambda_{2n} \mid E_{2n,2k}) = [2(n-k) - M - 1]M - \frac{2}{\binom{2n}{n-k}} \sum_{r=1}^{n-k-1} r\binom{2n}{r}.$$

For the limiting distribution we have: for $k \sim a\sqrt{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} P(\lambda_{2n} < y\sqrt{2n} \mid E_{2n,2k}) = 1 - e^{-2(a^2+y^2)}, \; a \geqq 0, \; y \geqq 0,$$

$k = 0$ or $a = 0$ gives the result proved in [3].

Theorem 1.2.

(6) $$N(E^l_{2n+1,\,2k+1}) = \frac{2k+2l+2}{2n+2}\binom{2n+2}{n+k+l+2},\quad l = 0, 1, \ldots, n-k.$$

The proof of this theorem is similar to that of theorem 1.1 and it can easily be seen that the results corresponding to those given in theorem 1.1′ are the following

$$P(\lambda_{2n+1} = l \mid E_{2n+1,2k+1}) = \frac{2k+2l+2}{2n+2}\cdot\frac{\binom{2n+2}{n+k+l+2}}{\binom{2n+1}{n-k}};$$

(7) or

$$P(\lambda_{2n+1} < l \mid E_{2n+1,\,2k+1}) = 1 - \frac{\binom{2n+1}{n-k-l}}{\binom{2n+1}{n-k}}.$$

Also

$$E(\lambda_{2n+1} \mid E_{2n+1,2k+1}) = \frac{1}{\binom{2n+1}{n-k}}\sum_{r=0}^{n-k-1}\binom{2n+1}{r} = M_1\,,$$

and

$$D^2(\lambda_{2n+1} \mid E_{2n+1,2k+1}) = [2(n-k) - M_1 - 1] - \frac{2}{\binom{2n+1}{n-k}}\sum_{r=1}^{n-k-1} r\binom{2n+1}{r}.$$

For $k \sim a\sqrt{2n}$ we obtain the limiting distribution as in theorem 1.1′.

I should like to mention that by writing $|k|$ instead of k the above formulae are valid in the case of negative k as well.

When the condition that the particle reaches the point $(2n, 2k)$ at the $2n$-th step is disregarded, the number of paths with exactly l intersections on the axis is given by

$$N(F^l_{2n}) = 2\sum_{k=1}^{n} N(E^l_{2n,2k}) + N(E^l_{2n}) =$$

(8) $$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+2l+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n-k-l} + \frac{2(l+1)}{n}\binom{2n}{n-l-1} =$$

$$= 4\binom{2n-1}{n+l},\quad l = 0, 1, \ldots, n-1.$$

which is the same obtained in [4].

§ 2. Distribution of the number of intersections in the height r

Theorem 2.1. *For* $r < 2k$

$$P(\lambda_{2n}^{(r)} = l \mid E_{2n,2k}) = \frac{1}{\binom{2n}{n-k}} N(E_{2n,2k,r}^{l}) = \tag{9}$$

$$= \frac{k+l}{n+1} \cdot \frac{\binom{2n+2}{n-k-l+1}}{\binom{2n}{n-k}}, \quad \begin{array}{l} l = 1, 3, \ldots, n-k, \text{ if } n-k \text{ is odd,} \\ l = 1, 3, \ldots, n-k+1, \text{ if } n-k \text{ is even,} \\ r = 1, 2, \ldots, 2k-1. \end{array}$$

The proof of this theorem is trivial which follows from Lemma 1.1 by establishing the one-to-one correspondence between the two types of paths $E_{2n,2k,r}^{l}$ and H_{2n+2}^{2k+2l}. It is interesting to note that this result is independent of r.

For the limiting distribution we obtain: for $k \sim a\sqrt{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(y \leqq \frac{\lambda_{2n}^{(r)}}{\sqrt{2n}} < y + dy \mid E_{2n,2k}\right) = 4(y+a)e^{2a^2-2(a+y)^2} dy\,, \quad a, y \geqq 0 \tag{10}$$

which is equal to the result obtained in theorem 2.1′ in [3] $k = 0$ or $a = 0$ gives the result (6) given in [3].

Theorem 2.2. *For* $r = 2k$

$$P(\lambda_{2n}^{(2k)} = l \mid E_{2n,2k}) = \frac{1}{\binom{2n}{n-k}} N(E_{2n,2k,2k}^{l}) =$$

$$= \frac{2k+2l+1}{2n+1} \cdot \frac{\binom{2n+1}{n-k-l}}{\binom{2n}{n-k}}, \quad l = 0, 1, \ldots, n-k\,. \tag{11}$$

The proof is trivial and follows from lemma 1.1 by showing a one-to-one correspondence between the paths $E_{2n,2k,2k}^{l}$ and $H_{2n+1}^{2k+2l+1}$.

For the limiting distribution

$$\lim_{n\to\infty} P\left(y \leqq \frac{\lambda_{2n}^{(2k)}}{\sqrt{2n}} < y + dy \mid E_{2n,2k}\right) = 4(y+a)\, e^{2a^2-2(y+a)^2}\, dy\,, \tag{12}$$

holds for $k \sim a\sqrt{2n}$, $a, y \geqq 0$, which is equal to the result obtained in (10).

Theorem 2.3. *For* $r > 2k$

$$P(\lambda_{2n}^{(r)} = l \mid E_{2n,2k}) = \frac{1}{\binom{2n}{n-k}} N(E_{2n,2k,r}^{l}) = \tag{13}$$

$$= \frac{l+r-k}{n+1} \cdot \frac{\binom{2n+2}{n-l-r+k+1}}{\binom{2n}{n-k}}, \quad \begin{array}{l} r = 2k+1, 2k+2, \ldots, \\ l = 0, 2, 4, \ldots, n+k-r, \textit{ if } n+k-r \\ \quad \textit{is even or} \\ l = 0, 2, 4, \ldots, n+k-r+1, \textit{ if} \\ \quad n+k-r \textit{ is odd.} \end{array}$$

For $k = 0$, we get the result obtained in theorem 2.1′ [3] for l intersections in the height r.

The proof is similar to that of theorems 2.1 and 2.2 and can be given by establishing the one-to-one correspondence between the paths $E_{2n,2k,r}^{l}$ and $H_{2n+2}^{2l+2r-2k}$.

For the limiting distribution we obtain: for $k \sim a\sqrt{2n}$, and $r \sim b\sqrt{2n}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(y \leqq \frac{\lambda_{2n}^{(r)}}{\sqrt{2n}} < y + dy \mid E_{2n,2k}\right) = 4(y+b-a)\, e^{2a^2-2(y+b-a)^2} dy, \quad a, b, y \geqq 0\,. \tag{14}$$

It is clear from (6), (9) and (13) that there is a one-to-one correspondence between the paths $E_{2n+1,2k+1}^{l-1}$, $E_{2n,2k,r}^{l}$ and $E_{2n,0,r}^{l}$.

When the condition that the particle reaches the point $(2n, 2k)$ at the $2n$-th step is disregarded, the number of paths with exactly l $T^{(r)}$-points is given as below according to r is even or odd:

For a fixed positive even integer r

$$N(F_{2n,r}^{l}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\frac{r}{2}+1}^{n} N(E_{2n,2k,r}^{l}) + N(E_{2n,2k,2k}^{l}), & l \text{ odd}, \\ \displaystyle\sum_{k=-n}^{\frac{r}{2}-1} N(E_{2n,2k,r}^{l}) + N(E_{2n,2k,2k}^{l}), & l \text{ even}. \end{cases}$$

But it can easily be verified that

$$\sum_{k=-n}^{\frac{r}{2}-1} N(E_{2n,2k,r}^{l}) = \sum_{k=\frac{r}{2}+1}^{n} N(E_{2n,2k,r}^{l}) = \binom{2n+1}{n-l-\frac{r}{2}}.$$

Substituting the value of $N(E_{2n,2k,2k}^{l})$ from (11), we have

$$N(F_{2n,r}^{l}) = 2\binom{2n}{n+l+\frac{r}{2}}, \quad l = 1, 2, \ldots, n - \frac{r}{2}. \tag{15}$$

Similarly, when r is a fixed positive odd integer

$$N(F^l_{2n,r}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\frac{r+1}{2}}^{n} N(E^l_{2n,2k,r}), & l \text{ odd}, \\ \displaystyle\sum_{k=-n}^{\frac{r-1}{2}} N(E^l_{2n,2k,r}), & l \text{ even}. \end{cases}$$

It can easily be seen that

$$\sum_{k=\frac{r+1}{2}}^{n} N(E^l_{2n,2k,r}) = \sum_{k=-n}^{\frac{r-1}{2}} N(E^l_{2n,2k,r}) = \binom{2n+1}{n+l+\frac{r+1}{2}}$$

so, for a fixed positive odd r

$$N(F^l_{2n,r}) = \binom{2n+1}{n+l+\frac{r+1}{2}}, \quad l = 1, 2, \ldots, n - \frac{r-1}{2}. \tag{16}$$

The results in (15) and (16) lead to the following

Theorem 2.4. *For a fixed positive even r*

$$P(\lambda^{(r)}_{2n} = l \mid F^l_{2n,r}) = \frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n+l+\frac{r}{2}}, \quad l = 1, 2, \ldots, n - \frac{r}{2}, \tag{17}$$

and for the limiting distribution

$$\lim_{n\to\infty} P\left(y \leq \frac{\lambda^{(r)}_{2n}}{\sqrt{2n}} < y + dy \mid F^l_{2n,r}\right) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{(2y+a)^2}{2}} dy,$$

$$\text{for } r \sim a\sqrt{2n},\ a, y \geqq 0.$$

Theorem 2.5. *For a fixed positive odd r*

$$P(\lambda^{(r)}_{2n} = l \mid F^l_{2n,r}) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n+1}{n+l+\frac{r+1}{2}}, \quad l = 1, 2, \ldots, n - \frac{r-1}{2}, \tag{18}$$

and for $r \sim a\sqrt{2n}$ we get the same limiting distribution as in Theorem 2.4.

The results in (17) and (18) are same as obtained in [4].

§ 3. The joint distribution of the number of intersections and the number of positive steps

Theorem 3.1.

$$N(E_{2n,2k}^{(2g,l)}) = \begin{cases} \dfrac{l(2k+l+1)}{2(n-g)\left(g+k+\dfrac{l}{2}+1\right)}\dbinom{2g}{g-k-\dfrac{l}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\dfrac{l}{2}}, \\ \qquad l\ even,\quad l+2k \leqq 2g \leqq 2n-l, \\ \dfrac{(l+1)(2k+l)}{2(n-g)\left(g+k+\dfrac{l+1}{2}\right)}\dbinom{2g}{g-k-\dfrac{l-1}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\dfrac{l+1}{2}}, \\ \qquad l\ odd,\ 2k+l-1 \leqq 2g \leqq 2n-l-1. \end{cases} \tag{19}$$

Proof. Let us consider the path taken in theorem 1.1 (fig. 1) where $(2i, 0)$ is the last or the l-th intersection point. It is clear that if l is even, then the first step of the path $E_{2n,2k}^{(2g,l)}$ should be positive and if l is odd, then it should be negative. Thus, it can be seen (see [3]) that when l is even

$$N(E_{2n,2k}^{(2g,l)}) = N(E_{2n,2k}^{(2g,l)} \mid s_1 = +1) =$$

$$= \sum_{i=n-g+\frac{l}{2}}^{n-k} N(E_{2i}^{(2(g+i-n),l-1)} \mid s_1 = +1)\cdot N(E_{2n-2i+1,2k+1}^{+}) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=n-g+\frac{l}{2}}^{n-k} \frac{l^2}{(n-g)(g+i-n)}\binom{2(g+i-n)}{g+i-n-\dfrac{l}{2}}\binom{2(n-g)}{n-g-\dfrac{l}{2}}\times$$

$$\times \frac{2k+1}{2n-2i+1}\binom{2n-2i+1}{n-i+k+1}$$

which, by using the method of generating functions, gives the required result.

Similarly, when l is odd, the result follows easily. Thus the results in (19) lead to the joint distribution given in the following

Theorem 3.1′.

$$P(\gamma_{2n} = g, \lambda_{2n} = l \mid E_{2n,2k}) = \tag{20}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\dbinom{2n}{n-k}}\left[\dfrac{l(2k+l+1)}{2(n-g)\left(g+k+\dfrac{l}{2}+1\right)}\dbinom{2g}{g-k-\dfrac{l}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\dfrac{l}{2}}\right],\ l \text{ even}, \\ \dfrac{1}{\dbinom{2n}{n-k}}\left[\dfrac{(l+1)(2k+l)}{2(n-g)\left(g+k+\dfrac{l+1}{2}\right)}\dbinom{2g}{g-k-\dfrac{l-1}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\dfrac{l+1}{2}}\right],\ l \text{ odd}, \end{cases}$$

and for the limiting case we obtain: for $k \sim a\sqrt{2\,n}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(y \leqq \frac{\lambda_{2n}}{\sqrt{2\,n}} < y + dy, z \leqq \frac{\gamma_{2n}}{n} < z + dz \mid E_{2n,2k}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{y(2\,a+y)}{\{z(1-z)\}^{3/2}} e^{\left[2a^2 - \frac{(2a+y)^2}{2z} - \frac{y^2}{2(1-z)}\right]} dy\,dz\,, \quad a, y \geqq 0\,,\ 0 \leqq z \leqq 1\,.$$

$k = 0$ or $a = 0$ gives the result (11) in [3].

The joint distribution of λ_{2n+1} *and* γ_{2n+1} *is given by the following*

Theorem 3.2.

$$P(\gamma_{2n+1} = g, \lambda_{2n+1} = l \mid E_{2n+1,2k+1}) = \tag{21}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{2n+1}{n-k}} \left[\dfrac{l(2\,k+l+2)}{2(n-g)\left(g+k+\frac{l}{2}+2\right)} \binom{2\,g+1}{g-k-\frac{l}{2}} \binom{2(n-g)}{n-g-\frac{l}{2}} \right], \\ \qquad\qquad l \text{ even},\ l + 2\,k \leqq 2\,g \leqq 2\,n - l\,, \\ \dfrac{1}{\binom{2n+1}{n-k}} \left[\dfrac{(l+1)(2\,k+l+1)}{2(n-g)\left(g+k+\frac{l+1}{2}+1\right)} \binom{2\,g+1}{g-k-\frac{l-1}{2}} \binom{2(n-g)}{n-g-\frac{l+1}{2}} \right], \\ \qquad\qquad l \text{ odd},\ 2\,k + l - 1 \leqq 2\,g \leqq 2\,n - l - 1\,. \end{cases}$$

(Here the no. of positive steps is given by $2\,\gamma_{2n+1} + 1$.)

The proof of this theorem is quite simple which is similar to that of theorem 3.1.

For $k \sim a\sqrt{2n}$, we obtain the same limiting distribution as in theorem 3.1′.

§ 4. Joint distribution of $\lambda_{2n}^{(r)}$ and $\gamma_{2n}^{(r)}$

We shall prove the following

Theorem 4.1. *For* $r < 2\,k$

$$N(E_{2n,2k,r}^{(2g,l)}) = \frac{(r+l)(2\,k-r+l)}{\left(n-g+\frac{r}{2}+\frac{l+1}{2}\right)\left(g+k-\frac{r}{2}+\frac{l+1}{2}\right)} \times$$

$$\times \binom{2\,g}{g-k+\frac{r}{2}-\frac{l-1}{2}} \binom{2(n-g)}{n-g-\frac{r}{2}-\frac{l-1}{2}}, \tag{22}$$

l odd, r even,

$$l = 1, 3, \ldots, \text{ odd } (n-k,\ n-k+1)$$

$$2\,k - r + (l-1) \leqq 2\,g \leqq 2\,n - r - (l-1)\,,$$

(22) *and*

$$N(E^{(2g+1,l)}_{2n,2k,r}) = \frac{(r+l)(2k-r+l)}{2(n-g)\left(g+k-\dfrac{r-1}{2}+\dfrac{l+1}{2}\right)} \times$$

$$\times \binom{2g+1}{g-k+\dfrac{r+1}{2}-\dfrac{l-1}{2}} \binom{2(n-g)}{n-g-\dfrac{r-1}{2}-\dfrac{l+1}{2}},$$

l odd, r odd,

$$l = 1, 3, \ldots, \text{odd}\,(n-k, n-k+1)$$

$$2k - r + l - 2 \geqq 2g \geqq 2n - r - l.$$

Proof Case I: r even,

Let $\{s_0, s_1, \ldots, s_{r_1}, \ldots, s_{2n}\}$ be the path of the type $E^{(2g,l)}_{2n,2k,r}$ and let $P(r_1, r)$ be the first $T^{(r)}$-point of the path (fig. 3). Then the section between $P(r_1, r)$ and $Q(2n, 2k)$ is a path of $E^{(2g,l-1)}_{2n-r_1,2k-r}$.

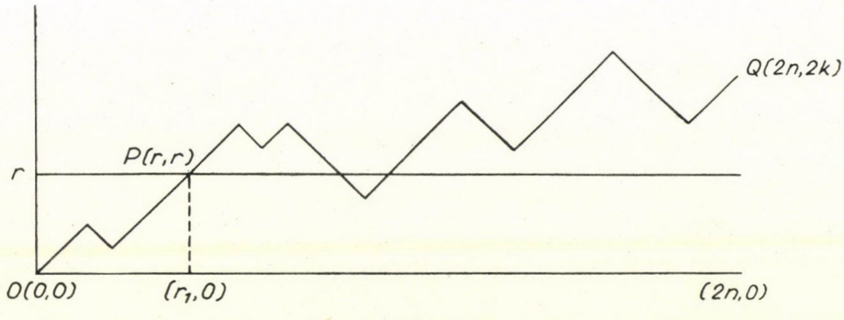


Fig. 3.

Attaching a $+1$ to the end of the section between 0 and P we obtain a path of $H^{r+1}_{r_1+1}$ type. Thus,

$$N(E^{(2g,l)}_{2n,2k,r}) = \sum_{r_1=r}^{2n-2g-(l-1)} N(H^{r+1}_{r_1+1}) \cdot N(E^{(2g,l-1)}_{2n-r_1,2k-r}) =$$

$$= \sum_{r_1=r}^{2n-2g-(l-1)} \frac{r+1}{r_1+1}\binom{r_1+1}{\dfrac{r_1-r}{2}} \frac{(l-1)(2k-r+l)}{(2n-r_1-2g)\left(g+k-\dfrac{r}{2}+\dfrac{l+1}{2}\right)} \times$$

$$\times \binom{2g}{g-k+\dfrac{r}{2}-\dfrac{l-1}{2}} \binom{2n-r_1-2g}{n-g-\dfrac{r_1}{2}-\dfrac{l-1}{2}}.$$

Using the method of generating functions we obtain the desired result. Similarly, when r is odd, the result follows easily. The only interesting point to note is that the number of steps above the height r will be odd.

Theorem 4.2. *When* $r = 2\,k$

(23) $N(E^{(2g,l)}_{2n,2k,2k}) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{l(2\,k+l+1)}{2\,g\left(n-g+k+\dfrac{l}{2}+1\right)}\dbinom{2\,g}{g-\dfrac{l}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-k-\dfrac{l}{2}}, \; l \text{ even}, \\ \qquad\qquad l \leqq 2\,g \leqq 2\,n-2\,k-l\,, \\ \dfrac{(l+1)\,(2\,k+l)}{2\,g\left(n-g+k+\dfrac{l+1}{2}\right)}\dbinom{2\,g}{g-\dfrac{l+1}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-k-\dfrac{l-1}{2}}, \; l \text{ odd}, \\ \qquad\qquad l+1 \leqq 2\,g \leqq 2\,n-2\,k-l+1\,. \end{cases}$$

Proof Case I: l even.

Let $\{s_0, s_1, \ldots, s_{r_1}, \ldots, s_{2n}\}$ be the path of the type $E^{(2g,l)}_{2n,2k,2k}$ and let $P(r_1, 2\,k)$ be the first $T^{(r)}$-point (fig. 4). Then the section between $P(r_1, 2\,k)$ and $Q(2\,n, 2\,k)$ is a path of the type $(E^{(2g,l-1)}_{2n-r_1} \mid s_1 = +1)$.

Attaching a $+1$ to the end of the section between 0 and P we obtain a path of $H^{2k+1}_{r_1+1}$.

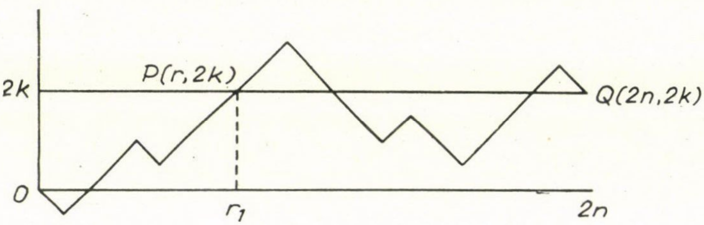


Fig. 4.

Thus

$$N(E^{(2g,l)}_{2n,2k,2k}) = \sum_{r_1=2k}^{2n-2g-l} N(H^{2k+1}_{r_1+1}) \cdot N(E^{(2g,l-1)}_{2n-r_1} \mid s_{r_1+1} = +1) =$$

$$= \frac{l}{2\,g}\binom{2\,g}{g-\dfrac{l}{2}} \sum_{r_1=2k}^{2n-2g-l} \frac{2\,k+1}{r_1+1}\binom{r_1+1}{\dfrac{r_1}{2}-k} \frac{l}{2\left(n-\dfrac{r_1}{2}-g\right)}\binom{2\,n-2\,g-r_1}{n-g-\dfrac{r_1}{2}-\dfrac{l}{2}}.$$

But by using the method of generating functions we obtain the desired result.

Similarly, it is easy to show that the desired result follows for odd l.

Theorem 4.3. *For* $r > 2\,k$

$$N(E^{(2g,l)}_{2n,2k,r}) = \frac{l(2\,r-2\,k+l)}{2\,g\left(n-g+r-k+\dfrac{l}{2}+1\right)}\binom{2\,g}{g-\dfrac{l}{2}}\binom{2\,n-2\,g+1}{n-g-r+k-\dfrac{l}{2}+1}, \tag{24}$$

l *even*,

$l = 0, 2, 4, \ldots,$ *even* $(n+k-r,\; n+k-r+1)$

$r = 2\,k+1,\; 2\,k+2, \ldots$

For $k = 0$, i.e. when the particle starting at the origin returns to the origin at the $2n$-th step

$$N(E_{2n,0,r}^{(2g,l)}) = \frac{l(2r+l)}{2g\left(n-g+r+\frac{l}{2}+1\right)}\binom{2g}{g-\frac{l}{2}}\binom{2n-2g+1}{n-g-r-\frac{l}{2}+1}, \tag{25}$$

$$l = 0, 2, 4, \ldots, \text{ even } (n-r, n-r+1)$$
$$r = 1, 2, \ldots$$

The result (25) is the simpler form of the same result obtained in (14) of [3].

Proof. To prove this theorem we shall consider the path $\{s_0, s_1, \ldots, s_{r_1}, \ldots, s_{2n}\}$ of the type $E_{2n,2k,r}^{(2g,l)}$ and let $P(r_1, r)$ be the first $T^{(r)}$-point (fig. 5). Then the section between $P(r_1, r)$ and $Q(2n, 2k)$ is an $E_{2n-r_1,r-2k}^{(2n-2g-r_1,l-1)}$-path starting in the negative direction. The first section corresponds to an $H_{r_1+1}^{r+1}$-path.

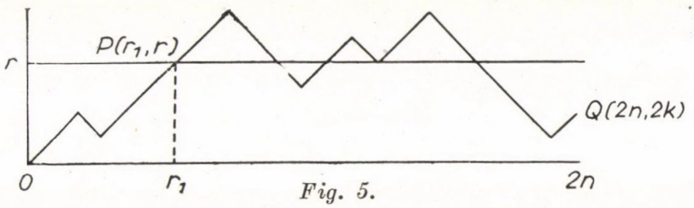


Fig. 5.

Thus

$$N(E_{2n,2k,r}^{(2g,l)}) = \sum_{r_1=r}^{2n-2g+2k-r-l+2} N(H_{r_1+1}^{r+1}) \cdot N(E_{2n-r_1,r-2k}^{(2n-2g-r_1,l-1)} \mid s_1 = -1) =$$

$$= \frac{l}{2g}\binom{2g}{g-\frac{l}{2}} \sum_{r_1=r}^{2n-2g+2k-r-l+2} \frac{r+1}{r_1+1}\binom{r_1+1}{\frac{r_1-r}{2}} \times$$

$$\times \frac{(r-2k+l-1)}{n-g-k-\frac{r_1}{2}+\frac{r}{2}+\frac{l}{2}}\binom{2n-2g-r_1}{n-g-\frac{r_1}{2}+k-\frac{r}{2}-\frac{l}{2}+1}.$$

By using the method of generating functions we obtain the desired result.

Theorems 4.1, 4.2 and 4.3 lead to the following

Theorem 4.1′. *$r < 2k$, l odd*

$P(\gamma_{2n}^{(r)} = g, \lambda_{2n}^{(r)} = l \mid E_{2n,2k}) =$

$$(26)\quad = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{2n}{n-k}}\left[\dfrac{(r+l)(2k-r+l)}{\left(n-g+\frac{r}{2}+\frac{l+1}{2}\right)\left(g+k-\frac{r}{2}+\frac{l+1}{2}\right)}\binom{2g}{g-k+\frac{r}{2}-\frac{l-1}{2}}\times\right. \\ \qquad\left.\times\binom{2(n-g)}{n-g-\frac{r}{2}-\frac{l-1}{2}}\right], & r \text{ even}, \\ \dfrac{1}{\binom{2n}{n-k}}\left[\dfrac{(r+l)(2k-r+l)}{2(n-g)\left(g+k-\frac{r-1}{2}+\frac{l+1}{2}\right)}\binom{2g+1}{g-k+\frac{r+1}{2}-\frac{l-1}{2}}\times\right. \\ \qquad\left.\times\binom{2(n-g)}{n-g-\frac{r-1}{2}-\frac{l+1}{2}}\right], & r \text{ odd}. \end{cases}$$

For the limiting distribution we obtain: for $k \sim a\sqrt{2n}$, $r \sim b\sqrt{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(y \leq \frac{\lambda_{2n}^{(r)}}{\sqrt{2n}} < y + dy\,,\ z \leq \frac{\gamma_{2n}^{(r)}}{n} < z + dz \mid E_{2n,2k}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{(2a - b + y)(b + y)}{\{z(1-z)\}^{3/2}}\, e^{\left[2a^2 - \frac{(2a-b+y)^2}{2z} - \frac{(b+y)^2}{2(1-z)}\right]}\, dy\, dz,$$

$$a, b, y \geqq 0,\ 0 \leqq z \leqq 1.$$

$r = 0$ or $b = 0$ gives the result obtained in theorem 3.1′.

Theorem 4.2′. $r = 2k$

$$P(\gamma_{2n}^{(r)} = g,\ \lambda_{2n}^{(r)} = l \mid E_{2n,2k}) =$$

(27)
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{2n}{n-k}}\left[\dfrac{l(2k+l+1)}{2g\left(n-g+k+\frac{l}{2}+1\right)}\dbinom{2g}{g-\frac{l}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-k-\frac{l}{2}}\right], & l \text{ even}, \\[2ex] \dfrac{1}{\binom{2n}{n-k}}\left[\dfrac{(l+1)(2k+l)}{2g\left(n-g+k+\frac{l+1}{2}\right)}\dbinom{2g}{g-\frac{l+1}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-k-\frac{l-1}{2}}\right], & l \text{ odd}. \end{cases}$$

For $k \sim a\sqrt{2n}$ *we obtain the same limiting form as obtained in theorem* 3.1′.

Theorem 4.3′. *For* $r > 2k$, l *even*

(28)
$$P(\gamma_{2n}^{(r)} = g,\ \lambda_{2n}^{(r)} = l \mid E_{2n,2k}) =$$

$$= \frac{1}{\binom{2n}{n-k}}\left[\frac{l(2r-2k+l)}{2g\left(n-g+r-k+\frac{l}{2}+1\right)}\binom{2g}{g-\frac{l}{2}}\binom{2n-2g+1}{n-g-r+k-\frac{l}{2}+1}\right],$$

and for the limiting joint distribution we obtain: for $k \sim a\sqrt{2n}$, $r \sim b\sqrt{2n}$

(29)
$$P\left(y \leq \frac{\lambda_{2n}^{(r)}}{\sqrt{2n}} < y + dy,\ z \leq \frac{\gamma_{2n}^{(r)}}{n} < z + dz \mid E_{2n,2k}\right) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{y(2b - 2a + y)}{\{z(1-z)\}^{3/2}}\, e^{\left[2a^2 - \frac{y^2}{2z} - \frac{(2b-2a+y)^2}{2(1-z)}\right]}\, dy\, dz,$$

$$a, b, y \geqq 0\,,\ 0 \leqq z \leqq 1\,,$$

$k = 0$ or $a = 0$ gives the result as obtained in theorem 2.2′ [3]. It may be mentioned that the limiting joint distributions of $(\lambda_{2n}, \gamma_{2n} \mid E_{2n,2k})$, $(\lambda_{2n}^{(2k)}, \gamma_{2n}^{(2k)} \mid E_{2n,2k})$, and $(\lambda_{2n}^{(r)}, \gamma_{2n}^{(r)} \mid E_{2n})$ are the same as seen in theorem 3.1′ and (29).

§ 5. Joint Distribution of λ_{2n} and γ_{2n} for an F_{2n}-path

We shall prove the following

Theorem 5.1.

$$N(F_{2n}^{(2g,l)}) = \begin{cases} \left[\dfrac{l(2g+l+2)}{4g(n-g)}\dbinom{2g}{g-\frac{l}{2}-1}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\frac{l}{2}}+\right. \\ \left. \qquad +\dfrac{l(2n-2g+l+2)}{4g(n-g)}\dbinom{2g}{g-\frac{l}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\frac{l}{2}-1}\right], \\ \qquad l \text{ even}, \\ \qquad g=\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2}+1,\ldots,n-\dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{(l+1)(n+l+1)}{2g(n-g)}\dbinom{2g}{g-\frac{l+1}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\frac{l+1}{2}}, \\ \qquad l \text{ odd}, \\ \qquad g=\dfrac{l+1}{2},\ldots,n-\dfrac{l+1}{2}. \end{cases} \tag{30}$$

Proof. It can be seen from (19) and [3] that when l is even

$$N(F_{2n}^{(2g,l)}) = \sum_{k=1}^{n} N(E_{2n,2k}^{(2g,l)}) + \sum_{k=1}^{n} N(E_{2n,-2k}^{(2g,l)}) + N(E_{2n}^{(2g,l)}),$$

But it is easy to see that there is a one-to-one correspondence between the paths $E_{2n,-2k}^{(2g,l)}$ and $E_{2n,2k}^{(2n-2g,l)}$. Thus, on substituting the values of different types of paths, we get the desired result.

The proof for odd l can be given analogously. From (30) there follows the following

Theorem 5.1′. *For the random variables λ_{2n} and γ_{2n} the joint distribution law*

$$P(\gamma_{2n}=g,\lambda_{2n}=l \mid F_{2n}) = \tag{31}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2n}}\left[\dfrac{l(2g+l+2)}{4g(n-g)}\dbinom{2g}{g-\frac{l}{2}-1}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\frac{l}{2}}+\right. \\ \left. \qquad +\dfrac{l(2n-2g+l+2)}{4g(n-g)}\dbinom{2g}{g-\frac{l}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\frac{l}{2}-1}\right], & l \text{ even}, \\ \dfrac{1}{2^{2n}}\left[\dfrac{(l+1)(n+l+1)}{2g(n-g)}\dbinom{2g}{g-\frac{l+1}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\frac{l+1}{2}}\right], & l \text{ odd}, \end{cases}$$

holds and for the limiting joint distribution we obtain

$$
\begin{aligned}
(32)\qquad & \lim_{n\to\infty} P\left(y \leq \frac{\lambda_{2n}}{\sqrt{2n}} < y + dy\,,\; z \leq \frac{\gamma_{2n}}{n} < z + dz \mid F_{2n}\right) = \\
& = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{\{z(1-z)\}^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2z(1-z)}} dy\, dz \qquad y \geq 0\,,\; 0 \leq z \leq 1\,,
\end{aligned}
$$

which is similar to the result obtained by E. Csáki and I. Vincze (see [6]). Integration with respect to y from 0 to ∞ leads to the arc sin law [1].

§ 6. Joint distribution of $\lambda_{2n}^{(r)}$ and $\gamma_{2n}^{(r)}$ for an F_{2n}-path

Theorem 6.1. *For r even*

$$
(33)\quad N(F_{2n,r}^{(2g,l)}) = \begin{cases} \dfrac{l}{g}\dbinom{2g}{g-\frac{l}{2}}\dbinom{2n-2g}{n-g-\frac{r}{2}-\frac{l}{2}}, & l \text{ even},\; g = \dfrac{l}{2}, \dfrac{l}{2}+1, \ldots, \\[2ex] \dfrac{(r+l)(2g+l+1)}{2g\left(n-g+\frac{r}{2}+\frac{l+1}{2}\right)}\dbinom{2g}{g-\frac{l+1}{2}}\dbinom{2(n-g)}{n-g-\frac{l-1}{2}}, & l \text{ odd}, \\ & g = \dfrac{l+1}{2}, \dfrac{l+3}{2}, \ldots, \end{cases}
$$

and for r odd

$$
(34)\quad \begin{aligned}
N(F_{2n,r}^{(2g,l)}) &= \frac{l}{2g}\binom{2g}{g-\frac{l}{2}}\binom{2n-2g+1}{n-g-\frac{r-1}{2}-\frac{l}{2}}, \quad l \text{ even}, \\
& \qquad g = \frac{l}{2}, \frac{l}{2}+1, \ldots, \\
N(F_{2n,r}^{(2g+1,l)}) &= \frac{(r+l)}{2(n-g)}\binom{2g+1}{g-\frac{l-1}{2}}\binom{2(n-g)}{n-g-\frac{r-1}{2}-\frac{l+1}{2}}, \quad l \text{ odd}, \\
& \qquad g = \frac{l-1}{2}, \frac{l+1}{2}, \ldots,
\end{aligned}
$$

Proof. *r even*
when l is even, it follows from (23) and (24) that

$$
N(F_{2n,r}^{(2g,l)}) = \sum_{k=g-n+r+\frac{l}{2}-1}^{\frac{r}{2}-1} N(E_{2n,2k,r}^{(2g,l)}) + N(E_{2n,2k,2k}^{(2g,l)}).
$$

After simplification we can get the required result. Similarly, when l is odd; it can be seen from (22) and (23) that

$$N(F_{2n,r}^{(2g,l)}) = \sum_{k=\frac{r}{2}+1}^{g+\frac{r}{2}-\frac{l-1}{2}} N(E_{2n,2k,r}^{(2g,l)}) + N(E_{2n,2k,2k}^{(2g,l)})$$

which on simplifying proves the result.

When r is odd

It is clear from (22) and (24) that

$$N(F_{2n,r}^{(2g,l)}) = \sum_{k=g-n+r+\frac{l}{2}-1}^{\frac{r-1}{2}} N(E_{2n,2k,r}^{(2g,l)}) \,,\; l \text{ even},$$

and

$$N(F_{2n,r}^{(2g+1,l)}) = \sum_{k=\frac{r+1}{2}}^{g+\frac{r+1}{2}-\frac{l-1}{2}} N(E_{2n,2k,r}^{(2g+1,l)}) \,,\; l \text{ odd}.$$

After simplification we obtain the required results. These results lead to the following

Theorem 6.1′. *For r even*

$$P(\gamma_{2n}^{(r)}=g\,,\ \lambda_{2n}^{(r)}=l \mid F_{2n}) =$$

$$(35)\quad = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2n}}\left[\dfrac{l}{g}\binom{2g}{g-\frac{l}{2}}\binom{2n-2g}{n-g-\frac{r}{2}-\frac{l}{2}}\right], & l \text{ even},\\[2ex] \dfrac{1}{2^{2n}}\left[\dfrac{(r+l)(2g+l+1)}{2g\left(n-g+\frac{r}{2}+\frac{l+1}{2}\right)}\binom{2g}{g-\frac{l+1}{2}}\binom{2n-2g}{n-g-\frac{r}{2}-\frac{l-1}{2}}\right], & l \text{ odd}. \end{cases}$$

From [6] it follows that

$$P(\gamma_{2n}^{(r)}=0\,,\ \lambda_{2n}^{(r)}=0 \mid F_{2n}) = \frac{1}{2^{2n}}\left[2\sum_{j=1}^{\frac{r}{2}}\binom{2n}{n+j}+\binom{2n}{n}\right]$$

and for the limiting joint distribution we obtain: for $r \sim b\sqrt{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(y \leq \frac{\lambda_{2n}^{(r)}}{\sqrt{2n}} < y+dy,\ z \leq \frac{\gamma_{2n}^{(r)}}{n} < z+dz \mid F_{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(y+bz)}{\{z(1-z)\}^{3/2}}\, e^{-\frac{b^2}{2}-\frac{(y+bz)^2}{2z(1-z)}}\,dy\,dz \qquad b, y \geqq 0\,,\ 0 \leqq z \leqq 1\,.$$

Integration with respect to y from 0 to ∞ leads to

$$\lim_{n\to\infty} P\left(z \leq \frac{\gamma_{2n}^{(r)}}{n} < z+dz \mid F_{2n}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{-\frac{b^2}{2(1-z)}}}{\sqrt{z(1-z)}}\,dz$$

which corresponds to the result obtained by E. Csáki and I. Vincze (see [6]).

The result for odd values of r can be written analogously and it is easy to see that the limiting joint distribution of $\gamma_{2n}^{(r)}$ and $\lambda_{2n}^{(r)}$ is equivalent to the one just obtained above for even r.

§ 7. Distribution of γ_{2n} for an $E_{2n,2k}$-path

In 1949, CHUNG and FELLER [7] proved that

$$P(\gamma_{2n} = g \mid E_{2n,2k}) = \frac{k}{\binom{2n}{n-k}} \sum_{i=k}^{g} \binom{2i}{i-k} \binom{2n-2i}{n-i} \cdot \frac{1}{i(n-i+1)} .$$

But we shall prove the following theorem in an alternative and easier way.

Theorem 7.1.

$$(36) \quad N(E_{2n,2k}^{(2g)}) = \sum_{i=n-g}^{n-k} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} \cdot \frac{2k}{2n-2i} \binom{2n-2i}{n-i-k}, \quad g = k, k+1, \ldots, n.$$

Proof. Let us consider $\{s_0, s_1, \ldots, s_{2i}, \ldots, s_{2n}\}$ an $E_{2n,2k}^{(2g)}$-path starting at the origin and reaching the point $(2n, 2k)$ after $2n$ steps (see fig. 6).

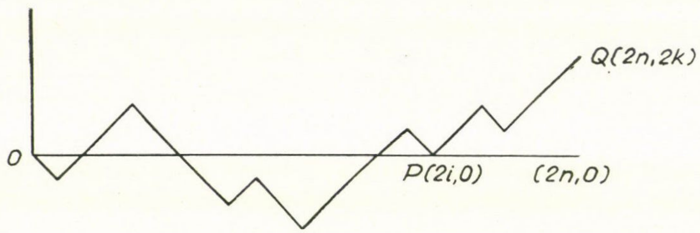


Fig. 6.

Let $P(2i, 0)$ be the last point where the path either touches or crosses the axis. Then the section from $(2i, 0)$ to $(2n, 2k)$ is a path of the type H_{2n-2i}^{2k}. The number of paths with any number of positive steps from 0 to $2i$ is given by

$$L_{2i} = \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i}, \qquad \text{(FELLER [1], p. 72).}$$

Thus

$$N(E_{2n,2k}^{(2g)}) = \sum_{i=n-g}^{n-k} L_{2i} \cdot N(H_{2n-2i}^{2k})$$

proving our theorem 7.1. This leads to the following

$$(37) \qquad P(\gamma_{2n} = g \mid E_{2n,2k}) = \frac{1}{\binom{n}{n-k}} N(E_{2n,2k}^{(2g)}) .$$

For the limiting case we obtain the following: for $k \sim a\sqrt{2n}$, $\dfrac{i}{n} \sim y$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(z \leqq \frac{\gamma_{2n}}{n} < z + dz \mid E_{2n,2k}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1-z}^{1} \frac{a}{\{y(1-y)\}^{3/2}} e^{2a^2 - \frac{2a^2}{(1-y)}} dy\, dz\,;$$

making use of the transformation

$$\frac{2\,a^2}{1-y} = v$$

it follows that

$$\lim_{n\to\infty} P\left(z \leqq \frac{\gamma_{2n}}{n} < z + dz \mid E_{2n,2k}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2a^2}{z}}^{\infty} \frac{v}{\{v - 2\,a^2\}^{3/2}} e^{2a^2 - v}\, dv\,.$$

$k = 0$ or $a = 0$ gives the uniform distribution (FELLER [1]).

§ 8. Distribution of $\gamma_{2n}^{(r)}$ for an $E_{2n,2k}$-path

The following

Theorem 8.1. *For $r < 2\,k$*

$$N(E_{2n,2k,r}^{(2g)}) = \sum_{i=0}^{g-k+\frac{r}{2}} \frac{(r + 2\,i + 1)(2\,k - r + 2\,i + 1)}{(2\,g + 1)(2\,n - 2\,g + 1)} \binom{2\,g+1}{g - k + \frac{r}{2} - i} \times$$

$$\times \binom{2\,n - 2\,g + 1}{n - g - \frac{r}{2} - i}, \quad r \textit{ even}, \quad g = k - \frac{r}{2}, \ldots, n - \frac{r}{2},$$

(38) *and*

$$N(E_{2n,2k,r}^{(2g+1)}) = \sum_{i=0}^{g-k+\frac{r+1}{2}} \frac{(r + 2\,i + 1)(2\,k - r + 2\,i + 1)}{4(n-g)(g+1)} \binom{2\,g+2}{g - k + \frac{r+1}{2} - i} \times$$

$$\times \binom{2\,n - 2\,g}{n - g - \frac{r+1}{2} - i}, \quad r \textit{ odd}, \quad g = k - \frac{r+1}{2}, \ldots, n - \frac{r+1}{2},$$

holds.

The proof follows from (22) and this leads to

$$P(\gamma_{2n}^{(r)} = g \mid E_{2n,2k}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{2\,n}{n-k}} \cdot N(E_{2n,2k,r}^{(2g)})\,, & r \text{ even,} \\[2ex] \dfrac{1}{\binom{2\,n}{n-k}} \cdot N(E_{2n,2k,r}^{(2g+1)})\,, & r \text{ odd,} \end{cases}$$

and for the limiting distribution we obtain: for $k \sim a\sqrt{2\,n}$, $r \sim b\sqrt{2\,n}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(z \leqq \frac{\gamma_{2n}^{(r)}}{n} < z + dz \,\middle|\, E_{2n,2k}\right) =$$

(39)
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{(b+y)(2\,a-b+y)}{\{z(1-z)\}^{3/2}}\, e^{\left[2a^2 - \frac{(b+y)^2}{2(1-z)} - \frac{(2a-b+y)^2}{2z}\right]}\, dy\, dz\,,$$

$$a, b, y \geqq 0\,,\quad 0 \leqq z \leqq 1\,,$$

which can also be seen from (26).

When $r = 2\,k$, it follows from (23) that

$$N(E_{2n,2k,2k}^{(2g)}) = \sum_{i=1}^{g} \frac{i(r+2\,i)}{g\left(n-g+\frac{r}{2}+i+1\right)} \binom{2\,g}{g-i} \binom{2\,n-2\,g+1}{n-g-\frac{r}{2}-i+1},$$

$$g = 1, 2, \ldots, n - \frac{r}{2}\,,$$

which gives

(40)
$$P(\gamma_{2n}^{(2k)} = g \mid E_{2n,2k}) = \frac{1}{\binom{2\,n}{n-k}} \cdot N(E_{2n,2k,2k}^{(2g)})\,.$$

It is easy to see that

(41)
$$P(\gamma_{2n}^{(2k)} = 0 \mid E_{2n,2k}) = \frac{2\,k+1}{n+k+1}\,,$$

by showing the one-to-one correspondence between the paths of the types $E_{2n,2k,2k}^{(0)}$ and H_{2n+1}^{2k+1}. For the limiting distribution we obtain: for $k \sim a\sqrt{2\,n}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(z \leqq \frac{\gamma_{2n}^{(2k)}}{n} < z + dz \,\middle|\, E_{2n,2k}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{(y^2 + 2\,ay)}{\{z(1-z)\}^{3/2}}\, e^{-\frac{(y+2az)^2}{2z(1-z)}}\, dy\, dz,$$

$$a \geqq 0\,,\quad 0 \leqq z \leqq 1\,,$$

$k = 0$ or $a = 0$ gives

$$\lim_{n\to\infty} P\left(z \leqq \frac{\gamma_{2n}}{n} < z + dz \mid E_{2n}\right) = dz$$

showing that $\frac{\gamma_{2n}}{n}$ has an uniform distribution (FELLER [1]).

When $r > 2k$, it follows from (24) that

$$N(E^{(2g)}_{2n,2k,r}) = \sum_{i=1}^{g} \frac{i(r-k+i)}{g(n-g+1)} \binom{2g}{g-i} \binom{2n-2g+2}{n-g-r+k-i+1},$$
$$g = 1, 2, \ldots, n-r+k,$$

which gives

(42) $$P(\gamma^{(r)}_{2n} = g \mid E_{2n,2k}) = \frac{1}{\binom{2n}{n-k}} N(E^{(2g)}_{2n,2k,r})$$

and

$$P(\gamma^{(r)}_{2n} = 0 \mid E_{2n,2k}) = 1 - \frac{\binom{2n}{n-r+k-1}}{\binom{2n}{n-k}}$$

which can be proved by showing that

$$N(E^{(0)}_{2n,2k,r}) = \binom{2n}{n-k} - \binom{2n}{n-r+k-1}.$$

For the limiting case we obtain: if $k \sim a\sqrt{2n}$, $r \sim b\sqrt{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(z \leqq \frac{\gamma^{(r)}_{2n}}{n} < z + dz \mid E_{2n,2k}\right) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{y(2b-2a+y)}{\{z(1-z)\}^{3/2}} e^{\left[2a^2 - \frac{y^2}{2z} - \frac{(2b-2a+y)^2}{2(1-z)}\right]} dy\, dz$$
$$a, b, y \geqq 0, \quad 0 \leqq z \leqq 1,$$

which can also be seen from (29).

§ 9. Distribution of $\gamma^{(r)}_{2n}$ for an F_{2n}-path

For a fixed positive even r I. VINCZE [6] has proved that

$$N(F^{(2g)}_{2n,r}) = \binom{2g}{g} \binom{2n-2g}{n-g+\frac{r}{2}}$$

which, in our case, follows easily from (33) by writing

$$N(F^{(2g)}_{2n,r}) = \sum_{l\,(\text{even})} N(F^{(2g,l)}_{2n,r}) + \sum_{l\,(\text{odd})} N(F^{(2g,l)}_{2n,r}).$$

But, for a fixed positive odd r, we shall prove the following

Theorem 9.1.

$$N(F_{2n,r}^{(2g)}) = \sum_{i=1}^{g} \frac{i}{g} \binom{2g}{g-i} \binom{2n-2g+1}{n-g-\frac{r-1}{2}-i},$$

(43) and

$$N(F_{2n,r}^{(2g+1)}) = \sum_{i=1}^{g} \frac{(r+2i-1)}{2(n-g)} \binom{2g+1}{g-i+1} \binom{2n-2g}{n-g-\frac{r-1}{2}-i}.$$

The proof is simple and follows from (34) by putting

$$N(F_{2n,r}^{(2g)}) = \sum_{l\,(\text{even})} N(F_{2n,r}^{(2g,l)}),$$

and

$$N(F_{2n,r}^{(2g+1)}) = \sum_{l\,(\text{odd})} N(F_{2n,r}^{(2g+1,l)}).$$

This leads to

$$P(\gamma_{2n}^{(r)} = g \mid F_{2n}) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot N(F_{2n,r}^{(2g)}),$$

and

$$P(\gamma_{2n}^{(r)} = g \mid F_{2n}) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot N(F_{2n,r}^{(2g+1)}).$$

In the second case there are $2\gamma_{2n}^{(r)} + 1$ steps above the height r.

For the limiting distribution we obtain: for $r \sim b\sqrt{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(z \leq \frac{\gamma_{2n}^{(r)}}{n} < z + dz \mid F_{2n}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot e^{-\frac{b^2}{2}} \int_0^\infty \frac{(y+bz)}{\{z(1-z)\}^{3/2}} e^{-\frac{(y+bz)^2}{2z(1-z)}} dy\, dz$$

which on putting $r = 0$ or $b = 0$ leads to the arc sin law [1].

(Received April 2, 1964)

REFERENCES

[1] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol.* 1 (2-nd edition) New-York, 1957, John Wiley and Sons.
[2] Vincze, I.: "On some joint distributions and joint limiting distributions in the theory of order statistics, II." *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **4** (1959) 29—47.
[3] Csáki, E.—Vincze, I.: "On some problems connected with the Galton test." *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) 97—109.
[4] Csáki, E.: "On the number of intersections in the one-dimensional random walk." *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) 281—286.
[5] Рыжик, И. М.—Градштейн: *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Государственное издательство, Москва—Ленинград, 1951.
[6] Vincze, I.: "On Some Combinatorial Relations Concerning the Symmetric Random Walk", *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées (Académia de la République Populaire Roumaine)* **8** (1963) No. 2.
[7] Chung, K. L.—Feller, W.: "On Fluctuations in Coin Tossing." *Proceedings of National Academy of Sciences*, Vol. **35** (1949).

О НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДАНИЕМ

KANWAR SEN

Резюме

Пусть $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots)$ последовательность независимых случайных величин, принимающих значения $+1$ и -1 с равными вероятностями. Пусть, далее $s_0 \equiv 0$ и $s_i = \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Изучаются следующие величины:

$\lambda_N^{(r)}$ — число тех индексов $i \leqq N$ для которых или $s_{i-1} = r - 1$, $s_i = r$, $s_{i+1} = r + 1$ или $s_{i-1} = r + 1$, $s_i = r$, $s_{i+1} = r - 1$;

$2\,\gamma_N^{(r)}$ — число тех индексов $i \leqq N$ для которых или $s_i > 0$ или $s_i = 0$ но $s_{i-1} > 0$.

В §-ах 1, 2, 3 и 4 исследуются условные распределения этих величин, при условии $s_{2n} = 2\,k$ или $s_{2n+1} = 2\,k + 1$.

Распределение λ определяется с формулами 4, 7, 9, 11 и 13.

Совместное распределение величин λ и γ выводится из формул 20, 21, 26, 27 и 28.

Переходив к пределу в точных формулах распределений, получены предельные распределения.

Отношения 31 и 35 §-ов 5 и 6 включают себе безусловные распределения величин λ и γ. Приводятся и соответствующие предельные распределения.

В §-ах 7 и 8 исследуется условное распределение γ, а в §-е 9 ее безусловное и предельное распределение.

Одна часть результатов получаются с помощью простого комбинаторного метода и однозначного отображения, а другая часть с помощью производящей функции.

ON THE FACTOR THEORY OF COMMUTATIVE BANACH ALGEBRAS

by

L. MÁTÉ[1]

§ 0. Let $\boldsymbol{B}$ be a semi-simple commutative Banach algebra and $\boldsymbol{A_B}$ the algebra of operators on $\boldsymbol{B}$ with the following property:

$$(*) \qquad Tab = aTb \qquad T \in \boldsymbol{A_B}$$

for every $a, b \in \boldsymbol{B}$. Operators having property (*) are called *completely homogeneous*.

Some papers deal with the completely homogeneous operators of certain convolution algebras [3], [5]. FOIAS [4] was the first who investigated completely homogeneous operators from the point of view of Banach algebra, in connection with a certain problem of abstract harmonic analysis.

In the first section of this paper there will be established a connection between the multiplicative functionals of $\boldsymbol{B}$ and those of $\boldsymbol{A_B}$. This result can be considered as a generalization of the algebraic content of Theorem 1 of FOIAS' paper [4].

In the second section, some characterizations are given for completely homogeneous operators with range in a conjugate Banach space and it is shown, that some classical results of harmonic analysis are special cases of these characterization theorems.

§ 1. If $\boldsymbol{B}$ has an identity, then obviously $\boldsymbol{A_B}$ is isometric and isomorphic with $\boldsymbol{B}$, hence we consider $\boldsymbol{B}$ without identity. First, we shall prove two almost trivial but fundamental lemmas.

Lemma 1. *Every $T \in \boldsymbol{A_B}$ is linear.*

Proof. If $T \in \boldsymbol{A_B}$, then for fixed $a, b \in \boldsymbol{B}$ complex numbers λ, μ and for every $c \in \boldsymbol{B}$

$$\begin{aligned} & c\{\lambda Ta + \mu Tb - T(\lambda a + \mu b)\} = \\ (1) \qquad & = \lambda Tca + \mu Tcb - Tc(\lambda a + \mu b) = \\ & = \lambda aTc + \mu bTc - (\lambda a + \mu b)Tc = 0\,, \end{aligned}$$

hence

$$\lambda Ta + \mu Tb - T(\lambda a + \mu b) = 0\,.$$

[1] University of Technology, Budapest.

Lemma 2. *Every $T \in \boldsymbol{A_B}$ is continuous.*

Proof. If $f_n \to 0$ and $Tf_n \to g$, then $hTf_n \to hg$ for every $h \in \boldsymbol{B}$. On the other hands, from $hTf_n = f_n Th$ it follows, that $hTf_n \to 0$. These imply $g = 0$. Hence T is closed and the lemma follows from the closed graph theorem.

In § 2 we shall frequently make use of the fact, that *the set of multiplicative functionals on $\boldsymbol{B}$ with the $\boldsymbol{B}$-topology is homeomorphic with the maximal (regular) ideal space of $\boldsymbol{B}$ and every multiplicative functional is continuous.*

The following theorem is of basic importance in establishing our main results in § 2.

Theorem 1. *Let $\boldsymbol{B}_M$ be the set of multiplicative linear functionals on $\boldsymbol{B}$. Then every $\mu \in \boldsymbol{B}_M$ $(\mu \neq 0)$ has a unique multiplicative linear extension onto $\boldsymbol{A_B}$.*

Proof. I. If $\mu \in \boldsymbol{B}_M$ $(\mu \neq 0)$ then there is an $x \in \boldsymbol{B}$ such that $\mu(x) \neq 0$. Hence we may define

$$\mu(T) = \frac{\mu(Tx)}{\mu(x)}; \qquad T \in \boldsymbol{A_B}. \tag{2}$$

This definition is independent of x; indeed for every $y \in \boldsymbol{B}$ we have

$$\mu(T)\,\mu(y) = \frac{\mu(Tx)}{\mu(x)}\,\mu(y) = \frac{\mu(Tx \cdot y)}{\mu(x)} = \frac{\mu(x \cdot Ty)}{\mu(x)} = \frac{\mu(x)\,\mu(Ty)}{\mu(x)} = \mu(Ty)\,.$$

II. Obviously μ, defined by (2) on $\boldsymbol{A_B}$, is linear. Moreover it is multiplicative, since

$$\mu(T_1 T_2) = \frac{\mu(T_1 T_2 x)}{\mu(x)} = \frac{\mu(T_1)\,\mu(T_2 x)}{\mu(x)} = \mu(T_1)\,\mu(T_2)\,.$$

III. The set

$$\{T_x : \ T_x y = xy; \quad y \in \boldsymbol{B}\} \tag{3}$$

of completely homogeneous operators is a subalgebra of $\boldsymbol{A_B}$, isomorphic with $\boldsymbol{B}$; moreover $\mu(T_x) = \mu(x)$. Hence (2) defines an extension of $\mu \in \boldsymbol{B}_M$. This is a unique extension, since for every multiplicative extension μ^*

$$\mu^*(T)\,\mu(x) = \mu(Tx) \qquad T \in \boldsymbol{A_B}$$

and hence $\mu^*(T) = \mu(T)$ for every $T \in \boldsymbol{A_B}$.

Let $\check{\boldsymbol{B}}$ be the Gelfand representation and $\boldsymbol{M_B}$ be the maximal (regular) ideal space of $\boldsymbol{B}$. Then the function $f_T(m)$, $(m \in \boldsymbol{M})$ is called *factor function* if

$$f_T(m)\,x(m) \in \check{\boldsymbol{B}} \quad \text{if only} \quad x(m) \in \check{\boldsymbol{B}}\,.$$

It is obvious, that the operator

$$T: \ [Tx](m) = f_T(m)\,x(m) \qquad m \in \boldsymbol{M_B} \tag{4}$$

is completely homogeneous. Conversely, it follows from the connection between $\boldsymbol{B}_M$ and $\boldsymbol{M_B}$ and from Theorem 1, that for every $T \in \boldsymbol{A_B}$ there is a unique factor function satisfying (4).

§ 2. Let G be a locally compact abelian group which is not discrete, and $M(G)$ be the algebra of all bounded complex measures on G. Then it is known (see for example [4]) that the algebra $\boldsymbol{A}_{L^1(G)}$ is isometric and isomorphic with $M(G)$. In the following, on the basis of Theorem 1, we give some generalizations of this theorem.

Definition. The sequence $\{e_\alpha\}$ of elements of a commutative Banach algebra $\boldsymbol{B}$ is called an approximate identity, if $\| e_\alpha \| = 1$ and $e_\alpha x \to x$ for every $x \in \boldsymbol{B}$.

Theorem 2. *Let $\boldsymbol{B}$ be a commutative semi-simple Banach algebra and*

a) *$\boldsymbol{B}$ be the conjugate space of a Banach space X.*

b) *every maximal (regular) ideal of $\boldsymbol{B}$ be X-closed*[2].

Let $\boldsymbol{I}$ be an ideal of $\boldsymbol{B}$ satisfying the following conditions:

c) *there is an approximate identity $\{e_\alpha\}$ in $\boldsymbol{I}$.*

d) *there is no annihilator of $\boldsymbol{I}$ in $\boldsymbol{B}$. (That is, if $x \in \boldsymbol{B}$ and $x\boldsymbol{I} = 0$, then $x = 0$.)*

Then $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}}$ is topologically isomorphic with $\boldsymbol{B}$.

Proof. I. If $T \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}}$ then T is continuous (Lemma 2), hence the set $\{Te_\alpha\}$ is bounded. Considering, that $\boldsymbol{B}$ is the conjugate space of X, there is an X-convergent subsequence $\{Te_{\alpha_i}\}$ and

(5) $$X\text{-}\lim Te_{\alpha_i} = h \in \boldsymbol{B}\,.$$

II. Every maximal regular ideal is the null-space of a certain $\mu \in \boldsymbol{B}_M$. Considering, that every maximal regular ideal is X-closed, from a known theorem follows that $\mu \in X$, hence

$$\mu(Te_{\alpha_i}) \to \mu(h) \quad \text{if} \quad \mu \in \boldsymbol{B}_M\,.$$

III. For every $\mu \in \boldsymbol{B}_M$

$$\mu(Te_{\alpha_i} y) = \mu(Te_{\alpha_i})\mu(y) \to \mu(hy)\,; \qquad y \in \boldsymbol{B}$$

and on the other hand

$$\mu(Te_{\alpha_i} y) = \mu(e_{\alpha_i} Ty) \to \mu(Ty)\,.$$

Hence, for every $T \in \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}}$ there exists an $h \in \boldsymbol{B}$ such that

$$Ty = hy \qquad y \in \boldsymbol{I}$$

since $\boldsymbol{B}$ is semi-simple.

IV. $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}}$ and $\boldsymbol{B}$ are isomorph Banach spaces and

$$\| T_x \| \leqq \| x \| \qquad x \in \boldsymbol{B}\,,$$

consequently from the Banach theorem follows, that $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}}$ is homeomorphic with $\boldsymbol{B}$.

Corollary. *Let $\{f_\alpha(m)\}$ be a sequence of factor functions and*

$$\lim f_\alpha(m) = f(m) \qquad m \in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{I}}\,.$$

Then a necessary and sufficient condition for $f(m)$ being a factor function is that

(6) $$f_\alpha(m)\, e_\alpha(m) \in \check{\boldsymbol{B}}$$

[2] there is enough if only those, in which $\boldsymbol{I}$ is not contained.

and

(7) $$\{g_a : g_a(m) = f_a(m)\, e_a(m)\} \text{ be bounded.}$$

In this case, there exists an $h \in \boldsymbol{B}$ *such that*

$$h(m) = f(m) \qquad m \in \boldsymbol{M_I}\,.$$

Proof. Conditions (6) and (7) are obviously necessary. If (6) and (7) are satisfied , then there is an X-convergent subsequence $\{T_{a_i} e_{a_i}\}$ [where $T_{a_i} : T_{a_i}(m) = f_{a_i}(m)]$ that X-lim $T_{a_i} e_{a_i} = h \in \boldsymbol{B}$. Hence it can be shown, similar to the proof of Theorem 2, that

(8) $$\mu(Ty) = \mu(hy) \qquad y \in \boldsymbol{I}\,,\ \mu \in \boldsymbol{B_M}\,.$$

Considering the mentioned connection between $\boldsymbol{B_M}$ and $\boldsymbol{M_B}$ we obtain

$$f(m) = h(m) \qquad m \in \boldsymbol{M_B}\,.$$

Some classical theorems of harmonic analysis can be considered as special cases of this Corollary. If $\boldsymbol{B} = L^1(-\pi, +\pi)$ with the convolution product

(○) $$xy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x(t - \tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

then

$$e_n(t) = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right]^2 \qquad \text{(Fejér's kernel)}$$

is an approximate identity and g_n is the n-th Cesàro mean of the formal series

(9) $$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_m e^{imt}\,.$$

In this case we obtain from the Corollary:

Necessary and sufficient condition for $\{T_m\}$ *being a factor sequence of type* (L^1, L^1) *is that the set* $\{\sigma_n(t)\}$ *of the Cesàro means of the formal series* (9) *be* L^1-*bounded.*

Then (9) *is the Fourier series of a periodic function of bounded variation.*

Let us recall, that a factor sequence of type (L^1, L^p) is called a sequence $\{T_m\}$ of complex numbers such that $T_m x_m$ is the m-th Fourier coefficient of an L^p-function whenever x_m is the m-th Fourier coefficient of an L^1-function.

If now $\boldsymbol{B} = L^1(-\pi, +\pi)$ with the product (○) but the approximate identity is

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \qquad \text{(Poisson kernel)}$$

then we obtain from the Corollary a necessary and sufficient condition for a harmonic function in the unit disk, being a finite measure on the boundary ([1] p. 33).

In the following we give an analogous of Theorem 2, for the case if *the domain and range of* T *are in different spaces.*

Theorem 3. *Let*

a) $\boldsymbol{B}$ *be a commutative semi-simple Banach algebra with approximate identity* $\{e_a\}$;

b) $\boldsymbol{B}_*$ *be a reflexive Banach space, linear-isomorphic with an ideal of* $\boldsymbol{B}$ *and*

$$\| xy \| \leqq \| x \|_* \| y \| \qquad x \in \boldsymbol{B}_*,\ y \in \boldsymbol{B}. \tag{10}$$

Then the algebra $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_*}$ *of completely homogeneous operators from* $\boldsymbol{B}$ *to* $\boldsymbol{B}_*$ *is topologically isomorphic with* $\boldsymbol{B}_*$.

Proof. If $x \in \boldsymbol{B}_*$, then T_x, defined according to (3), is completely homogeneous and $T_x \neq 0$ if $x \neq 0$ since $\boldsymbol{B}$ is semi-simple. Hence $\boldsymbol{B}_*$ is isomorphic with a certain subalgebra of $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_*}$.

$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_*}$ is a Banach algebra with the operator norm and a subalgebra of $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{B}}$. Hence every $\mu \in \boldsymbol{B}_M (\mu \neq 0)$ has a unique continuous extension to $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_*}$.

The isomorphismus between $\boldsymbol{B}_*$ and $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_*}$ can be proved in the same manner as in Theorem 2.

For the proof of the homeomorphism, we consider the new norm

$$| x | = \sup \{\| T_x \|, \| x \|_*\} \tag{11}$$

in $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_*}$ resp. $\boldsymbol{B}_*$. We show that $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_*}$ resp. $\boldsymbol{B}_*$, provided with the norm (11), is a Banach space.

Let $\{x_n\}$ be a Cauchy-sequence in this new Banach space; then it is a Cauchy-sequence in the original norms too. If $\boldsymbol{B}_*$-lim $x_n = x'$ and $\boldsymbol{A}$-lim $x_n = x''$ then for every $\varepsilon > 0$ and $n > N(\varepsilon)$

$$\mu(x' - x'') = \mu(x' - x_n) + \mu(x_n - x'') < \varepsilon \qquad \mu \in \boldsymbol{B}_M ;$$

since μ is continuous in $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_*}$ and $\boldsymbol{B}_*$ as well [see (10)]. Hence $x' = x''$ and from the Banach theorem it follows that the three norms in (11) are equivalent.

Corollary. *The Banach space of the completely homogeneous operators from* $L^1(G)$ *to* $L^p(G)$ $(p > 1)$ *is topologically isomorphic with* $L^p(G)$, *if* G *is compact.*

The classical theorem on factor sequences of type (L^1, L^p) as well as conditions for a function being harmonic in the unit disk and L^p-function on its boundary, can be derived from Theorem 3 similarly to the propositions following the Corollary of Theorem 2.

The author wishes to thank professor C. Foias for many helpful suggestions.

(Received April 6, 1964)

REFERENCES

[1] Hoffmann, K.: *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice Hall Inc. 1962.

[2] Naimark, M. A.: *Normed Rings.* Noordhoff N. V. 1959.

[3] Boehme, T. K.: "Concerning Convolution on the Half-line." *Arch. Rat. Mech. Anal.* **10** (1962) p. 220.

[4] Foias, C.: "On a Commutative Extension of a Commutative Banach Algebra." *Pac. J. Math.* **8** (1958) p. 407.

[5] Weston, J. D.: "Characterisations of Laplace Transforms and Perfect Operators." *Arch. Rat. Mech. Anal.* **3** (1959) p. 348.

О ТЕОРИИ ФАКТОРОВ КОММУТАТИВНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

L. MÁTÉ

Резюме

Пусть $\boldsymbol{B}$ — коммутативная Банахова алгебра и $\boldsymbol{A_B}$ — алгебра тех операторов $\boldsymbol{B}$ которые удовлетворяют равенству (*). Пусть, далее $\boldsymbol{M_B}$ — пространство регулярных максимальных идеалов алгебры $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{M}$ — пространство максимальных идеалов $\boldsymbol{A_B}$. Тогда, очевидно $\boldsymbol{B}$ является изоморфным одной подалгебре $\boldsymbol{A_B}$ и существует по меньшей мере один елемент $\overline{m} \in \boldsymbol{M}$ такой, что $\boldsymbol{B} \subsetneqq \overline{m}$.

В работе доказаны следующие:

I. *Если* $\boldsymbol{M}^* = \{\overline{m} : \overline{m} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\}$

то $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M_B} \cup \boldsymbol{M}^*$.

II. *Если* $\boldsymbol{B}_*$ *— коммутативная Банахова алгебра, которая одновременно является сопряженным Банаховым пространством и* $\boldsymbol{B}$ *— такой замкнутый идеал в* $\boldsymbol{B}_*$ *который содержит одно приближение единицы, то* $\boldsymbol{A_B}$ *изометрически изоморфна алгебра* $\boldsymbol{B}_*$.

Вышеуказанные предложения применены к некоторым проблемам абстрактного гармонического анализа.

ANWENDUNG DER MIKUSIŃSKISCHEN OPERATORENRECHNUNG ZUR LÖSUNG VON INTEGRALGLEICHUNGEN DRITTER ART VOM FALTUNGSTYPUS

von

T. FÉNYES

Einleitung

In dieser Arbeit wird das Auffinden der Lösungen von gewissen Integralgleichungen dritter Art vom Faltungstypus, nämlich von Gleichungen der Form

$$(t+a)\,f(t) + \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = h(t) \tag{1}$$

mit Benutzung der Mikusińskischen Operatorenrechnung dargestellt. Es werden hier durch $f(t)$ die unbekannte Funktion, durch $g(t)$ der Kern der Integralgleichung, durch $h(t)$ die Störungsfunktion und durch a eine beliebige reelle Zahl bezeichnet.

Im Falle $a > 0$ erhält man aus (1) durch Dividierung mit $t + a$ eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art, die nicht vom Faltungstypus ist. Da wir immer — unabhängig von der Grösse von a — *Integralgleichungen* vom *Faltungstypus* reden, gebrauchen wir in Allgemeinheit die Terminologie »Faltungstypus dritter Art«.

Die erwähnten Funktionen sind auf der Halbgeraden $0 \leq t < \infty$ definiert, und dort lokal integrierbar (im Lebesgueschen Sinne). Die Klasse dieser Funktionen wird durch L bezeichnet, d. h.

$$f(t),\ g(t),\ h(t) \in L\,.$$

Wir werden auch sagen, dass f, g, h L-Funktionen sind. Im Falle $h(t) \equiv 0$ sagen wir, dass die Integralgleichung homogen ist, im Falle $h(t) \not\equiv 0$, dass sie inhomogen ist.

Die Mikusińskische Operatorenrechnung wurde bereits von BUTZER [1], [2] zur Lösung von Integralgleichungen erster und zweiter Art vom Faltungstypus angewendet. Wir werden denselben Weg beschreiten, wie [1] und [2]. Wir bestimmen die verallgemeinerten Lösungen von (1), und suchen dann die sogenannten L-Lösungen. Es wird eine einfache Methode zur Bestimmung der verallgemeinerten Lösungen von (1) dargestellt. Wir werden sehen, dass mit Hilfe der Operatorenmethode im Falle $a \geq 0$ die Existenz von L-Lösungen einfach entschieden, und die eventuelle L-Lösung explizit aufgeschrieben werden kann. Ferner wird gezeigt, dass homogene Gleichungen nur im Falle $a \leq 0$ nichttriviale L-Lösungen besitzen können.

Die Obengesagten sind nur dann gültig — die Operatorenmethode führt im allgemeinen dann zum Ziel — wenn bezüglich des Kernes der Integralgleichung die Grösse $g(+0)$ existiert und die Beziehung

$$(2) \qquad \frac{g(t) - g(+0)}{t} \in L$$

erfüllt ist. (Für $t > 0$ darf $g(t)$ integrierbare Singularitäten besitzen.) Wir werden anstatt (2) auch $g(t) \in L'$ schreiben. Also bedeutet (2) eine gewisse Einschränkung bezüglich der Kernfunktionen von (1), und daher einen Nachteil der angewendeten Methode. Dies hängt mit dem Umstand zusammen, dass die Existenz bzw. Nichtexistenz der sogenannten Mikusińskischen Exponentialfunktion [3] bis jetzt nur für eine ziemlich enge Klasse der Operatoren w entschieden werden konnte [3], [4]. Also ist die Einschränkung (2) mit einem sehr tiefen theoretischen Problem der Operatorenrechnung verbunden.

Trotzdem werden wir am Ende dieser Arbeit einige solche spezielle Integralgleichungen untersuchen, deren Kern $g(t)$ in der Umgebung des Nullpunktes nicht beschränkt ist. Wir werden sehen, dass die Operatorenmethode in speziellen solchen Fällen ebenfalls brauchbar ist, und zu interessanten Ergebnissen führt.

Die in dieser Arbeit behandelte Methode beruht vollständig auf dem Begriff der Inversen der Mikusińskischen algebraischen Ableitung, dem sogenannten algebraischen Integral. Dieser Begriff wurde von E. Gesztelyi [5], [6] eingeführt, der zahlreiche grundlegende Sätze über die algebraische Integrierbarkeit von Operatoren bewiesen hat. Mit diesem Problemkreis beschäftigen sich T. Fényes und P. Kosik in ihrer Arbeit [7]. Der Satz über die algebraische Integrierbarkeit der sogenannten endlichen Distributionen [5], [7] spielt eine grundlegende Rolle bei der Lösung von Integralgleichung (1) mit Hilfe der Operatorenmethode. Wir werden sehen, dass im Falle (2) erfüllt ist, so in unseren Untersuchungen immer sogenannte endliche Distributionen erhalten werden. Wird die Einschränkung (2) weggelassen, so kann es vorkommen, dass keine Distributionen auftreten; die algebraische Integrierbarkeit dieser Operatoren ist in Allgemeinheit noch eine offene Frage. So können wir sehen, dass die Einschränkung (2) auch mit einem weiteren sehr tiefen theoretischen Problem der Operatorenrechnung zusammenhängt.

Die Arbeit setzt die eingehende Kenntnis der Mikusińskischen Operatorenrechnung und der dort benützten Bezeichnungen voraus. Im weiteren werden im allgemeinen die in [3] gebrauchten Bezeichnungen angewendet. Als eine gewisse Abweichung hiervon werden wir die Faltung von zwei oder mehreren Funktionen der Kürze halber zum Beispiel auch in der Form

$$a * b * c$$

aufschreiben; ist jedoch die eine Funktion eben eine Potenz des sogenannten Integraloperators l, so werden wir vom Zeichen $*$ keinen Gebrauch machen.

Im folgenden Abschnitt fassen wir die notwendigen Kenntnisse über die algebraische Ableitung bzw. das algebraische Integral zusammen.

§ 1. Zusammenfassung bisheriger Sätze und Definitionen bezüglich der algebraischen Ableitung bzw. des algebraischen Integrals von Operatoren

Falls $a(t)$, $b(t) \in L$, $b(t) \not\equiv 0$ so ist die algebraische Ableitung laut Definition:

$$D\{a(t)\} = \{-ta(t)\},$$

$$D\frac{a}{b} = \frac{b\,Da - a\,Db}{b^2},$$

hieraus folgt, dass jeder Operator beliebig oft algebraisch differenzierbar ist.

Eigenschaften der algebraischen Ableitung: Für beliebige Operatoren p und q gelten

(1.1) $$D(p+q) = Dp + Dq,$$

(1.2) $$D(pq) = pDq + qDp,$$

(1.3) $$D\frac{p}{q} = \frac{q\,Dp - p\,Dq}{q^2}, \quad (q \neq 0).$$

Für beliebigen Zahlenoperator a gilt

(1.4) $$Da = 0.$$

(1.5) Falls $D\beta = 0$, so ist β ein beliebiger Zahlenoperator (siehe [8]).

(1.6) Die algebraische Ableitung eines beliebigen rationalen Ausdruckes des Differentiationsoperators s lässt sich durch formales Differenzieren nach s bestimmen.

(1.7) Falls die Exponentialfunktion e^w existiert, so gilt:

$$De^w = e^w\,Dw \qquad \text{(siehe [8])}.$$

(1.8) Gibt es zu dem Operator w einen Operator u, so dass $Du = w$, und ist u ein Logarithmus, so ist

$$x = Ce^u \qquad (C = \text{beliebiger Zahlenoperator})$$

die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$Dx - wx = 0.$$

Die durch GESZTELYI [6] gegebene Definition des algebraischen Integrals lautet folgendermassen:

Gibt es zu einem beliebigen Operator p einen solchen Operator q, dass

$$Dq = p,$$

so wird der Operator q das algebraische Integral von p genannt, und in der Form

$$\int p\,ds = q$$

geschrieben.

Eigenschaften des algebraischen Integrals:

Für beliebige Operatoren p, q und Zahlen α, β gilt

(1.9) $$\int (\alpha p + \beta q)\, ds = \alpha \int p\, ds + \beta \int q\, ds\,,$$

falls p und q algebraisch integrierbar sind.

(1.10) Wird zu dem algebraischen Integral eines Operators eine beliebige Zahl addiert, so erhält man wiederum ein algebraisches Integral:

$$\int p\, ds = q + C\,.$$

(1.11) Es existiert das algebraische Integral jeder endlichen Distribution, und ist selber auch eine endliche Distribution. Genauer:
Falls

$$x = s^k e^{-as} f\,,$$ wobei f eine im Interwall $\langle 0, \infty)$ definierte stetige Funktion ist, $k = 0, 1, \ldots$; a reell,

so besteht

$$\int x\, ds = s^{k+2}\, e^{-as}\, u\,,$$

wobei

$$u(t) = \begin{cases} -(t+a)^{k+1} \displaystyle\int_0^t \frac{F(\tau)d\tau}{(\tau+a)^{k+2}}, & \text{für } a \neq 0 \\ -t^{k+1} \displaystyle\int_\Omega^t \frac{F(\tau)}{\tau^{k+2}} d\tau\,, & \text{für } a = 0,\ \Omega > 0 \text{ beliebig,} \end{cases}$$

und

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau\,,$$

(siehe [6], [7]). In [6] wird vorausgesetzt, dass f stetig ist. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass der Satz auch dann gültig bleibt, wenn $f \in L$.

Die Funktion $u(t)$ ist im Intervall $\langle 0, \infty)$ ebenfalls stetig, selbst dann, wenn

$$\frac{F(t)}{t+a}$$

in der Umgebung von $t = -a$ nicht lokal integrierbar ist ($a \leqq 0$). In diesem Fall existiert nämlich

$$u(-a+0) = \lim_{\varepsilon \to 0} u(-a+\varepsilon)$$

(siehe [5], [6], [7]), und ist $u(-a+0) = u(-a-0)$.

Im Falle $a = 0$ ist die untere Grenze des Integrals im Ausdruck von u, $\Omega > 0$. Dies hängt mit dem Umstand zusammen, dass zu einem jeden algebraischen Integral eine beliebige Konstante addiert werden kann. Selbstverständlich ist im allgemeinen $\Omega = 0$ nicht zulässig. Im Falle $a \neq 0$ muss als untere Grenze Null gewählt werden, sonst erhält man ein falsches Ergebnis.

Im weiteren werden wir uns auf (1.11) als auf den Satz über die algebraischen Integrierbarkeit endlicher Distributionen berufen.

Folgerung 1.

Falls $f \in L$, $f(+0)$ existiert und $\dfrac{f(t) - f(+0)}{t} \in L$, so gilt

$$\int f ds = \left\{\frac{f(t) - f(+0)}{-t}\right\} - f(+0)s\{\log t\},$$

was für $f(+0) = 0$ auf die Funktion

$$\int f ds = \left\{\frac{f(t)}{-t}\right\}$$

reduziert wird.

Folgerung 2.

Das algebraische Integral des Operators $\dfrac{1}{(s - a)^p}$ (a beliebige komplexe Zahl, p reell; $p \neq 1$) lässt sich durch formale Integrierung nach s bestimmen.

Falls $p = 1$, so gilt

$$\int \frac{ds}{s - a} = (a - s)\{e^{at} \log t\}.$$

§ 2. Die verallgemeinerten Lösungen der Integralgleichung $(t + a)f(t) + f(t) \ast g(t) = h(t)$

Im folgenden bestimmen wir die verallgemeinerten Operatorlösungen der Integralgleichung

$$(t + a)f(t) + f(t) \ast g(t) = h(t). \tag{2.1}$$

Diese Gleichung lässt sich in Operatorgestalt folgendermassen schreiben:

$$Df - af - fg = -h. \tag{2.2}$$

Dies ist eine inhomogene algebraische Differentialgleichung erster Ordnung. Falls (2.1) homogen ist ($h = 0$), so ist offensichtlich die entsprechende algebraische Differentialgleichung ebenfalls homogen. Die Gleichung (2.2) ist allgemeiner, als (2.1): Zwar ist jede lokal integrierbare Funktion $f \in L$, die (2.1) erfüllt, auch Lösung der Differentialgleichung (2.2); umgekehrt kann jedoch (2.2) solche verallgemeinerte Lösungen besitzen, die nicht lokal integrierbare Funktionen sind. Beschränken wir uns jedoch auf die L-Lösungen von (2.2) (falls solche überhaupt existieren), so können wir sagen, dass (2.1) und (2.2) äquivalent sind. Also gilt der folgende

Satz I. *Der Integralgleichung* (2.1) *entspricht die algebraische Differentialgleichung* (2.2). *Jede Lösung von* (2.1) *ist Lösung von* (2.2). (2.2) *ist allgemeiner, als* (2.1), *da unter ihren Lösungen auch Operatoren auftreten können, die keine L-Funktionen sind. Werden nur die L-Lösungen von* (2.2) *beachtet, so sind* (2.1) *und* (2.2) *äquivalent.*

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Bestimmung der verallgemeinerten Lösungen von (2.2) befassen, ungeachtet gelassen, ob sich unter diesen L-Lösungen befinden oder nicht.

Betrachten wir die Gleichung (2.2). Die entsprechende homogene Gleichung ist

$$Df - (a + g)f = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung erhält man — falls eine solche existiert — durch Anwendung von (1.8) mit Beachtung von (1.9) als

$$f = C \exp \int (a + g)\, ds = Ce^{as} e^{\int g ds}.$$

Aus dem Satz über die algebraische Integrierung der endlichen Distributionen ergibt sich, mit Rücksicht auf

$$\int g ds = s^2\, u$$

[bezüglich der Funktion $u(t)$ siehe (1.11)]

$$f = Ce^{as}\, e^{s^2 u} \tag{2.3}$$

falls der Operator $e^{s^2 u}$ überhaupt existiert, d. h. falls der Operator $s^2\, u$ ein Logarithmus ist. Bei beliebigem $g \in L$, d. h. bei entsprechendem stetigem u ist die Antwort auf die Frage über die Existenz von $e^{s^2 u}$ bisher nicht bekannt. Um unsere Untersuchungen weiterführen zu können, legen wir der Kernfunktion $g(t)$ die folgende Einschränkung auf:

Existiere $g(+0)$, *und sei* $\dfrac{g(t) - g(+0)}{t} \in L$, *d. h.* $g(t) \in L'$.

Unter Berücksichtigung von

$$\int g\, ds = \left\{\frac{g(t) - g(+0)}{-\,t}\right\} - g(+\,0)\, s\{\log t\}$$

ergibt sich in diesem Falle

$$f = Ce^{as} \exp\left\{\frac{g(t) - g(+0)}{-\,t}\right\} \exp\left[-\,g(+\,0)\, s\{\log t\}\right]. \tag{2.4}$$

Der Operator (2.4) existiert sicherlich. Laut einem Satz der Operatorenrechnung (siehe [3]) ist nämlich die Potenzreihe

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots$$

im Sinne der Operatorenrechnung immer konvergent, wenn $x \in L$, und stellt — abgesehen vom ersten Glied — eine L-Funktion her. Falls $x = \dfrac{g(t) - g(+0)}{-\,t}$, so ist

$$\exp\left\{\frac{g(t) - g(+0)}{-\,t}\right\} = 1 + \{G(t)\}\,,$$

wobei

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{\dfrac{g(t) - g(+0)}{-\,t}\right\}^k}{k\,!} \in L\,.$$

Die Potenzierung ist selbstverständlich als Faltungsprodukt zu verstehen.

Es wurde durch MIKUSIŃSKI in seiner Arbeit [9] bewiesen, dass[1]

$$\exp\,[\lambda(s\{\log t\} + \gamma)] = \frac{1}{s^\lambda}, \quad \lambda \text{ reell}; \ \gamma = \text{Eulersche Konstante}$$

deshalb besteht

$$\exp\,[-g(+0)\, s\{\log t\}] = e^{\gamma g(+0)}\, s^{g(+0)}.$$

Also kann (2.4) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$f = Ce^{as}(1 + \{G(t)\})\, s^{g(+0)}. \tag{2.5}$$

Hiermit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz II. *Sei $g(t) \in L'$; die verallgemeinerte allgemeine Lösung der homogenen Integralgleichung*

$$(t + a) f + f \ast g = 0$$

ist gleich

$$f = Ce^{as}(1 + \{G\})\, s^{g(+0)}$$

---

[1] MIKUSIŃSKI führt in [3] die sogenannte T^a-Operation für beliebiges komplexes a durch die folgende Definition ein:

$$T^a a = \{e^{at} a(t)\}, \qquad a \in L$$

und für beliebigen Operator

$$p = \frac{\{q\}}{\{r\}}, \qquad (q, r \in L, r \neq 0)$$

$$T^a p = \frac{T^a\, q}{T^a\, r}.$$

Es bestehen

$T^a\, x = x,$ (x beliebige Zahl)

$T^a(p_1 p_2) = T^a p_1\, T^a p_2,$ (p_1, p_2 beliebige Operatoren)

$T^a\, R(s) = R\,(s-a)\,,$ [$R(s)$ rationaler Ausdruck von s)

$T^a\, s^\lambda = (s-a)^\lambda$ (λ reell).

Für die Exponentialfunktionen gilt

$$T^a\, e^{\lambda w} = e^{\lambda T^a w} \qquad (w = \text{Logarithmus}).$$

Wenden wir nun die Operation T^a auf die Relation

$$\exp\,[\lambda(s\{\log t\} + \gamma)] = \frac{1}{s^\lambda}$$

an; so erhalten wir

$$\exp\,[\lambda\, T^a(s\{\log t\} + \gamma)] = \exp\,[\lambda((s - a)\{e^{at} \log t\} + \gamma)] = \frac{1}{(s - a)^\lambda}.$$

Unter Beachtung, dass auf Grund der Folgerung 2. von (1.11)

$$\int \frac{ds}{s - a} = (a - s)\{e^{at} \log t\},$$

lässt sich einsehen, dass die Identifizierung

$$-(s - a)\{e^{at} \log t\} - \gamma = \log\,(s - a)$$

berechtigt ist, und einfach

$$D \log\,(s - a) = \frac{1}{s - a}$$

gelten (siehe ebenfalls [12], wo nur der Fall $a = 0$ vorkommt). Wir werden sehen, dass bei der konkreten Lösung der untersuchten Integralgleichungen diese Identifizierung vorteilhaft gebraucht werden kann (siehe § 6).

wobei C ein beliebiger Zahlenoperator ist und

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{g(t) - g(+0)}{-t}\right\}^k}{k!} .$$

Die erhaltenen Lösungen sind endliche Distributionen.

Nun gehen wir zur Lösung der inhomogenen algebraischen Differentialgleichung (2.2) über. Bezeichnen wir zwei partikuläre Lösungen dieser Gleichung (falls solche existieren) mit f_1, bzw. f_2. Dann erfüllt

$$f = f_1 - f_2$$

die homogene Gleichung, d. h. wir erhalten die allgemeine Lösung von (2.2), wenn wir zur allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (2.5) eine partikuläre Lösung f_p der inhomogenen Gleichung (falls eine solche existiert) addieren. Nun zeigen wir, dass f_p existiert und durch die Methode der Variation der Konstanten bestimmt werden kann.

Sei

$$f_p = C(s)\, e^{as}(1 + \{G\})\, s^{g(+0)} .$$

f_p (2.2) eingesetzt, erhalten wir

$$DC(s) \cdot e^{as}(1 + \{G\})\, s^{g(+0)} = -h ,$$

$$DC(s) = -he^{-as}\, s^{-g(+0)} \frac{1}{1 + \{G\}} .$$

Da

$$\frac{1}{1 + \{G\}} = \exp\left\{\frac{g(t) - g(+0)}{t}\right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{g(t) - g(+0)}{t}\right\}^k}{k!} = 1 + \{G_0(t)\} ,$$

(siehe [3]), deshalb besteht

$$DC(s) = -he^{-as}\, s^{-g(+0)}(1 + \{G_0\}) . \tag{2.6}$$

Offensichtlich ist (2.6) eine endliche Distribution. Also existiert ihr algebraisches Integral. Für dieses Integral die Bezeichnung

$$C(s) = Ae^{-as} \tag{2.7}$$

einführend, ergibt sich

$$f = As^{g(+0)}(1 + \{G\}) . \tag{2.8}$$

Unter Berücksichtigung der Sätze I und II kann der folgende Satz ausgesagt werden.

Satz III. *Sei $g \in L'$; Die verallgemeinerte allgemeine Lösung der Integralgleichung $(t + a) f + f \ast g = h$ ist*

$$f = Ce^{as}(1 + \{G\})\, s^{g(+0)} + As^{g(+0)}(1 + \{G\})$$

d. h. die Summe der verallgemeinerten allgemeinen Lösung der homogenen Integralgleichung und einer verallgemeinerten partikulären Lösung der inhomogenen Integralgleichung. Die Lösungen sind endliche Distributionen.

Bemerkung. Es ist von Interesse, die Integralgleichung dritter Art (2.1) mit den in [1] und [2] behandelten Integralgleichungen erster und zweiter Art zu vergleichen.

Die homogenen Integralgleichungen erster bzw. zweiter Art vom Faltungstypus können nur die triviale Lösung haben. Dies ist eine einfache Konsequenz des Titchmarshschen Satzes. Die entsprechende inhomogene Gleichung hat genau eine verallgemeinerte Lösung. Die durch uns untersuchte Integralgleichung dritter Art hat unter der dem Kern $g(t)$ aufgelegten Einschränkung unendlich viele verallgemeinerte Lösungen, und diese sind alle endliche Distributionen.

Im folgenden untersuchen wir die Existenz der sogenannten Funktionslösungen oder L-Lösungen, und zwar zuerst im Falle der homogenen, und nachher im Falle der inhomogenen Gleichung.

§ 3. Die L-Lösungen der homogenen Integralgleichung

Laut Satz II ist die Operatorengestalt der allgemeinen Lösung

$$f = Ce^{as}\, s^{g(+0)}(1 + \{G\})\,.$$

Zur Existenz einer L-Lösung ausser der trivialen Lösung ($C = 0$) muss $g(+0) < 0$ erfüllt sein; ferner muss auch $a \leqq 0$ bestehen, was aus der Bedeutung des Verschiebungsoperators hervorgeht. Werden die entsprechenden Funktionen mit Hilfe der bekannten Formeln aufgeschrieben, erhält man den folgenden

Satz IV. *Sei $g(t) \in L'$. Die homogene Integralgleichung hat dann und nur dann L-Lösungen ausser der trivialen Lösung, wenn $g(+0) < 0$, und $a \leqq 0$. In diesem Falle gibt es unendlich viele L-Lösungen, die in der Gestalt,*

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ falls } 0 \leqq t \leqq -a\,, \\ C(t+a)^{-g(+0)-1} + C\int\limits_0^{t+a} G(t-\tau)\tau^{-g(0)-1}\,d\tau\,, \text{ falls } t > -a. \end{cases} \tag{3.1}$$

geschrieben werden können, wobei

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{\dfrac{g(t) - g(+0)}{-t}\right\}^k}{k!}\,.$$

§ 4. Die L-Lösungen der inhomogenen Integralgleichung $(t+a)\,f(t) + f(t) \ast g(t) = h(t)$

Laut Satz III ist

$$f = Ce^{as}(1 + \{G\})\, s^{g(+0)} + As^{g(+0)}\,(1 + \{G\})\,.$$

Da das Problem der L-Lösungen der homogenen Gleichung bereits besprohcen ist, bleibt nur noch die Untersuchung der partikulären Lösung

$$(4.1)\quad f_p = As^{g(+0)}[1+\{G\}] = -\,[\int he^{-as}\, s^{-g(+0)}(1+\{G_0\})\, ds]\, e^{as}\, s^{g(+0)}(1+\{G\})$$

übrig.

Der Wert des algebraischen Integrals in (4.1) kann auf Grund der Beziehung (1.11) über die Integration der endlichen Distributionen aufgeschrieben werden. Wir werden sehen, dass in vielen Fällen der Zusammenhang (1.11) sehr leicht zu bestimmen ist, das algebraische Integral lässt sich auf einfacher Weise aufschreiben, und die gesuchte L-Lösung kann auf diesem Wege erhalten werden. Im weiteren werden wir die Fälle $g(+0) \geqq 0$ und $g(+0) < 0$ gesondert behandeln.

Zuerst sei

$$g(+0) = k + \varepsilon\,, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqq \varepsilon < 1).$$

So tritt das folgende algebraische Integral auf:

$$(4.2)\qquad -\int he^{-as}\, s^{-k-\varepsilon}\,(1 + \{G_0\})ds = -\int e^{-as}\,[l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0]l^k\, ds\,.$$

Im Fall $a > 0$ sehen wir — unter Beachtung der Bedeutung des Verschiebungsoperators — dass der Integrand eine solche L-Funktion herstellt, die in der rechtsseitigen Umgebung des Nullpunktes gleich Null ist. So ergibt das algebraische Integral in Folge von (1.11)

$$(4.3)\qquad \left\{\frac{e^{-as}\, l^k[l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0]}{t}\right\}.$$

Im Falle $a = 0$ ist (4.3) im allgemeinen nicht gültig. Es kann jedoch ein sehr einfaches Kriterium für $h(t)$ angegeben werden; falls dieses erfüllt ist, so wird das algebraische Integral durch (4.3) tatsächlich hergestellt. Zu diesem Zwecke beweisen wir das folgende

Lemma 1. *Seien* $a(t)$, $\dfrac{a(t)}{t}$, $b(t) \in L$, *dann gilt*

$$\frac{a(t) \ast b(t)}{t} \in L\,.$$

Beweis:

Es besteht

$$\left\{\frac{a(t)}{t} \ast b(t)\right\} \in L \qquad \text{(siehe [10])},$$

infolgedessen gilt

$$\left|\int_0^T \frac{\int_0^t a(\tau)\, b(t-\tau)d\tau}{t}\, dt\right| \leqq \int_0^T \frac{\int_0^t |\, a(\tau)\,|\ |\, b(t-\tau)\,|\, d\tau}{t}\, dt \leqq$$

$$\leqq \int_0^T\!\!\int_0^t \frac{|\, a(\tau)\,|\ |\, b(t-\tau)\,|}{\tau}\, d\tau\, dt = \int_0^T \left(\frac{|\, a(t)\,|}{t} \ast |\, b(t)\,|\right) dt,$$

woraus das Lemma folgt. Falls $\frac{h(t)}{t} \in L$, so ist (4.3) wegen Lemma 1 ein Element von L, d. h. eine lokal integrierbare Funktion, und gleichzeitig ein algebraisches Integral von (4.2) ($a = 0$). So erhalten wir unter Berücksichtigung von (4.1), (4.2),

$$f_p = e^{as} s^{k+\varepsilon}(1 + \{G\}) \left\{ \frac{e^{-as}\, l^k(l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0)}{t} \right\}$$

oder einfacher geschrieben

$$f_p = (1 + \{G\})\, s^{k+\varepsilon} \left\{ \frac{l^k(l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0)}{t + a} \right\}, \qquad (a \geqq 0)\,. \tag{4.4}$$

Wir beweisen jetzt das folgende

Lemma 2. *Falls* $\frac{h(t)}{t} \in L$, *so ist* $\frac{lh(t)}{t}$ *total stetig und strebt gegen Null, wenn* $t \to 0$.

Beweis:

$$\int_0^t |\, h(\tau) \,|\, d\tau = \int_0^t \frac{|\, h(\tau)\,|^{1/2}}{\tau^{1/2}} \,|\, h(\tau)\,|^{1/2}\, \tau^{1/2}\, d\tau \leqq \left[\int_0^t \frac{|\, h(\tau)\,|}{\tau}\, d\tau \int_0^t |\, h(\tau)\,|\, \tau\, d\tau \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\int_0^t \frac{|\, h(\tau)\,|}{\tau}\, d\tau \int_0^t \frac{|\, h(\tau)\,|}{\tau}\, \tau^2\, d\tau \right]^{1/2} \leqq t \int_0^t \frac{|\, h(\tau)\,|}{\tau}\, d\tau\,,$$

woraus nach Division durch t bereits der zweite Teil des Lemmas folgt.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{lh(t)}{t}\right] = \frac{h(t)}{t} - \frac{lh(t)}{t^2}$$

und $\frac{lh(t)}{t^2}$ ist im Nullpunkt lokal integrierbar, wie dies durch partielle Integration nachgewiesen werden kann. Also ist auch der erste Teil des Lemmas richtig.

Korollär: *Falls* $\frac{h(t)}{t} \in L$, *so ist*

$$\frac{l^k\, h(t)}{t^k}$$

total stetig, und strebt gegen Null, wenn $t \to 0$, *und* $\frac{l^k h(t)}{t^{k+1}} \in L$, *für* $k = 1, 2, \ldots$

Nun legen wir der Funktion $h(t)$ die folgende Einschränkung auf. *Falls* $a = 0$, *es sei* $\frac{h(t)}{t} \in L$.

Unter Beachtung von Lemma 1 und 2 ist es leicht zu sehen, dass im Falle $a \geqq 0$ die $k - 1$-te Ableitung der Funktion

$$\left\{ \frac{l^k(l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0)}{t + a} \right\}$$

total stetig, und die k-te Ableitung lokal integrierbar ist, ferner — da die ersten $(k-1)$ Ableitungen im Nullpunkt gleich Null sind — gilt

$$s^k \left\{ \frac{l^k(l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0)}{t+a} \right\} = \left\{ \frac{l^k(l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0)}{t+a} \right\}^{(k)} =$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{k} (-1)^\varrho \varrho! \left\{ \frac{l^\varrho(l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0)}{(t+a)^{\varrho+1}} \right\}.$$

Da $l^\varrho = \left\{ \frac{t^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!} \right\}$, erhält man das erste Glied der Summe abgetrennt betrachtet, unter Beachtung, dass laut Satz IV wegen $g(+0) > 0$ die homogene Gleichung keine nichttriviale L-Lösung hat, auf Grund von (4.4) für den Spezialfall $\varepsilon = 0$ den

Satz V. *Seien $g(t) \in L'$, $g(+0) = k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; ferner*

$$h(t) \in L, \quad \textit{für} \quad a > 0\,,$$

$$\frac{h(t)}{t} \in L\,, \quad \textit{für} \quad a = 0\,.$$

Dann hat die Integralgleichung

$$(t+a)\, f(t) + f(t) \ast g(t) = h(t)$$

genau eine L-Lösung, und zwar die Funktion

$$f(t) = U(t) + U(t) \ast G(t)\,,$$

wobei

$$G(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{g(t) - g(+0)}{-t} \right\}^i}{i!}\,,$$

und

$$U(t) = \frac{h + h \ast G_0}{t+a} + \sum_{\varrho=1}^{k} (-1)^\varrho \varrho \, \frac{t^{\varrho-1} \ast h + t^{\varrho-1} \ast h \ast G_0}{(t+a)^{\varrho+1}}\,,$$

wo

$$G_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{g(t) - g(+0)}{t} \right\}^i}{i!}\,.$$

Im Falle $k = 0$ wird in der Formel von $U(t)$ anstatt der Summe Null gesetzt.

Falls $\varepsilon \neq 0$, so ist der Nachweis der Existenz einer L-Lösung etwas komplizierter. In diesem Falle nimmt (4.4) die folgende Gestalt an:

$$(4.5) \qquad (1 + \{G\})\, s^\varepsilon \sum_{\varrho=0}^{k} (-1)^\varrho \varrho! \left\{ \frac{l^\varrho(l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0)}{(t+a)^{\varrho+1}} \right\}.$$

Der Operator s^ε ist keine Funktion, also ist im allgemeinen auch (4.5) keine Funktion. Es ergibt sich die Frage, ob man eine L-Lösung erhalten kann.

Auf die Frage können wir eine bejahende Antwort erteilen. Auf Grund von Lemma 1 folgt dies aus

Lemma 3. *Falls* $\dfrac{h(t)}{t+a} \in L$, *so besteht*

$$s^{\varepsilon}\left\{\frac{l^{\varrho+\varepsilon}\, h(t)}{(t+a)^{\varrho+1}}\right\} = F_{\varrho}(t) \in L\,, \quad (0 < \varepsilon < 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots;\ a \geqq 0)\,. \tag{4.6}$$

Beweis. Zuerst sei $\varrho = 0$. Dann ist

$$s^{\varepsilon}\left\{\frac{l^{\varepsilon} h(t)}{t+a}\right\} = F_0(t)\,, \tag{4.7}$$

oder

$$\frac{l^{\varepsilon} h(t)}{t+a} = l^{\varepsilon} F_0(t)\,,$$

und auf Grund der Eigenschaften (1.2) der algebraischen Ableitung gilt

$$l^{\varepsilon} h(t) = l^{\varepsilon} t F(t) + \varepsilon\, l^{\varepsilon+1} F_0(t) + a l^{\varepsilon} F_0(t)\,.$$

Durch Dividierung mit l^{ε} und durch Einführung der Funktion $\int\limits_0^t F_0(\tau)d\tau =$ $= f_0(t)$ erhält man die folgende Differentialgleichung

$$(t+a) f_0'(t) + \varepsilon f_0(t) = h(t)\,. \tag{4.8}$$

Die einzige Lösung dieser Gleichung, welche die Bedingung $f_0(0) = 0$ erfüllt, ist

$$f_0(t) = (t+a)^{-\varepsilon} \int\limits_0^t \frac{h(\tau)}{(\tau+a)^{1-\varepsilon}}\, d\tau\,, \tag{4.9}$$

woraus

$$F_0(t) = f_0'(t) = \frac{h(t)}{t+a} - \varepsilon (t+a)^{-\varepsilon-1} \int\limits_0^t \frac{h(\tau)}{(\tau+a)^{1-\varepsilon}}\, d\tau\,. \tag{4.10}$$

folgt. Für $a = 0$ gilt

$$\left| t^{-\varepsilon} \int\limits_0^t \frac{h(\tau)}{\tau^{1-\varepsilon}}\, d\tau \right| \leqq t^{-\varepsilon} \int\limits_0^t \frac{|\,h(\tau)\,|}{\tau^{1-\varepsilon}}\, d\tau \leqq t^{-\varepsilon} \int\limits_0^t \frac{t^{\varepsilon}\,|\,h(\tau)\,|}{\tau}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{|\,h(\tau)\,|}{\tau}\, d\tau \to 0\,, \qquad \text{falls } t \to 0\,.$$

Ferner lässt sich durch partielle Integrierung des Ausdruckes

$$F_0(t) = \frac{h(t)}{t} - \varepsilon\, t^{-\varepsilon-1} \int\limits_0^t \frac{h(\tau)}{\tau^{1-\varepsilon}}\, d\tau$$

zeigen, dass $\int\limits_0^t F_0(\tau)d\tau = f_0(t)$ tatsächlich besteht. Falls $\varrho > 0$, so kann ähnlicherweise vorgegangen werden. Aus (4.6) folgt

$$l^{\varrho+\varepsilon} h(t) = (t + a)^{\varrho+1}\, l^{\varepsilon} F_{\varrho}(t)\,.$$

Die Durchführung der angezeigten Potenzierung im Ausdruck $(t + a)^{\varrho+1}$ und die Anwendung von Ableitungen höherer Ordnung auf die linke Seite führt wieder zur Lösung von Differentialgleichungen.

Der Einfachheit halber geben wir die ausführliche Berechnung für den Fall $a = 0$ an. Wir gehen hierbei vom Ausdruck

$$\frac{l^{\varrho+\varepsilon} h(t)}{t^{\varrho+1}} = l^{\varepsilon} F_{\varrho}(t)$$

aus. Durch $\varrho + 1$-fache algebraische Differenzierung erhält man

$$l^{\varrho+\varepsilon} h = (-1)^{\varrho+1} D^{\varrho+1}(l^{\varepsilon} F_{\varrho}) = (-1)^{\varrho+1} \sum_{i=0}^{\varrho+1} D^{\varrho+1-i}\, l^{\varepsilon}\, D^i \binom{\varrho+1}{i} F_{\varrho} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\varrho} (-1)^i \binom{\varrho+1}{i} \varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)\ldots(\varepsilon+\varrho-i)\, l^{\varrho+\varepsilon+1-i} D^i F_{\varrho} +$$

$$+ (-1)^{\varrho+1}\, l^{\varepsilon} D^{\varrho+1} F_{\varrho}\,,$$

und durch Dividierung mit dem Operator $l^{\varrho+\varepsilon}$

(4.11)

$$\sum_{i=0}^{\varrho} (-1)^i \binom{\varrho+1}{i} \varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+\varrho-i)\, l^{1-i} D^i F_{\varrho} + (-1)^{\varrho+1} s^{\varrho} D^{\varrho+1} F_{\varrho} = h.$$

Die Abtrennung der zu den Indizes $i = 0$ und $i = 1$ gehörenden Glieder ergibt

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+\varrho)\int\limits_0^t F_{\varrho}(\tau)\,d\tau + \varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+\varrho-1)(\varrho+1)\,tF_{\varrho}(t) + \\ &+ s^{\varrho}\{t^{\varrho+1}F_{\varrho}(t)\} + \sum_{i=2}^{\varrho}\binom{\varrho+1}{i}\varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+\varrho-i)s^{i-1}\{t^i F_{\varrho}(t)\} = h(t)\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Hierbei muss für den Ausdruck $\sum\limits_{i=2}^{\varrho}\ldots$ für $\varrho = 1$ Null gesetzt werden.

Nehmen wir an, dass die Funktion

$$t^{\varrho+1} F_{\varrho}(t)$$

„ϱ"-mal differenzierbar ist, und dass die erste, zweite, ..., $\varrho - 1$-ste Ableitungen im Nullpunkt gegen Null streben. Dann besteht

$$s^{i-1}\{t^i F_{\varrho}(t)\} = \sum_{\nu=0}^{i-2} \frac{(i-1)!\, i!}{\nu!\,(i-1-\nu)!\,(\nu+1)!}\, t^{\nu+1} F_{\varrho}^{(\nu)}(t) + t^i F_{\varrho}^{(i-1)}(t)\,. \tag{4.13}$$

$$i = 2, 3, \ldots, \varrho + 1.$$

Wird dieser Ausdruck in (4.12) eingesetzt, so gilt mit der Bezeichnung $\int\limits_0^t F_\varrho(\tau)\,d\tau = f_\varrho(t)$

$$t^2 f_\varrho''(t) + 2(1+\varepsilon)\,t f_\varrho'(t) + \varepsilon(\varepsilon+1) f_\varrho(t) = h(t)\,, \qquad \text{für } \varrho = 1, \tag{4.14}$$

$$t^{\varrho+1} f_\varrho^{(\varrho+1)}(t) + \sum_{\nu=0}^{\varrho-1} \frac{\varrho!(\varrho+1)!}{\nu!(\nu+1)!(\varrho-\nu)!}\, t^{\nu+1} f_\varrho^{(\nu+1)}(t) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\varrho} \sum_{\nu=0}^{i-2} \binom{\varrho+1}{i} \varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+\varrho-i)\, \frac{(i-1)!\,i!}{\nu!(\nu+1)!(i-1-\nu)!}\, t^{\nu+1} f_\varrho^{(\nu+1)}(t) +$$

für $\varrho > 1$

$$+ \sum_{i=2}^{\varrho} \varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+\varrho-i) \binom{\varrho+1}{i} t^i f_\varrho^{(i)}(t) +$$

$$+ \varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+\varrho-1)(\varrho+1)\, t f_\varrho'(t) + \varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+\varrho) f_\varrho(t) = h(t)\,.$$

Auf diese Weise haben wir die Bestimmung der Funktion $f_\varrho(t)$ auf eine Eulersche Differentialgleichung $\varrho + 1$-ter Ordnung zurückgeführt.

Die Gleichungen (4.14) sind analog zur Differentialgleichung

$$t f_0' + \varepsilon f_0 = h$$

die für den Fall $\varrho = 0$ erhalten wurde [siehe (4.8)]. Die Lösung von (4.14) lässt sich leicht bestimmen, wenn man beachtet, dass die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung von der Form

$$\sum_{j=1}^{\varrho+1} C_j\, t^{-\varepsilon-j+1}$$

ist. Durch Bestimmung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten ergibt sich

$$f_\varrho(t) = \sum_{j=1}^{\varrho+1} \gamma_j\, t^{-\varepsilon-j+1} \int_0^t \frac{h(\tau)}{\tau^{-j+2-\varepsilon}}\, d\tau\,,$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}, & \text{für } j > 1, \\[2ex] \displaystyle\sum_{\mu=2}^{\varrho+1} \frac{(-1)^\mu}{(\mu-1)!}, & \text{für } j = 1. \end{cases} \qquad \varrho = 1, 2, \ldots \tag{4.15}$$

Aus $\sum\limits_{j=1}^{\varrho+1} \gamma_j = 0$ folgt

$$F_\varrho(t) = f_\varrho'(t) = \sum_{j=1}^{\varrho+1} \gamma_j(-\varepsilon-j+1)\,t^{-\varepsilon-j} \int_0^t \frac{h(\tau)}{\tau^{-j+2-\varepsilon}}\, d\tau\,. \qquad \varrho = 1, 2, \ldots \tag{4.16}$$

Auf derselben Art, wie im Falle der Funktion $f_0(t)$ bewiesen wurde, lässt sich zeigen, dass $f_\varrho(t)$ ($\varrho = 1, 2, \ldots$) total stetig ist, und

$$f_\varrho(+0) = 0 . \qquad \varrho = 1, 2, \ldots$$

Ferner ist es auf Grund von (4.15) und (4.16) leicht ersichtlich, dass

$$t^{\varrho+1} F_\varrho(t) \qquad \varrho = 1, 2, \ldots$$

$\varrho - 1$-fach stetig differenzierbar ist, eine total stetige $\varrho - 1$-ste Ableitung besitzt, und diese sowie alle Ableitungen niedrigerer Ordnung im Nullpunkt gegen Null streben.

Bemerkung. Lemma 3 wurde im Fall $\varrho > 0$ nur für $a = 0$ bewiesen. Es ist leicht ersichtlich, dass für $a > 0$ die Differentialgleichungen (4.14) gültig bleiben, wenn in ihren Koeffizienten anstatt Potenzen von t die entsprechenden Potenzen von $t + a$ gesetzt werden. Demgemäss bestehen (4.15) und (4.16) die allgemeineren Zusammenhänge

$$\begin{aligned} f_\varrho(t) &= \sum_{j=1}^{\varrho+1} \gamma_j (t+a)^{-\varepsilon-j+1} \int_0^t \frac{h(\tau)}{(\tau+a)^{-j+2-\varepsilon}}\, d\tau , \\ F_\varrho(t) &= \sum_{j=1}^{\varrho+1} \gamma_j (-\varepsilon - j + 1)(t+a)^{-\varepsilon-j} \int_0^t \frac{h(\tau)}{(\tau+a)^{-j+2-\varepsilon}}\, d\tau , \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$(a \geqq 0;\ \varrho = 1, 2, \ldots) .$$

Unter Berücksichtigung von Satz IV gilt

Satz VI. *Seien* $g(t) \in L'$ *und* $g(+0) = k + \varepsilon$, $(k = 0, 1, \ldots;\ 0 < \varepsilon < 1;$ $a \geqq 0)$ *und*

$$h(t) \in L , \quad \textit{für } a > 0 ,$$

$$\frac{h(t)}{t} \in L , \quad \textit{für } a = 0.$$

Dann hat die Integralgleichung

$$(t + a) f(t) + f(t) \ast g(t) = h(t)$$

eine einzige L-Lösung, die in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$f(t) = U(t) + U(t) \ast G(t) ,$$

wobei

$$G(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left\{\dfrac{g(t) - g(+0)}{-t}\right\}^i}{i!} ,$$

und

$$U(t) = \frac{h(t) + h(t) \ast G_0(t)}{t+a} - \varepsilon (t+a)^{-\varepsilon-1} \int_0^t \frac{h(\tau) + h(\tau) \ast G_0(\tau)}{(\tau+a)^{1-\varepsilon}}\, d\tau +$$

$$+ \sum_{\varrho=1}^{k} (-1)^\varrho \varrho! \sum_{j=1}^{\varrho+1} \gamma_j (-\varepsilon - j + 1)(t+a)^{-\varepsilon-j} \int_0^t \frac{h(\tau) + h(\tau) \ast G_0(\tau)\, d\tau}{(\tau+a)^{-j+2-\varepsilon}}$$

wo

$$G_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{g(t) - g(+0)}{t}\right\}^i}{i\,!}.$$

Für $k = 0$ muss in der Formel von $U(t)$ der Ausdruck mit dem Summenzeichen gleich Null gesetzt werden.

Bemerkung. Es ist offensichtlich, dass Satz VI durch Wahl von $\varepsilon = 0$ in Satz V übergeht, also ist Satz V ein Spezialfall von Satz VI.

Nun sei $g(+0) = -k + \varepsilon$, $(k = 1, 2, \ldots; 0 \leqq \varepsilon < 1)$.

Im Falle $g(+0) < 0$ weicht die Gestalt der L-Lösungen der inhomogenen Gleichung von der für $g(+0) \geqq 0$ erhaltenen Form ab.

Es erweist sich für zweckmässig, die Fälle $a > 0$ und $a = 0$ zu unterscheiden. Ist nämlich $a = 0$, so hat die homogene Gleichung laut Satz IV unendlich viele L-Lösungen, und dasselbe kann — wie wir sehen werden — auch für die inhomogene Gleichung bestehen.

Also sei erst

$$a > 0\,.$$

Dann ist die Gestalt des in (4.1) auftretenden algebraischen Integrals

$$-\int h e^{-as} s^{k-\varepsilon}(1 + \{G_0\})\, ds = -\int e^{-as} s^k (l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0)\, ds\,.$$

Schreiben wir das algebraische Integral auf Grund von (1.11) unter Berücksichtigung von (4.1) auf, so erhalten wir für die verallgemeinerte partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$f_p = (1 + \{G\})\, s^{2+\varepsilon} \left\{(t + a)^{k+1} \int_0^t \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{(\tau + a)^{k+2}}\, d\tau\right\}. \tag{4.18}$$

Es ist leicht einzusehen, dass die Multiplikation mit dem Operator s^2 die zweifache Differentiation der in den geschweiften Klammern stehenden Funktion bedeutet. Als Ergebnis dieser zweifachen Differentiation bekommt man die Funktion

$$\frac{l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0}{t + a} + k\, \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{(t + a)^2} +$$

$$+ k(k + 1)\,(t + a)^{k-1} \int_0^t \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{(\tau + a)^{k+2}}\, d\tau\,.$$

Die partielle Integration ergibt

$$\int_0^t \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{(\tau + a)^{k+2}}\, d\tau = -\frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{(k + 1)\,(t + a)^{k+1}} +$$

$$+ \frac{1}{k + 1} \int_0^t \frac{l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0}{(\tau + a)^{k+1}}\, d\tau\,.$$

Werden alle Substitutionen ausgeführt, so erhält man

$$(4.19)\quad f_p = (1 + \{G\})\, s^\varepsilon \left\{ \frac{l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0}{t + a} + k(t + a)^{k-1} \int_0^t \frac{l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0}{(\tau + a)^{k+1}}\, d\tau \right\}.$$

Für den Fall $\varepsilon = 0$ haben wir die gesuchte L-Lösung vor uns. Der Operator stellt jedoch auch für $\varepsilon \neq 0$ eine Funktion her. Dies folgt einerseits aus Lemma 3, anderseits aus dem Umstand, dass in (4.19) das zweite Glied in der Klammer eine total stetige Funktion ist, und so

$$s^\varepsilon \left\{ k(t + a)^{k-1} \int_0^t \frac{l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0}{(\tau + a)^{k+1}}\, d\tau \right\} = s l^{1-\varepsilon} \{\ldots\} =$$

$$= s \left\{ \frac{t^{-\varepsilon}}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \right\} \{\ldots\} = \frac{t^{-\varepsilon}}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \ast V_k(t)\,,$$

wobei

$$V_k(t) = \begin{cases} \dfrac{l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0}{(t + a)^2}\,, & \text{für } k = 1 \\[2ex] k(k-1)\,(t+a)^{k-2} \displaystyle\int_0^t \frac{l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0}{(\tau + a)^{k+1}}\, d\tau + k\, \frac{l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0}{(t + a)^2}\,, & \text{für } k > 1. \end{cases} \tag{4.20}$$

Also gilt unter Berücksichtigung von Satz IV.

Satz VII. *Seien* $g(t) \in L'$, $g(+0) = -k + \varepsilon$, $(k = 1, 2, \ldots; 0 \leqq \varepsilon < 1)$, $a > 0$, $h(t) \in L$. *Dann hat die Integralgleichung*

$$(t + a) f(t) + f(t) \ast g(t) = h(t)$$

genau eine L-Lösung, und zwar

$$f(t) = U(t) + U(t) \ast G(t)\,,$$

wobei

$$G(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left\{ \dfrac{g(t) - g(+0)}{-t} \right\}^i}{i\,!}\,,$$

$$U(t) = \frac{h + h \ast G_0}{t + a} - \varepsilon(t + a)^{-\varepsilon-1} \int_0^t \frac{h + h \ast G_0}{(\tau + a)^{1-\varepsilon}}\, d\tau + \frac{t^{-\varepsilon}}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \ast V_k\,.$$

$V_k(t)$ *ist durch Formel* (4.20) *gegeben und*

$$G_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left\{ \dfrac{g(t) - g(+0)}{t} \right\}^i}{i\,!}\,.$$

Im Spezialfall $\varepsilon = 0$ ist

$$U(t) = \frac{h + h \ast G_0}{t + a} + k(t + a)^{k-1} \int_0^t \frac{h + h \ast G_0}{(\tau + a)^{k+1}} d\tau \,.$$

Nun folgt der Fall

$$a = 0 \,.$$

Dann ist das algebraische Integral in (4.1) von der Form

$$-\int h s^{k-\varepsilon}(1 + \{G_0\})\, ds = -\int s^k (l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0)\, ds \,.$$

Wir das algebraische Integral auf Grund von (1.11) aufgeschrieben, so erhält man unter Beachtung von (4.1) als eine verallgemeinerte partikuläre Lösung der inhomogenen Integralgleichung

$$f_p = (1 + \{G\}) s^{2+\varepsilon} \left\{ t^{k+1} \int_\Omega^t \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{\tau^{k+2}} d\tau \right\} \tag{4.21}$$

($\Omega > 0$ beliebig).

Wie ersichtlich, ist die in geschweiften Klammern stehende Funktion für $t > 0$ stetig differenzierbar, und strebt mit $t \to 0$ geben Null (siehe [5], [7]).

Wir zeigen, dass ihre Ableitung auch in Nullpunkt existiert und dort den Wert Null annimmt, ferner dass ihre zweite Ableitung unter gewissen Einschränkungen bezüglich $h(t)$ existiert und lokal integrierbar ist. Die $h(t)$ aufgelegte Einschränkung ist dieselbe, wie im entsprechenden Fall bei $g(+0) > 0$ nämlich:

Falls $a = 0$, so sei $\dfrac{h(t)}{t} \in L$.

Die Differentiation der untersuchten Funktion ergibt

$$\left\{ \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{t} + (k+1)\, t^k \int_\Omega^t \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{\tau^{k+2}} d\tau \right\} . \tag{4.22}$$

Das erste Glied in (4.22) strebt laut Lemma 1 und 2 gegen Null, wenn $t \to 0$. Dasselbe lässt sich durch Anwendung der Bernouilli—l'Hospitalschen Regel bezüglich des zweiten Gliedes einsehen.

Nun muss noch gezeigt werden, dass die Ableitung von (4.22) eine lokal integrierbare Funktion, also gleichzeitig ein Mikusińskischer Operator ist. Durch Differentiation von (4.22) erhält man die Funktion

$$\begin{aligned} &\frac{l^\varepsilon h + l^\varepsilon h \ast G_0}{t} + k \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{t^2} + \\ &+ k(k+1) t^{k-1} \int_\Omega^t \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{\tau^{k+2}} d\tau \,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ganz ähnlich, wie beim Beweis der Formel (4.19) führt die partielle Integration zu

$$\int_{\Omega}^{t} \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{\tau^{k+2}} d\tau = - \frac{l^{1+\varepsilon} h + l^{1+\varepsilon} h \ast G_0}{(k+1)\, t^{k+1}} + \gamma + $$

$$+ \frac{1}{k+1} \int_{\Omega}^{t} \frac{l^{\varepsilon} h + l^{\varepsilon} h \ast G_0}{\tau^{k+1}} d\tau$$

wo γ eine durch bestimmte Konstante ist. So erhalten wir für (4.23) die einfachere Form

$$\frac{l^{\varepsilon} h + l^{\varepsilon} h \ast G_0}{t} + \gamma\, k(k+1)\, t^{k-1} + k t^{k-1} \int_{\Omega}^{t} \frac{l^{\varepsilon} h + l^{\varepsilon} h \ast G_0}{\tau^{k+1}} d\tau \,. \tag{4.24}$$

Das erste Glied ist wegen $h(t)/t \in L$ und Lemma 1 lokal integrierbar, das zweite Glied ist trivialerweise lokal integrierbar. Die lokale Integrierbarkeit des dritten Gliedes lässt sich etwas schwieriger einsehen. Hierzu beweisen wir erst das folgende

Lemma 4. *Falls*

$$\overline{F(t)} \in L \,,$$

so gilt

$$t^{k-1} \int_{\Omega}^{t} \frac{\bar{F}(\tau)}{\tau^k} d\tau \in L \,. \qquad k = 1, 2, \ldots; \ \Omega > 0 \,.$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma für $| \bar{F}(t) |$, woraus die Gültigkeit für $\bar{F}(t)$ unmittelbar folgt.

Sei

$$\Phi(t) = \int_0^t | \bar{F}(\tau) | \, d\tau \,.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int_{\omega}^{1} t^{k-1} dt \int_{\Omega}^{t} \frac{| \bar{F}(\tau) |}{\tau^k} d\tau = \left[\frac{t^k}{k} \int_{\Omega}^{t} \frac{| \bar{F}(\tau) | \, d\tau}{\tau^k} \right]_{\omega}^{1} - \frac{1}{k} \int_{\omega}^{1} | \bar{F}(\tau) | \, d\tau \,,$$

so muss nur gezeigt werden, dass

$$\lim_{\omega \to 0} \omega^k \int_{\omega}^{\Omega} \frac{| \bar{F}(\tau) | \, d\tau}{\tau^k}$$

existiert. Dies werden wir im folgenden nachweisen. Die partielle Integration ergibt

$$\int_{\omega}^{\Omega} \frac{|\bar{F}(\tau)|\,d\tau}{\tau^k} = \frac{1}{\Omega^k}\int_0^{\Omega} |\bar{F}(\tau)|\,d\tau - \frac{1}{\omega^k}\int_0^{\omega} |\bar{F}(\tau)|\,d\tau +$$

$$+ k\int_{\omega}^{\Omega} \frac{\int_0^{\tau} |\bar{F}(u)|\,du}{\tau^{k+1}}\,d\tau = \frac{1}{\Omega^k}\Phi(\Omega) - \frac{1}{\omega^k}\Phi(\omega) +$$

$$+ k\int_{\omega}^{\Omega} \frac{\Phi(\tau)\,d\tau}{\tau^{k+1}} \leqq \frac{1}{\Omega^k}\Phi(\Omega) - \frac{1}{\omega^k}\Phi(\omega) + k\Phi(\Omega)\int_{\omega}^{\Omega} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{\Omega^k}\Phi(\Omega) - \frac{1}{\omega^k}\Phi(\omega) + \Phi(\Omega)\left(\frac{1}{\omega^k} - \frac{1}{\Omega^k}\right) = \frac{\Phi(\Omega) - \Phi(\omega)}{\omega^k}.$$

Daher ist

$$\omega^k \int_{\omega}^{\Omega} \frac{|\bar{F}(\tau)|\,d\tau}{\tau^k} \leqq \Phi(\Omega) - \Phi(\omega) \to \Phi(\Omega), \qquad \text{für } \omega \to 0.$$

Sei

$$\bar{F}(t) = \frac{l^{\varepsilon} h + l^{\varepsilon} h * G_0}{t} \in L.$$

Durch Anwendung von Lemma 4 sieht man ein, dass auch das letzte Glied von (4.24) lokal integrierbar ist. Also bedeutet in (4.21) die Multiplikation des in den zweiten geschweiften Klammern stehenden Ausdruckes mit s^2 die zweifache Differentiation, und das ergibt in Betracht von (4.24)

$$(4.25) \qquad \begin{aligned} f_p = (1 + \{G\})\, s^{\varepsilon} \Bigg\{ & \frac{l^{\varepsilon} h + l^{\varepsilon} h * G_0}{t} + \gamma\, k(k+1)\, t^{k-1} + \\ & + k t^{k-1} \int_{\Omega}^{t} \frac{l^{\varepsilon} h + l^{\varepsilon} h * G_0}{\tau^{k+1}}\, d\tau \Bigg\}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Spezialfall $\varepsilon = 0$. Da laut Satz IV die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Integralgleichung

$$C(1 + \{G\})\{t^{k-1}\}$$

ist, und in Betracht von Satz III gilt der folgende

Satz VIII. *Seien* $g(t) \in L'$ *und* $g(+0) = -k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *ferner* $\frac{h(t)}{t} \in L$. *Eine partikuläre L-Lösung der inhomogenen Integralgleichung*

$$tf(t) + f(t) * g(t) = h(t)$$

ist gleich

$$f_p = U(t) + U(t) \ast G(t)\,,$$

wobei

$$U(t) = \frac{h(t) + h(t) \ast G_0(t)}{t} + kt^{k-1} \int\limits_{\Omega}^{t} \frac{h(\tau) + h(\tau) \ast G_0(\tau)}{\tau^{k+1}}\, d\tau\,.$$

Die Integralgleichung hat unendlich viele L-Lösungen. Die allgemeine Lösung ist

$$f = f_p + C(t^{k-1} + \int\limits_0^t G(t-\tau)\,\tau^{k-1}\,d\tau)\,.$$

Bemerkung. Die Änderung der Konstante $\Omega > 0$ ergibt nichts Neues, da sie offensichtlich einer Änderung der Konstante C entspricht.

Im Falle $\varepsilon \neq 0$ wird durch den Operator (4.25) im allgemeinen keine Funktion hergestellt. Da laut Satz IV die homogene Integralgleichung nichttriviale L-Lösungen besitzt, gilt

Satz IX. *Seien* $g(t) \in L'$ *und* $g(+0) = -k + \varepsilon$, $(k = 1, 2, \ldots; 0 < \varepsilon < 1)$, $\dfrac{h(t)}{t} \in L$. *Die Integralgleichung*

$$tf(t) + f(t) \ast g(t) = h(t)$$

hat dann und nur dann eine L-Lösung, wenn der Operator

$$s^{\varepsilon}\left\{t^{k-1} \int\limits_{\Omega}^{t} \frac{l^{\varepsilon}h + l^{\varepsilon}h \ast G_0}{\tau^{k+1}}\,d\tau\right\}$$

eine Funktion ist. In diesem Falle gibt es unendlich viele L-Lösungen, die in der folgenden Form geschrieben werden können:

$$f = f_p + C\big(t^{k-\varepsilon-1} + \int\limits_0^t G(t-\tau)\,\tau^{k-\varepsilon-1}\,d\tau\big)\,.$$

Aus einem Vergleich der Sätze VI und IX geht es hervor, dass im Falle $a = 0$ das Vorzeichen der Grösse $g(+0)$ bei der Beurteilung der Existenz der gesuchten L-Lösungen sehr wesentlich ist. Für $g(+0) \geqq 0$ hat die inhomogene Integralgleichung genau eine L-Lösung, während für $g(+0) < 0$ entweder keine, oder unendlich viele L-Lösungen existieren. Diese Ergebnisse fassen wir zusammen im (alternativen)

Satz X. *Seien* $g(t) \in L'$, $\dfrac{h(t)}{t} \in L$.

Dann hat entweder die Integralgleichung

$$tf(t) + f(t) \ast g(t) = h(t)$$

genau eine L-Lösung, oder hat die entsprechende homogene Integralgleichung

$$tf(t) + f(t) \ast g(t) = 0$$

nichttriviale L-Lösungen. Im letzteren Fall hat die inhomogene Gleichung entweder keine, oder unendlich viele L-Lösungen.

Bemerkung 1. Wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde, kann im Falle $a > 0$ die Integralgleichung (1) als eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art in der folgenden Form geschrieben werden:

$$f(t) + \int_0^t f(\tau) \frac{g(t-\tau)}{t+a} \, d\tau = \frac{h(t)}{t+a} .$$

Die L-Lösung dieser Gleichung lässt sich mit einer Neumannschen Reihe aufschreiben und offensichtlich stimmt das mit Anwendung der Operatorenrechnung erhaltene Ergebnis damit überein.

Trotzdem sind die mit der klassischen Methode und die mit Anwendung der Operatorenmethode erhaltenen Lösungen von gänzlich verschiedener Gestalt. In der letzteren tritt nämlich die Grösse $g(+0)$ auf, deren Existenz wir von vornherein vorausgesetzt haben. Die Neumannsche Reihe enthält selbstverständlich nicht $g(+0)$ (diese Grösse muss nicht einmal existieren).

Bemerkung 2. Die L-Lösungen bzw. ihre Existenzkriterien haben wir nur für den Fall $a \geq 0$ untersucht. Eine entsprechende Untersuchung für $a < 0$ ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden. In solchen Fällen ist es zweckmässiger, im konkreten Fall [für gegebenes $h(t)$ und $g(t)$] von den im Satz III gegebenen verallgemeinerten Lösungen ausgehend, die Existenz der eventuellen L-Lösungen zu untersuchen.

§ 5. Integralgleichungen mit dem Kern $g(t) = \lambda t^\alpha$, $(-1 < \alpha < 0)$

In unseren bisherigen Untersuchungen haben wir solche Integralgleichungen vom Typus (1) betrachtet, bei denen dem Kern die Voraussetzung

$$g(t) \in L' \tag{5.1}$$

auferlegt war. Die Operatorenrechnung kann jedoch in Spezialfällen erfolgreich auch zur Lösung solcher Integralgleichungen dritter Art angewendet werden, deren Kern $g(t)$ (5.1) nicht erfüllt. Als einen solchen Spezialfall werden wir nun den Kern

$$g(t) = \lambda t^\alpha , \qquad (-1 < \alpha < 0;\ \lambda \text{ reell},\ \lambda \neq 0) \tag{5.2}$$

untersuchen. Wie wir sehen werden, lässt sich jedoch sogar für den speziellen Kern von der Form (5.2) keine ähnlich allgemeine Methode angeben, wie in den bisher besprochenen Abschnitten. Dies hängt — unter anderem — mit dem Problem der algebraischen Integrierbarkeit der Operatoren zusammen.

Zuerst untersuchen wir die homogene Integralgleichung

$$(t + a)f(t) + f(t) * g(t) = 0 . \tag{5.3}$$

Wie in § 2 gezeigt wurde, ist die verallgemeinerte allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$f = Ce^{as}\, e^{\int g\, ds} , \tag{5.4}$$

falls der Operator $e^{\int g ds}$ überhaupt existiert. Wie wir dort gesehen haben, ist dies immer der Fall, wenn (5.1) besteht.

Ist

$$g(t) = \lambda t^a = \frac{\lambda\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \qquad (-1 < a < 0),$$

so ist das algebraische Integral laut (1.11)

$$\int g ds = \frac{\lambda\Gamma(a+1)}{-as^a} = -\lambda\Gamma(a)\, s^{-a}$$

und

(5.5) $$f = Ce^{as} \exp\left[-\lambda\,\Gamma(a)s^{-a}\right], \qquad (-1 < a < 0)$$

was offensichtlich existiert. Da $\Gamma(a) < 0$, also stellt wegen [3] der Operator $\exp\left[-\lambda\Gamma(a)s^{-a}\right]$ nur dann eine Funktion her, wenn $\lambda < 0$; und in diesem Fall besteht

$$\exp\left[-\lambda\Gamma(a)s^{-a}\right] = Q[\lambda\Gamma(a), t] =$$

$$= \left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\big(-xt + x^a\,\lambda\Gamma(a)\cos a\pi\big)\sin\left[\lambda\Gamma(a)\,x^a\sin a\pi\right]dx\right\}.$$

Unter Berücksichtigung der Bedeutung des Operators e^{as} gilt der folgende

Satz XI. *Sei* $g(t) = \lambda t^a$, $(-1 < a < 0$; *λ reell*, $\lambda \neq 0)$. *Dann ist die verallgemeinerte allgemeine Lösung der homogenen Integralgleichung*

$$(t + a)f + f \ast g = 0$$

gleich

$$f = Ce^{as} \exp\left[-\lambda\Gamma(a)s^{-a}\right], \quad (C \text{ eine beliebige Konstante}),$$

welche dann und nur dann, wenn $a \leqq 0$ *und* $\lambda < 0$ *bestehen, sich auf die nichttriviale L-Lösung*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leqq t \leqq -a, \\ -\dfrac{C}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\infty \exp\left[-x(t+a) + x^a\,\lambda\Gamma(a)\cos a\pi\right]\sin\left[\lambda\Gamma(a)\,x^a\sin a\pi\right]dx\,, & \\ & \text{für } t > -a\,. \end{cases}$$

reduziert.

Gehen wir nun auf die Untersuchung des inhomogenen Falles über. Laut Satz I entspricht der Integralgleichung

$$(t + a)f + f \ast g = h$$

die algebraische Differentialgleichung

(5.6) $$Df - af - fg = -h\,.$$

Es ist leicht einzusehen, dass auch im Falle eines Kernes vom Typus (5.2) für zwei partikuläre Lösungen von (5.6) — falls solche existieren —

$$f = f_1 - f_2 = Ce^{as}\exp\left[-\lambda\Gamma(a)s^{-a}\right]$$

gilt, d. h. man erhält die allgemeine Lösung von (5.6), wenn man zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung eine partikuläre Lösung f_p der inhomogenen Gleichung addiert (falls f_p existiert).

Im folgenden wollen wir diese partikuläre Lösung f_p mit der Methode der Variation der Konstanten bestimmen. Wir erhalten so

$$DC(s)\left(e^{as} \exp\left[-\lambda\Gamma(a)s^{-a}\right]\right) = -h\,,$$

und

$$C(s) = -\int he^{-as} \exp\left[\lambda\Gamma(a)\, s^{-a}\right] ds\,, \tag{5.7}$$

falls der Operator (5.7) überhaupt existiert. Vom Gesichtspunkt der Existenz aus hat das Vorzeichen der Konstanten λ eine grundlegende Rolle. Im folgenden werden wir zwischen den Fällen $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$ Unterschied machen.

Zuerst sei $\lambda > 0$.

In diesem Fall stellt wegen $\Gamma(a) < 0$ in (5.7) der Ausdruck $\exp\left[\lambda\Gamma(a)s^{-a}\right]$ eine Funktion her, demzufolge existiert (5.7) sicherlich und bildet eine endliche Distribution, die laut (1.11) einfach aufgeschrieben werden kann.

Ist $a \geqq 0$, so ziehen wir in Betracht:

1. die Funktion

$$\exp\left[\lambda\Gamma(a)s^{-a}\right]$$

ist unendlich oft differenzierbar, und alle Ableitungen verschwinden, falls $t \to 0$ (siehe [3]);

2. wenn die eine Funktion eines Faltungsproduktes unendlich oft differenzierbar ist, und alle Ableitungen verschwinden, falls $t \to 0$, so besitzt das Faltungsprodukt dieselbe Eigenschaft;

3. Die Konsequenz 1 von (1.11).

Aus diesen drei Zusammenhängen erhalten wir, dass

$$C(s) = e^{-as}\left\{\frac{h(t) * Q\left(-\lambda\Gamma(a), t\right)}{t + a}\right\}, \qquad a \geqq 0\,, \tag{5.8}$$

wobei

$$Q(-\lambda\Gamma(a), t) = \exp\left[\lambda\Gamma(a)s^{-a}\right], \quad (\lambda > 0;\ -1 < a < 0).$$

Also ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung von der Gestalt

$$f_p = C(s)\, e^{as} \exp\left[-\lambda\Gamma(a)\, s^{-a}\right], \tag{5.9}$$

was insbesondere für $a \geqq 0$ sich auf den Operator

$$f_p = \exp\left[-\lambda\Gamma(a)\, s^{-a}\right]\left\{\frac{h(t) * Q(-\lambda\Gamma(a), t)}{t + a}\right\} \tag{5.10}$$

reduziert.[2]

So gilt der folgende

Satz XII. *Seien* $g(t) = \lambda t^{a}$, $(-1 < a < 0;\ \lambda > 0)$, $h(t) \in L$. *Die verallgemeinerte allgemeine Lösung der inhomogenen Integralgleichung*

$$(t + a) f(t) + f(t) * g(t) = h(t)$$

[2] Es wäre von Interesse, nachzuweisen, unter welchen Bedingungen bezüglich $h(t)$ der Operator (5.10) eine Funktion ist. Dem Verfasser ist es bis jetzt nicht gelungen, einen derartigen Beweis anzugeben.

ist gleich

$$f = Ce^{as} \exp\left[-\lambda\Gamma(a)\, s^{-a}\right] + f_p\,, \quad (C \textit{ beliebige Konstante})$$

wobei

$$f_p = C(s)\, e^{as} \exp\left[-\lambda\Gamma(a)\, s^{-a}\right].$$

Hier kann $C(s)$ *auf Grund von* (5.7) *bzw.* (1.11) *bestimmt werden.*

Ist $a \geqq 0$, *so ist*

$$f_p = \left\{\frac{h(t) * Q[-\lambda\Gamma(a), t]}{t+a}\right\} \exp\left[-\lambda\Gamma(a)\, s^{-a}\right],$$

wobei

$$Q[-\lambda\Gamma(a), t] = \exp\left[\lambda\Gamma(a) s^{-a}\right].$$

Die Integralgleichung

$$(t+a)\, f(t) + f(t) * g(t) = h(t)$$

kann höchstens eine L-Lösung haben.

Bemerkung. Wie ersichtlich, können wir die gesuchte L-Lösung nicht in expliziter Form als Funktion von $h(t)$ aufschreiben, wie wir dies in § 4 getan haben.

Nun sei

$$\lambda < 0\,.$$

Die Methode der Variation der Konstanten ergibt

$$C(s) = -\int h e^{-as} \exp\left[\lambda\Gamma(a) s^{-a}\right] ds\,. \tag{5.11}$$

Der Operator

$$\exp\left[\lambda\Gamma(a) s^{-a}\right] \qquad (\lambda < 0)$$

ist keine endliche Distribution.[3]

---

[3] Es wurde durch MIKUSIŃSKI [11] bewiesen, dass z. B. der Operator

$$e^{\sqrt{s}}$$

überhaupt keine Distribution ist. Sein algebraisches Integral existiert jedoch und

$$\int e^{\sqrt{s}}\, ds = 2(\sqrt{s}-1)\, e^{\sqrt{s}},$$

was mit Hilfe einer einfachen algebraischen Differentiation einzusehen ist. So ist die algebraische Integrierbarkeit nicht auf solche Operatoren beschränkt, die endliche Distributionen sind, und es können leicht solche algebraisch integrierbare Operatoren angegeben werden, die keine Distributionen sind. Z. B. ist jedoch nicht bekannt, dass die Operatoren von der Form

$$f(t)\, e^{\sqrt{s}}, \qquad f(t) \in L$$

m allgemeinen algebraisch integrierbar sind.

Ist

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{s}},$$

so gilt

$$\int \frac{e^{\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}\, ds = e^{\sqrt{s}},$$

ist aber

$$f(t) = \frac{1}{s},$$

so ist die Existenz des Operators $\int \frac{e^{\sqrt{s}}}{s}\, ds$ nicht bewiesen.

Also ist die Existenz des Operators (5.11) in Allgemeinheit nicht entschieden. Es können jedoch solche Funktionen $h(t) \in L$ angegeben werden, für die (5.11) sicherlich existiert.

Wir werden diesen Weg befolgen und uns auf spezielle $h(t)$ beschränken; so werden wir interessante Ergebnisse für Spezialfälle erhalten.

Nun sei

$$h(t) = A \exp [\Lambda s^{-a}] , \tag{5.12}$$

wo entweder $A \in L$, oder A ein Zahlenoperator ist, und

$$\leqq \Lambda - \lambda \Gamma(a) , \tag{5.13}$$

d. h.

$$\Lambda + \lambda \Gamma(a) = d \leqq 0 .$$

Dann ist auf Grund von (5.11)

$$C(s) = - \int A e^{-as} \exp [d s^{-a}] \, ds .$$

Wir haben so das algebraische Integral einer endlichen Distribution erhalten.

Im weiteren müssen zwei Fälle unterschieden werden:

I. Gleichzeitig kann nicht A ein Zahlenoperator und $d = 0$ sein; so ist auf Grund von (1.11)

$$C(s) = s^2 e^{-as} \{u(t)\} ,$$

und die partikuläre Lösung

$$f_p = C(s) e^{as} \exp [- \lambda \Gamma(a) s^{-a}] = s^2 \{Q[\lambda \Gamma(a), t]\} \{u(t)\} = \tag{5.14}$$

$$= Q''_{tt}[\lambda \Gamma(a), t] * u(t) .$$

II. A ist ein Zahlenoperator und $d = 0$.

Dann ist

$$C(s) = - A \int e^{-as} \, ds = \begin{cases} \dfrac{A e^{-as}}{a} , & \text{für} \quad a \neq 0 , \\ - As , & \text{für} \quad a = 0 . \end{cases}$$

Also ist die partikuläre Lösung

$$f_p = C(s) \, e^{as} \exp [- \lambda \Gamma(a) \, s^{-a}] = \begin{cases} \dfrac{A}{a} Q[\lambda \Gamma(a), t] , & \text{für} \quad a \neq 0 , \\ - As \exp [- \lambda \Gamma(a) s^{-a}] = \\ = - A Q'_t[\lambda \Gamma(a), t] , & \text{für} \quad a = 0 . \end{cases}$$

Da laut Satz XI die homogene Gleichung für $a \leqq 0$ nichttriviale L-Lösungen besitzt, so lassen sich unsere erhaltenen Ergebnisse zusammenfassen im folgenden

Satz XIII. *Seien* $g(t) = \lambda t^a$, $(-1 < a < 0)$, $\lambda < 0$, $h(t) = A \exp (\Lambda s^{-a}) = A \{Q(-\Lambda, t)\}$, $A(t) \in L$ *oder* A *ein Zahlenoperator, wo*

$$\Lambda \leqq - \lambda \Gamma(a) < 0 .$$

So hat die Integralgleichung

$$(t+a)f(t)+f(t)\ast g(t)=h(t)$$

sicherlich eine partikuläre L-Lösung f_p, *die folgendermassen aufgeschrieben werden kann:*

I. *können nicht gleichzeitig* A *ein Zahlenoperator, und* $d=\Lambda+\lambda\Gamma(a)=0$ *sein, so ist*

$$f_p=Q''_{tt}[\lambda\Gamma(a),t]\ast u(t)\,,$$

wobei

$$u(t)=\begin{cases}(t+a)\displaystyle\int_0^t\frac{Y(\tau)}{(\tau+a)^2}d\tau\,, & \textit{für } a\neq 0\,,\\[2ex] t\displaystyle\int_\Omega^t\frac{Y(\tau)}{\tau^2}d\tau\,, & \textit{für } a=0\,.\end{cases}$$

$$(\Omega>0 \textit{ beliebig}),$$

hierbei ist

$$Y(\tau)=\int_0^\tau A(v)dv\,,\qquad \textit{falls } d=0\,,$$

$$Y(\tau)=\int_0^\tau [A\ast Q(-d,v)]dv\,,\qquad \textit{falls } d<0\,.$$

II. *A ist ein Zahlenoperator, und gleichzeitig ist* $d=\Lambda+\lambda\Gamma(a)=0$. *Dann ist*

$$f_p=\frac{A}{a}Q[\lambda\Gamma(a),t]\,,\qquad \textit{für } a\neq 0\,,$$

und

$$f_p=-AQ'_t[\lambda\Gamma(a),t]\,,\qquad \textit{für } a=0\,.$$

Die verallgemeinerte allgemeine Lösung der Integralgleichung ist die folgende:

$$f=f_p+Ce^{as}\exp[-\lambda\Gamma(a)s^{-a}]=f_p+Ce^{as}\,Q[\lambda\Gamma(a)\,,t]\,.$$

Dies ergibt für $a\leq 0$ *lauter L-Lösungen.*

Hierbei ist

$$\exp[-vs^{-a}]=Q[v,t]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp[-xt+x^a v\cos a\pi]\sin(vx^a\sin a\pi)\,dx\,,\qquad \textit{für } v>0\,.$$

In gewissen Fällen lässt sich f_p in Fall I auf einfachere Weise aufschreiben. Schreiben wir nämlich auf Grund von (5.5) wiederum

$$f_p=s^2\,Q[\lambda\Gamma(a),t]\ast u(t)\,.$$

Ist der Zusammenhang

(5.15) $$s^2\,u(t)=u''(t)\,,\qquad u''(t)\in L$$

sinnvoll, so gilt einfach

$$f_p=Q[\lambda\Gamma(a),t]\ast u''(t)\,.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass (5.15) sinnvoll ist, wenn $a > 0$, oder wenn $a = 0$ und zugleich $d < 0$.

Ist nämlich $a > 0$, so ist

$$u(+0) = u'(+0) = 0$$

und

$$u''(t) = \frac{Y'(t)}{t+a} = \begin{cases} \dfrac{A(t)}{t+a} \in L\,, & \text{für } d = 0, \\ \dfrac{A(t) * Q[-d, t]}{t+a} \in L\,, & \text{für } d < 0. \end{cases}$$

Ist dagegen $a = 0$ und $d < 0$, so besteht ebenfalls

$$u(+0) = u'(+0) = 0$$

und

$$u''(t) = \frac{Y'(t)}{t} = \frac{A(t) * Q[-d, t]}{t} \in L\,.$$

Also folgt aus Satz XIII der folgende

Korollär. *Falls entweder $a > 0$, oder gleichzeitig $a = 0$ und $d < 0$ bestehen, so ist in Fall* I

$$f_p = Q[\lambda\Gamma(a), t] * \frac{Y'(t)}{t+a}\,.$$

§ 6. Beispiele

Im folgenden zeigen wir einige einfache Beispiele zur Lösung von Integralgleichungen. Wir bemerken, dass es oft nicht nötig ist, die Lösungen auf Grund der in § 2., 3. und 4. gegebenen komplizierten Formeln aufzuschreiben. In vielen Fällen führt es einfacher zum Ziel, wenn die Operatorenmethode auf die gegebene konkrete Integralgleichung vom Anfang angewandt wird. Es ist dann zweckmässig, die vorkommenden Operatoren als Funktionen des Differentiationsoperators s aufzuschreiben. So gelangt man zur Operatorengestalt der Lösung $f(t)$ — falls diese überhaupt existiert.

Beispiel 1. Bestimmen wir alle Lösungen der Integralgleichung

$$(1) \qquad tf(t) + f(t) * e^t = 2te^t\,.$$

Da $g(+0) = k = 1$ und $\dfrac{h(t)}{t} \in L$, ist die Operatorengestalt von (6.1) gleich

$$(6.2) \qquad Df - \frac{f}{s-1} = -\frac{2}{(s-1)^2}\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$f = C \exp \int \frac{ds}{s-1} = C \exp\,[\log\,(s-1)] = C(s-1)\,.$$

Dies stellt für $C \neq 0$ in Übereinstimmung mit Satz IV keine Funktion her. Mit der Variation der Konstanten seien

$$f_p = C(s)(s-1)$$

und

$$(s-1)\,DC(s) = -\frac{2}{(s-1)^2},$$

$$DC(s) = -\frac{2}{(s-1)^3},$$

daher

$$C(s) = \frac{1}{(s-1)^2},$$

voraus

$$f_p = \frac{1}{s-1} = e^t.$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Integralgleichung

$$f_p = C(s-1) + e^t. \tag{6.3}$$

Da die homogene Gleichung nur die triviale L-Lösung hat, ist die einzige L-Lösung von (6.1)

$$f(t) = e^t$$

wie das auch aus Satz V folgt.

Beispiel 2. Bestimmen wir alle Lösungen der Integralgleichung

$$tf(t) - f(t) \ast e^t = 2te^t. \tag{6.4}$$

(6.4) in Operatorengestalt geschrieben:

$$Df + \frac{f}{s-1} = -\frac{2}{(s-1)^2}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$f = C\exp\left[-\int\frac{ds}{s-1}\right] = C\exp\left[-\log(s-1)\right] = \frac{C}{s-1} = Ce^t.$$

Satz IV entsprechend, hat die homogene Gleichung nur L-Lösungen. Die Methode der Variation der Konstanten führt zu

$$\frac{1}{s-1}DC(s) = -\frac{2}{(s-1)^2},$$

und

$$DC(s) = -\frac{2}{s-1},$$

also

$$C(s) = -2\log(s-1) = 2(s-1)\{e^t\log t\}$$

und die partikuläre Lösung ist

$$f_p = \{2\, e^t \log t\}\,.$$

Die allgemeine Lösung von (6.4):

$$f(t) = Ce^t + 2\, e^t \log t\,. \tag{6.5}$$

Laut Satz IX sind die erhaltenen Lösungen L-Lösungen.

Beispiel 3. Bestimmen wir alle Lösungen der folgenden homogenen Integralgleichung:

$$tf(t) + \int_0^t f(t-\tau)[ne^\tau - n - 1]d\tau = 0\,, \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6.6}$$

Aus Satz IV folgt, dass (6.6) nichttriviale L-Lösungen hat. In Operatorengestalt ist (6.6) gleich

$$Df - \left(\frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s}\right) f = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$f = C \exp\left[\int \frac{n}{s-1}\, ds\right] \exp\left[-\int \frac{n+1}{s}\, ds\right] =$$

$$= C \exp\,[n \log\,(s-1)]\,\exp\,[-(n+1) \log s] =$$

$$= C\, \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} = \frac{C}{s^{n+1}} \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} s^{n-\varkappa} =$$

$$= C \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \frac{1}{s^{1+\varkappa}} = C \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \frac{t^\varkappa}{\varkappa\,!} = CL_n(t)\,.$$

Also sind die Lösungen von (6.6) Laguerresche Polynome.

Beispiel 4. Bestimmen wir die L-Lösungen der Integralgleichung

$$(t+1)f - f \ast \sin t = 1\,. \tag{6.7}$$

(6.7) in Operatorengestalt geschrieben:

$$Df - f[1 - \{\sin t\}] = -\frac{1}{s}\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist die folgende

$$f = C \exp \int\, [1 - \{\sin t\}]\, ds = Ce^s \exp\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}. \tag{6.8}$$

Satz IV sagt aus, dass (6.8) für $C \neq 0$ keine Funktion ist. Wir wissen ferner, dass (6.7) genau eine L-Lösung hat. Die Methode der Variation der Konstanten führt zu

$$f_p = C(s)\, e^s \exp\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}.$$

Daraus ist

$$DC(s)\, e^s \exp\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = -\frac{1}{s}$$

und

$$DC(s) = -\frac{1}{s} e^{-s} \exp\left\{-\frac{\sin t}{t}\right\} = -\frac{1}{s} e^{-s} [1 + \{G_0(t)\}] =$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{-\frac{\sin t}{t}\right\}^k}{k!}\right],$$

woraus

$$C(s) = e^{-s}\left\{\frac{1}{t+1}\right\} + e^{-s}\left\{\frac{\int_0^t G_0(\tau)\, d\tau}{t+1}\right\} = e^{-s}\left\{\frac{1 + \int_0^t G_0(\tau)\, d\tau}{t+1}\right\}.$$

Also ist die gesuchte partikuläre L-Lösung:

$$f_p = \exp\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}\left\{\frac{1 + \int_0^t G_0(\tau)\, d\tau}{t+1}\right\}. \tag{6.9}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\exp\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}^k}{k!} = 1 + \{G(t)\},$$

lässt sich (6.9) folgendermassen schreiben:

$$f_p = \left\{\frac{1 + \int_0^t G_0(\tau)\, d\tau}{t+1} + G(t) \ast \frac{1 + \int_0^t G_0(\tau)\, d\tau}{t+1}\right\}. \tag{6.10}$$

Beispiel 5. Bestimmen wir alle Lösungen der Integralgleichung

$$(t-1) f + f \ast t = \frac{t^4}{12} + t^3 - t^2. \tag{6.11}$$

(Dies ist ein Beispiel für den Fall $a < 0$.)

Die Operatorengestalt von (6.11) ist

$$Df - f\left(\frac{1}{s^2} - 1\right) = -\frac{2}{s^5} - \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^3}. \tag{6.12}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$f = C \exp \int \left[\frac{1}{s^2} - 1\right] ds = C \exp\left(-s - \frac{1}{s}\right). \tag{6.13}$$

Satz IV besagt, dass (6.13) nur für $C = 0$ eine Funktion ergibt. Also kann (6.11) höchstens eine einzige L-Lösung haben. Die Variation der Konstanten ergebe

$$f_p = C(s) \exp\left(-s - \frac{1}{s}\right).$$

Durch Substitution in (6.12) erhält man

$$DC(s) \exp\left(-s - \frac{1}{s}\right) = -\frac{2}{s^5} - \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^3},$$

und

$$DC(s) = \left(-\frac{2}{s^5} - \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^3}\right) \exp\left(s + \frac{1}{s}\right). \tag{6.14}$$

Laut dem Satz über die algebraische Integrierbarkeit endlicher Distributionen ist (6.14) integrierbar. Man kommt jedoch leichter zum Ziel, wenn man bemerkt, dass das Integral von (6.14) gleich

$$C(s) = \frac{2}{s^3} e^{s + \frac{1}{s}} \tag{6.15}$$

ist. Demzufolge ergibt sich

$$f_p = \frac{2}{s^3} = \{t^2\}.$$

Unter Beachtung von

$$e^{-\frac{1}{s}} = s\{J_0(2\sqrt{t})\}, \qquad \text{(siehe [3])},$$

erhält man für die allgemeine Lösung von (6.11)

$$f = Cse^{-s}\{J_0(2\sqrt{t})\} + \{t^2\} \tag{6.16}$$

die nur für $C = 0$ eine Funktion ergibt.

Beispiel 6. Bestimmen wir die allgemeine Lösung der Integralgleichung

$$(t-1)\,f(t) - f(t) * \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t^3}} \exp\left(-\frac{\pi}{t}\right). \tag{6.17}$$

Die Gleichung in Operatorengestalt ist

$$Df + f\left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{s}}\right) = -\exp(-2\sqrt{\pi s}). \tag{6.18}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist die folgende:

$$f = Ce^{-s} \exp(-2\sqrt{\pi s}) = Ce^{-s}\left\{\frac{1}{\sqrt{t^3}} \exp\left(-\frac{\pi}{t}\right)\right\}.$$

Die homogene Gleichung hat ausschliesslich L-Lösungen. Bestimmen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$f_p = C(s)\, e^{-s} e^{-2\sqrt{\pi s}}. \tag{6.19}$$

In (6.18) eingesetzt, erhalten wir

$$DC(s)\, e^{-s}\, e^{-2\sqrt{\pi s}} = -\, e^{-2\sqrt{\pi s}},$$

also $DC(s) = -e^s$, und $C(s) = -e^s$.

Daraus folgt

$$f_p = -\, e^{-2\sqrt{\pi s}} = -\frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{\pi}{t}}.$$

Also hat (6.17) ebenfalls nur L-Lösungen, und die allgemeine Lösung ist die folgende:

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{\pi}{t}}, & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{\pi}{t}} + C \dfrac{1}{\sqrt{(t-1)^3}} e^{-\frac{\pi}{t-1}}, & \text{für } t > 1, \end{cases}$$

wobei C eine beliebige Konstante ist.

(Eingegangen: 27. April, 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Butzer, P. L.: „Die Anwendung des Operatorenkalküls von Jan Mikusiński auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus." *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **2** (1958) 114—128.

[2] Butzer, P. L.: „Singular integral equations of Volterra type and the finite part of divergent integrals." *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **3** (1959) 194—205.

[3] Mikusiński, J.: *Operatorenrechnung.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

[4] Máté, L.: „On the problem of Mikusiński's logarithm." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **7** (1962) 117—124.

[5] Gesztelyi, E.: *A Mikusiński-féle operátorszámítás alkalmazása lineáris polinomegyütthatós differenciálegyenletek megoldására.* Egyetemi doktori disszertáció, 1962. Kossuth Lajos Tudományegyetem. Debrecen.

[6] Gesztelyi, E.: „Anwendung der Mikusińskischen Operatorenrechnung an lineare Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten." *Publ. Mathematicae* (Debrecen) **10** (1963) 215—242.

[7] Fényes, T.—Kosik, P.: „Über das algebraische Integral der Mikusińskischen Operatoren." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **9** (1964) 21—34.

[8] Mikusiński, J.: „Remarks on the algebraic derivative in the Operational Calculus." *Studia Mathematica* **19** (1960) 187—192.

[9] Mikusiński, J.: „L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionelles (deuxième partie.)" *Annales Universitatis Mariae Curie—Sklodowska, Sectio A.* **3** (1949) 25—33.

[10] Mikusiński, J.—Ryll-Nardzewski, Cz.: „Sur le produit de composition." *Studia Mathematica* **12** (1951) 51—57.

[11] Mikusiński, J.: „Sur les notions de distribution et d'opérateur." *Bull. Ac. Pol. Sci.* **6** (1958) 734—741.

[12] Matušu, J.: „Eine Bemerkung über die operatorenmässige Lösung von Differentialgleichungen der Form $\sum_{i=0}^{n}{}' a_i x^{(i)}(t) - t x'(t) = f(t)$." *Aplikace Matematiky* **5** (1963) 356—366.

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ MIKUSIŃSKI К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ ТРЕТЕГО РОДА

T. FÉNYES

Резюме

Автор занимается решением интегральных уравнений вида

$$(t+a)f(t)+\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = h(t)$$

с помощью вычисления операторов Mikusiński. Интегральному урав- такого вида соответствует в теле операторов Mikusiński дифференциальное уравнение, где производная — так называемая алгебраическая производная. Автор дает обобщенные решения этого дифференциального уравнения, являющиеся при простом условии относительно ядра оригинального интегрального уравнения конечными дистрибуциями. В дальнейшем автор занимается проблемой существования и единственности решений, являющихся локально интегрируемыми функциями, в случае и однородного и неоднородного интегрального уравнения.

В конце работы даются выработанные примеры, хорошо выясняющие силу и простоту примененного метода.

MAXIMALE SYSTEME UNABHÄNGIGER KANTEN

von

T. GALLAI

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit kommen nur solche endliche Graphen vor, die weder Schlingen, noch mehrfache Kanten enthalten. Besteht ein System E aus solchen Kanten des Graphen G, die paarweise keine gemeinsamen Punkte[1] besitzen, so sagen wir, daß die Kanten des Systems E *unabhängig* sind. Die maximale Anzahl der unabhängigen Kanten von G bezeichnen wir mit $\varepsilon(G)$ und nennen ein System E, das aus $\varepsilon(G)$ unabhängigen Kanten von G besteht, ein *ε-System* von G. Besteht das System E aus unabhängigen Kanten von G, und ist zu dem Punkt x von G eine E-Kante (d. h. eine zu E gehörige Kante) inzident, so heißt x ein durch E *saturierter* Punkt. Ist mit x keine E-Kante inzident, so sagen wir, daß E den Punkt x *unsaturiert* läßt. Ist jeder Punkt von G durch E saturiert, so ist E ein *1-Faktor* von G (s. [12], [3]). Bezeichnet $\pi(G)$ die Anzahl der Punkte von G, so gibt $\pi(G) - 2\,\varepsilon(G)$ die ,,minimale Anzahl der unsaturierten Punkte" von G an. Ist $\pi(G) - 2\,\varepsilon(G) = 0$, so bildet jedes ε-System von G einen 1-Faktor von G. Gilt $\pi(G) - 2\,\varepsilon(G) > 0$, so besitzt G keinen 1-Faktor. Man nennt dann G einen *primen* Graphen. Den leeren Graphen (der weder Kanten noch Punkte enthält) betrachten wir als nicht-prim, mit dem 1-Faktor $E = \varnothing$. Wir nennen einen primen Graphen G *kritisch-prim*, wenn für jeden Punkt x von G der Graph $G - x$ nicht-prim ist.[2]

Im ersten Abschnitt unserer Arbeit beweisen wir bezüglich ε-Systeme den folgenden

Satz (E.1). *Bezeichne M_s die Menge jener Punkte des Graphen G, die durch jedes ε-System von G saturiert sind, M_u die Menge der übrigen Punkte, d. h. jener Punkte, die bei gewissen ε-Systemen als unsaturierte Punkte vorkommen und M_b die Menge derjenigen Punkte von M_s, die mit M_u verbunden sind.*[3] *Dann ist jede Komponente von $G - M_b$ entweder eine Komponente von* $[M_u]$

[1] Wir sagen statt Knotenpunkte kurz Punkte.

[2] In [3] haben wir die kritisch-primen Graphen durch eine andere Eigenschaft definiert und kurz kritisch genannt [s. die Definition (1.9) und den Satz (1.19) der vorliegenden Arbeit].

$G - x$ bezeichnet jenen Graphen, der aus G durch Weglassen von x und sämtlichen zu x inzidenten Kanten entsteht.

[3] Ist G' ein Teilgraph von G, M' die Menge der Punkte von G', und ist der nicht zu M' gehörige Punkt x durch Kanten von G mit M'-Punkten (d. h. mit Punkten von M') verbunden, so sagen wir, daß x mit M' oder daß x mit G' (in G) verbunden ist.

oder eine von $[M_s - M_b]$.[4] *Ist* G *prim, also ist* $M_u \neq \emptyset$, *und bezeichnen* $G_1, \ldots, G_p$ $(p \geqq 1)$ *die Komponenten von* $[M_u]$, *so gelten folgende Behauptungen: Jedes* G_i $(i = 1, \ldots, p)$ *ist ein kritisch-primer Graph, jede Komponente von* $[M_s - M_b]$ *besitzt einnen 1-Faktor. Ist* E *ein beliebiges* ε*-System von* G, *so ist jeder* M_b*-Punkt durch eine* E*-Kante mit je einem* G_i $(1 \leqq i \leqq p)$ *verbunden, und verschiedene* M_b*-Punkte sind mit verschiedenen* G_i *verbunden. Diejenigen* G_i, *die durch* E*-Kanten mit* M_b*-Punkten verbunden sind, enthalten keinen durch* E *unsaturiert gelassenen Punkt, die übrigen enthalten je einen solchen Punkt.*

Satz (E.1) kann als Spezialfall des Satzes (7.14) von [4] (s. die Bemerkung am Ende des Abschnittes 8 von [4]) und — falls man nur endliche Graphen betrachtet — als eine Verallgemeinerung gewisser Behauptungen über paare Graphen von [8] S. 134—135 betrachtet werden. Der Satz läßt sich mit Hilfe der Theorie der alternierenden Züge verhältnismäßig kurz beweisen (s. [1] und Abschnitt 7 von [4], sowie Abschnitt 4.4 von [10]). Wir wollen jedoch nicht diese Theorie benützen, sondern eine Methode anwenden, die auf einem bekannten Satz über paare Graphen [s. (1.1)] und auf der Untersuchung gewisser extremalen Punktmengen beruht. Die letzterwähnten Untersuchungen dürften auch in sich gewisses Interesse haben. In [3] haben wir mit der gleichen Methode den bekannten Tutte'schen Satz über 1-Faktoren bewiesen. [Satz (E.1) enthält den nichttrivialen Teil dieses Tutte'schen Satzes in sich.] Mit Hilfe des Tutte'schen Satzes könnten wir unsere Untersuchungen einigermaßen verkürzen, wir wollten jedoch diese Möglichkeit nicht benützen, um eine vollständige Behandlung geben zu können. Wir wollen noch bemerken, daß durch eine Modifizierung unserer Behandlungsweise einige Vereinfachungen erreicht werden könnten, dadurch würden jedoch gewisse Ergebnisse verloren gehen [s. die Bemerkung (1.20)]. Abschnitt 1 enthält die Untersuchungen über die extremen Punktmengen, Abschnitt 2 den Beweis des Satzes (E.1).

In Abschnitt 3 behandeln wir mit Hilfe des Satzes (E.1) ein Extremalproblem bezüglich ε-Systeme. Ein Tutte'scher Satz (s. [12] und [1]) besagt, daß die Bedingung der Regularität, d. h. die Bedingung, daß alle Punkte des Graphen gleichen Grades[5] sind zusammen mit gewissen Zusammenhangsbedingungen, die Existenz von 1-Faktoren sichert. Die schwächere Bedingung, daß $d'' - d'$ bzw. d''/d' „klein" ist, wobei d' bzw. d'' den minimalen bzw. maximalen Wert der im Graphen G vorkommenden Grade bezeichnet, reicht schon nicht aus, um einen 1-Faktor von G zu sichern. Man kann jedoch erwarten, daß sich aus diesen Bedingungen gewisse Folgerungen über die Größe von $\varepsilon(G)$ ziehen lassen. Tatsächlich hat J. H. Weinstein [13] bewiesen, daß im Falle $d' = 1$ und im Falle $d' = 2$, $d'' \geqq 4$ die Ungleichung

$$e_{\max} \geqq \frac{d' n}{d' + d''} \tag{1}$$

besteht, wobei $e_{\max} = \varepsilon(G)$ und $n = \pi(G)$ gesetzt wurde. Er zeigte sogleich

---

[4] Ist A eine Punktmenge von G (d. h. besteht sie aus Punkten von G), so bezeichnet $G - A$ jenen Graphen, der aus G durch Weglassen der A-Punkte und der zu den A-Punkten inzidenten Kanten entsteht. Mit $[A]$ bezeichnen wir den durch A gespannten Teilgraphen von G, d. h. den Graphen $G - \bar{A}$, wobei $\bar{A}$ die Menge der nicht zu A gehörigen Punkte von G bezeichnet.

[5] Der Grad (in G) des Punktes x ist die Anzahl der zu x inzidenten Kanten von G.

daß in (1) für halbreguläre paare Graphen[6] die Gleichheit gilt. Es wurde ferner von G. A. DIRAC die Vermutung ausgesprochen (mündliche Mitteilung), daß (1) auch für $d' \geqq 3$ richtig ist, vorausgesetzt, daß eine Bedingung, die eventuell $d'' \geqq d' + 2$ oder $d'' \geqq 2\,d'$ lautet, gefüllt ist. Er bemerkte weiterhin, daß für halbreguläre paare Graphen die Gleichheit in (1) auch für $d' \geqq 3$ eintritt. Bezeichnet man mit $u_{\min}$ die minimale Anzahl der unsaturierten Punkte in G, ist also $u_{\min} = n - 2e_{\max}$, so läßt sich (1), falls $d' \geqq 1$ ist, folgendermaßen umformen

$$(2)\qquad \frac{u_{\min}}{e_{\max}} \leqq \frac{d'' - d'}{d'}.$$

In Abschnitt 3 wird nun mit Hilfe des Satzes (E.1) die Gültigkeit der Dirac'schen Vermutung bestätigt. Wir beweisen nämlich den folgenden

Satz (E.2). *Bezeichnen $e_{\max}$, $u_{\min}$, d' und d'' der Reihe nach die maximale Anzahl der unabhängigen Kanten, die minimale Anzahl der unsaturierten Punkte des Graphen G, den minimalen und den maximalen Wert der in G vorkommenden Grade, so besteht, falls $d' \geqq 1$ ist,*

$$(3)\qquad \frac{u_{\min}}{e_{\max}} \leqq \frac{\max\,(2, d'' - d')}{d'}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt

a) *falls $d'' - d' > 2$ oder $d'' - d' = 2$ und d' ungerade ist, dann und nur dann, wenn G ein halbregulärer paarer Graph ist,*

b) *falls $d'' - d' = 2$ und d' gerade ist, dann und nur dann, wenn die Komponenten von G vollständige $(d' + 1)$-Graphen*[7] *und eine nicht verschwindende Anzahl solche halbreguläre paare Graphen sind, in derer jedem die Grade d' und d'' vorkommen.*

c) *falls $d'' - d' < 2$ ist, dann und nur dann, wenn $d'' = d'$ besteht und d' gerade ist, und jede Komponente von G ein vollständiger $(d' + 1)$-Graph ist.*

Wir wollen noch bemerken, daß in § 4 von [2] gleichfalls eine Extremalaufgabe bezüglich dem Wert $e_{\max}$ behandelt wird. Die dort angewendete Methode stimmt im wesentlichen mit jenem Verfahren überein, das wir zum Beweis von (E.2) benützen.

1. Extreme Punktmengen. k-Prime Graphen

Wir stützen uns in unseren Untersuchungen auf den folgenden bekannten Satz über paare Graphen:[8]

(1.1) *Es seien A und B die Punktklassen des paaren Graphen G, d. h. G enthalte nur AB-Kanten.*[9] *Ist für eine jede Teilmenge B' von B die Anzahl jener*

[6] Der Graph G heißt ein halbregulärer paarer Graph, wenn die Punkte von G so in zwei Klassen A_1 und A_2 eingeteilt werden können, daß jede Kante von G einen A_1-Punkt mit einem A_2-Punkt verbindet und sämtliche A_i-Punkte den gleichen Grad d_i haben $(i = 1,2)$.

[7] Ein vollständiger j-Graph enthält genau j Punkte, und je zwei von diesen sind durch eine Kante des Graphen verbunden.

[8] Dieser Satz, der mit bekannten Sätzen von KÖNIG, HALL und RADO (s. [6] S. 232—235, [5] und [11]) in enger Beziehung steht, wurde zuerst von ORE formuliert ([7], [8]).

[9] Eine AB-Kante verbindet einen A-Punkt mit einem B-Punkt.

A-Punkte, die (durch Kanten von G) mit B'-Punkten verbunden sind, nicht kleiner als die Anzahl der B'-Punkte, so läßt sich die Menge B durch Kanten von G auf eine Teilmenge von A eineindeutig abbilden, d. h. man kann zu jedem B-Punkt eine zu diesem inzidente Kante von G so auswählen, daß die ausgewählten Kanten paarweise keinen gemeinsamen Punkt enthalten.

(1.2) Wir führen einige weitere Bezeichnungen ein:

$\mathcal{N}(M)$ bezeichnet die Anzahl der Elemente der endlichen Menge M.

$\mathcal{P}(G)$ bezeichnet die Menge der Punkte des Graphen G. (Mit G bezeichnen wir immer einen Graphen.)

Es ist $\pi(G) = \mathcal{N}(\mathcal{P}(G))$.

$\lambda(G)$ bezeichnet die Anzahl der primen Komponenten von G.

$\delta_G(B) = \lambda(G - B) - \mathcal{N}(B)$, wobei $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ ist.

Wir wollen nun, bei einem festgehaltenen Graphen G solche Teilmengen B von $\mathcal{P}(G)$ untersuchen, für die $\delta_G(B)$ gewisse extreme Eigenschaften besitzt. Dazu werden einige weitere Bezeichnungen und Begriffe benützt. Wir setzen

$$\delta^G_{\max} = \max_{B \subseteq \mathcal{P}(G)} \delta_G(B) .$$

Die Menge $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ heißt eine *extreme* Punktmenge von G, wenn $\delta_G(B) = \delta^G_{\max}$ gilt.

Die Menge $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ heißt eine *δ-maximale* Punktmenge von G, wenn für jedes B' mit $B \subset B' \subseteq \mathcal{P}(G)$ die Ungleichung $\delta_G(B') < \delta_G(B)$ besteht. ($\mathcal{P}(G)$ ist eine δ-maximale Punktmenge von G.)

Der Kürze halber wollen wir in den Bezeichnungen $\delta_G(B)$ und $\delta^G_{\max}$ die Indizes G weglassen. Also beziehen sich $\delta(B)$ und $\delta_{\max}$ immer auf den mit G bezeichneten Graphen. Ebenso beziehen sich die Begriffe δ-maximale und extreme Punktmengen auf den mit G bezeichneten Graphen.

Offensichtlich gelten die folgenden zwei Behauptungen:

(1.3) *Ist $\pi(G)$ ungerade, so ist G prim.*

(1.4) *$\lambda(G) > 0$ besteht dann und nur dann, wenn G prim ist.*

Wir beweisen die Behauptung

(1.5) *Enthält G einen 1-Faktor, so gilt für jedes $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ die Ungleichung $\delta(B) \leqq 0$.*

Beweis. Es genügt, den Fall $\lambda(G - B) > 0$ zu betrachten. F sei ein 1-Faktor von G. Dann gibt es zu einer jeden primen Komponente G_i von $G - B$ mindestens eine solche F-Kante, die G_i mit einem B-Punkt verbindet. Daraus folgt $\lambda(G - B) \leqq \mathcal{N}(B)$, d. h. $\delta(B) \leqq 0$.

Nach (1.5) gilt

(1.6) *Gibt es ein $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ mit $\delta(B) > 0$, so ist G prim.*

Offensichtlich bestehen auch die folgenden Behauptungen:

(1.7) *Für $B = \varnothing$ gilt $\delta(B) = \lambda(G) \geqq 0$. Ist G prim, so ist für $B = \varnothing$ $\delta(B) > 0$.*

(1.8) *Es gilt stets $\delta_{\max} \geqq 0$. $\delta_{\max} > 0$ besteht dann und nur dann, wenn G prim ist.*

Die wichtigste Begriffsbildung unserer Untersuchungen ist die folgende Definition:

(1.9) **Definition.** Der prime Graph G heißt *k-prim*,[10] falls er zusammenhängend ist und für jedes *nichtleere* $B \subseteq \mathscr{P}(G)$, $\delta(B) \leqq 0$ besteht.

So ist z. B. ein einpunktiger Graph k-prim.

(1.10) *Die Menge* $B \subseteq \mathscr{P}(G)$ *sei* δ*-maximal. Dann sind sämtliche nichtleeren Komponenten von* $G - B$ *k-prim.*

Beweis. 1) Es sei G_0 eine solche nichtleere Komponente von $G - B$, die einen 1-Faktor enthält und $x_0 \in G_0$.[11] Dann ist $\pi(G_0 - x_0)$ ungerade, und demzufolge $G_0 - x_0$ prim. Es gilt daher $\lambda(G_0 - x_0) > 0$. Für $B_0 = B \cup \{x_0\}$ besteht so $\lambda(G - B_0) = \lambda(G - B) + \lambda(G_0 - x_0) > \lambda(G - B)$, woraus $\delta(B_0) \geqq \geqq \delta(B)$ folgt. Dies widerspricht der Maximalität von B.

2) Jetzt sei G_1 eine prime Komponente von $G - B$, und nehmen wir an, daß G_1 nicht k-prim ist. Dann gibt es ein nichtleeres $B_1 \subseteq \mathscr{P}(G_1)$ mit $\lambda(G_1 - B_1) > \mathscr{N}(B_1)$. Es bestehen $B' = B \cup B_1 \supset B$ und $\lambda(G - B') = = \lambda(G - B) - 1 + \lambda(G_1 - B_1)$. Daher ist $\delta(B') = \lambda(G - B') - \mathscr{N}(B') = = \lambda(G - B) - \mathscr{N}(B) + \lambda(G_1 - B_1) - \mathscr{N}(B_1) - 1 \geqq \lambda(G - B) - \mathscr{N}(B) = = \delta(B)$, und dies widerspricht ebenfalls der Maximalität von B.

(1.11) **Definition.** Die Menge $B \subseteq \mathscr{P}(G)$ heißt eine *k-extreme* Punktmenge (von G), wenn B extrem ist und sämtliche primen Komponenten von $G - B$ k-prim sind.

Nach (1.10) gilt die folgende Behauptung

(1.12) *Ist die Menge* $B \subseteq \mathscr{P}(G)$ *extrem und* δ*-maximal, so ist sie auch k-extrem.*

Da in jedem (endlichen) Graphen solche extreme Punktmengen existieren, die auch δ-maximal sind, folgt aus (1.12), daß in jedem (endlichen) Graphen k-extreme Punktmengen existieren.

(1.13) **Definition.** Die Menge $B \subseteq \mathscr{P}(G)$ heißt eine *minimale k-extreme* Punktmenge (von G), wenn sie k-extrem ist, und keine von ihr verschiedene k-extreme Teilmenge besitzt.

In jedem (endlichen) Graphen existiert eine minimale k-extreme Punktmenge. Es gilt ferner

(1.14) *Enthält* G *einen* 1*-Faktor, so ist* $B = \varnothing$ *eine k-extreme Punktmenge, und sie ist die einzige minimale k-extreme Punktmenge von* G.

In den Abschnitten 1 und 2 wird der Satz (1.1) über paare Graphen nur beim Beweis des folgenden Satzes gebraucht.

(1.15) *Ist* $B \subseteq \mathscr{P}(G)$, *so bezeichne* H^* *die Menge der primen Komponenten von* $G - B$. *Es sei*

a) B *eine extreme Punktmenge von* G *und* $H = H^*$, *oder*

b) G *zusammenhängend,*

$$\max_{\varnothing \neq \tilde{B} \subseteq \mathscr{P}(G)} \delta(\tilde{B}) \geqq 0\,, \quad B \subseteq \mathscr{P}(G) \text{ mit } \delta(B) = \max_{\varnothing \neq \tilde{B} \subseteq \mathscr{P}(G)} \delta(\tilde{B})\,,$$

ferner $H = H^*$, *oder*

[10] Im folgenden wird sich ergeben [s. (1.19)], daß die k-primen Graphen mit den in der Einleitung definierten kritisch-primen Graphen identisch sind (s. auch die Fußnote 2).

[11] Die Punkte werden stets mit kleinen lateinischen Buchstaben, die Kanten mit Buchstabenpaaren bezeichnet. $x \in G$ bedeutet, daß der Punkt x zu dem Graphen G gehört.

c) *B eine minimale k-extreme Punktmenge von G und $H = H^* - \{G_0\}$, wobei G_0 ein beliebiges Element von H^* ist.*

In jedem dieser drei Fälle kann B eineindeutig durch Kanten von G auf eine Teilmenge von H abgebildet werden, d. h. es gibt in G $\mathcal{N}(B)$ solche Kanten, die je einen Punkt von B mit je einer zu H gehörigen Komponente verbindet, und zwar verschiedene B-Punkte mit verschiedenen Komponenten.

Beweis. Bezeichne B' eine beliebige Teilmenge von B und H' die Menge jener Komponenten von H, die (durch Kanten von G) mit B'-Punkten verbunden sind. Wir beweisen, daß $\mathcal{N}(H') \geqq \mathcal{N}(B')$ besteht. Daraus folgt dann nach (1.1) die Richtigkeit der Behauptung von (1.15).[12]

Von der Annahme

$$\mathcal{N}(H') < \mathcal{N}(B') \tag{1}$$

ausgehend, werden wir in jedem der drei Fälle a), b) und c) zu einem Widerspruch gelangen. Aus (1) folgt

$$B' \neq \varnothing\,. \tag{2}$$

Man setze $H'' = H - H'$ und $B'' = B - B'$. Da die zu H'' gehörigen Komponenten (durch Kanten von G) nur mit B''-Punkten verbunden sein können, gilt mit Rücksicht auf (1)

$$\lambda(G - B'') \geqq \mathcal{N}(H'') = \mathcal{N}(H) - \mathcal{N}(H') > \mathcal{N}(H) - \mathcal{N}(B')\,. \tag{3}$$

In den Fällen a) und b) ist $\mathcal{N}(H) = \lambda(G - B)$, und so folgt aus (3) mit Hilfe von $B' = B - B''$

$$\lambda(G - B'') - \mathcal{N}(B'') > \lambda(G - B) - \mathcal{N}(B)\,. \tag{4}$$

Im Falle a) bedeutet dies unmittelbar einen Widerspruch.

Im Falle b) ergibt (4) nur dann keinen Widerspruch, wenn $B'' = \varnothing$ ist. In diesem Falle muß auch $H'' = \varnothing$ bestehen, da die Elemente von H'' nur mit B''-Punkten verbunden sein können, und G zusammenhängend ist. Es folgt $B' = B$, $H' = H$ und nach (1) $\mathcal{N}(H) < \mathcal{N}(B)$, also $\lambda(G - B) < \mathcal{N}(B)$. Dies steht jedoch mit der Bedingung $\delta(B) \geqq 0$ in Widerspruch.

Im Falle c) ist $\mathcal{N}(H) = \lambda(G - B) - 1$, und so folgt aus (3) mit Rücksicht auf $B' = B - B''$

$$\lambda(G - B'') - \mathcal{N}(B'') \geqq \lambda(G - B) - \mathcal{N}(B)\,. \tag{5}$$

Da B eine extreme Menge ist, kann in (5) nur das Gleichheitszeichen gelten. Es folgt daraus einerseits, daß B'' eine extreme Menge ist, und andererseits, daß in (3) $\lambda(G - B'') = \mathcal{N}(H'')$ bestehen muß. Das letzte bedeutet jedoch, daß die primen Komponenten von $G - B''$ eben die Menge H'' bilden, also alle Elemente von H^* sind. Da B k-extrem ist, sind alle Elemente von H^* k-prim, woraus also folgt, daß auch B'' k-extrem ist. Dies steht jedoch wegen (2) mit der Minimalität von B in Widerspruch.

---

[12] Zur formalen Anwendung von (1.1) betrachte man jenen paaren Graphen G^*, dessen Punktklassen H und B sind, und in dem ein »Punkt« von H, d.h. eine zu H gehörige Komponente G_i dann und nur dann mit einem Punkt $b \in B$ durch eine Kante von G^* verbunden ist, falls G_i in G mit b verbunden ist.

Der folgende Satz drückt die wichtigste Eigenschaft der k-primen Graphen aus.

(1.16) **Satz.** *Ist G k-prim, so gilt für jedes nichtleere $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ die Ungleichung $\delta(B) < 0$. Auf den Fall $\mathcal{N}(B) = 1$ angewendet ergibt dies: Für jeden beliebigen Punkt x des k-primen Graphen G besitzt $G - x$ einen 1-Faktor.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß die zweite Behauptung tatsächlich die Folge der ersteren ist. Ist $x \in G$ und $B = \{x\}$, so ist $\delta(B) = \lambda(G - x) - 1$. Daher folgt aus $\delta(B) < 0$ die Gleichung $\lambda(G - x) = 0$. Dies bedeutet jedoch, daß $G - x$ 1-Faktoren besitzt.

Wir führen nun den Beweis der ersten Behauptung mit Induktion bezüglich $\pi(G)$ durch. Ist $\pi(G) = 1$, so ist die Behauptung richtig. Nehmen wir an, daß sie für Graphen mit weniger als n $(n > 1)$ Punkten richtig ist, und es sei G ein k-primer Graph mit $\pi(G) = n$. Da jetzt für jedes nichtleere $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ $\delta(B) \leq 0$ gilt, bedeutet für G das Gegenteil der Behauptung unseres Satzes, daß nichtleere $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ mit $\delta(B) = 0$ existieren. Wir wählen von diesen eine maximale Menge B aus. Dann ist B auch δ-maximal, und es besteht

$$\delta(B) = \max_{\emptyset \neq \tilde{B} \subseteq \mathcal{P}(G)} \delta(\tilde{B}) = 0 . \tag{1}$$

Da B nicht mit $\mathcal{P}(G)$ zusammenfallen kann, sind nach (1.10) sämtliche Komponenten von $G - B$ k-prime Graphen. Es seien diese Komponenten $G_1, \ldots, G_p$, wobei wegen $\delta(B) = 0$

$$p = \lambda(G - B) = \mathcal{N}(B)$$

besteht. Man setze ferner $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$ und $H = \{G_1, \ldots, G_p\}$. Da G zusammenhängend ist, kann man nach (1) den Satz (1.15) b) anwenden. Die nach diesem Satze existierenden „abbildenden" Kanten von G seien mit $b_i x_i$ $(x_i \in G_i, i = 1, \ldots, p)$ bezeichnet. Laut der Induktionsannahme besitzt $G_i - x_i$ einen 1-Faktor F_i $(i = 1, \ldots, p)$. Die Kanten von $\bigcup_{i=1}^{p} F_i$, zusammen mit den Kanten $b_1 x_1, \ldots, b_p x_p$ bilden jedoch einen 1-Faktor von G. Dieser Widerspruch beweist die Richtigkeit unseres Satzes.

Aus der zweiten Behauptung von (1.16) folgt

(1.17) *Ist G k-prim, so ist $\pi(G)$ ungerade.*

Wir beweisen jetzt die Umkehrung der zweiten Behauptung von (1.16):

(1.18) *Es sei G nichtleer, und besitze für jedes $x \in G$ der Graph $G - x$ einen 1-Faktor. Dann ist G k-prim.*

Beweis. Da $\pi(G)$ ungerade ist, muß G prim sein. Zuerst zeigen wir, daß G zusammenhängend ist. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich eine prime Komponente G_1 und eine von G_1 verschiedene Komponente G_2 von G. Ist $x \in G_2$, so wäre $G - x$ (entgegen unserer Annahme) prim.

Ist nun der zusammenhängende Graph G nicht k-prim, so gibt es ein nichtleeres $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ mit $\delta(B) > 0$. Dann kann nach (1.6) für ein $x \in B$ der Graph $G' = G - x$ keinen 1-Faktor besitzen, da für $B' = B - x$

$$\lambda(G' - B') = \lambda(G - B) > \mathcal{N}(B) > \mathcal{N}(B')$$

besteht.

Aus (1.16) und (1.18) folgt

(1.19) *Die k-primen Graphen sind mit den in der Einleitung definierten kritisch-primen Graphen identisch.*

(1.20) **Bemerkung.** L. PÓSA und V. T. SÓS haben mich darauf aufmerksam gemacht, daß der in [3] gegebene Beweis des Tutte'schen Satzes über 1-Faktoren durch Modifizierung unserer Beweismethode kürzer gefaßt werden kann. Wir wollen diese Modifizierung kurz andeuten:

Bezeichne $\mu(G)$ die Anzahl der „ungeraden" Komponenten von G, d. h. jener Komponenten, die eine ungerade Anzahl von Punkten besitzen. Dann gilt für $A \subseteq \mathscr{P}(G)$

$$\mu(G - A) - \mathscr{N}(A) \equiv \pi(G) \pmod 2. \tag{1}$$

Es genüge nun G für ein jedes $A \subseteq \mathscr{P}(G)$ der Bedingung

$$\mu(G - A) \leqq \mathscr{N}(A).$$

Um zu beweisen, daß dann G 1-Faktoren besitzt, betrachte man — statt die in [3] benützte δ-maximale Menge B — eine maximale Punktmenge $A \subseteq \mathscr{P}(G)$ von größtmöglichem $\mu(G - A) - \mathscr{N}(A)$. Gewisse Eigenschaften dieses A und (1) ermöglichen — ohne Einführung des Begriffes der kritisch-primen Graphen — vollständige Induktion bezüglich $\pi(G)$ anzuwenden und dadurch zum gewünschten Resultat zu gelangen.

Eine ähnliche Modifizierung kann auch bei unserem Beweis des Satzes (E.1) durchgeführt werden. Statt $\lambda(G - B) - \mathscr{N}(B)$ nähme man $\mu(G - B) - \mathscr{N}(B)$, und dementsprechend verändere die Definitionen der k-primen Graphen und der extremen, δ-maximalen, k-extremen, minimalen k-extremen Punktmengen. Der modifizierte Beweis ist möglicherweise ein wenig kürzer als der von uns mitgeteilter, es gehen jedoch dabei gewisse Ergebnisse [z. B. die Behauptung (1.16) für $\mathscr{N}(B) > 1$] verloren.

2. Beweis des Satzes (E. 1)

Wie wir in (2.2) zeigen werden, ermöglicht der folgende Satz die Bestätigung sämtlicher Behauptungen von (E.1).

(2.1) **Satz.** a) *Bezeichnet $u_{\min}$ die minimale Anzahl der unsaturierten Punkte des Graphen G, so gilt*

$$u_{\min} = \delta_{\max}.$$

b) *Ist G prim, B eine extreme Punktmenge von G und E ein beliebiges ε-System von G, sind ferner $G_1, \ldots, G_p$ die primen Komponenten von $G - B$ und ist $G^u = \bigcup_{i=1}^{p} G_i$, so liegen sämtliche durch E unsaturiert gelassenen Punkte in G^u, und zwar befindet sich in jedem G_i höchstens ein solcher Punkt. Enthält ein G_i einen (keinen) solchen Punkt, so gibt es keine (genau eine) E-Kante, die G_i mit einem B-Punkt verbindet. Jeder B-Punkt ist durch eine E-Kante mit je einem G_i verbunden.*

Enthält ein G_i einen durch E unsaturiert gelassenen Punkt, und ist G_i ein k-primer Graph, so existiert zu einem jeden Punkt x von G_i ein solches ε-System E' von G, das x unsaturiert läßt.

c) *Ist die in* b) *vorkommende Menge B eine minimale k-extreme Menge von G und x ein beliebiger Punkt von G^u, so gibt es ein solches ε-System von G, das x unsaturiert läßt.*

Beweis. I) Besitzt G 1-Faktoren, so ist $u_{\min} = 0$ und $\delta_{\max} = 0$ [s. (1.8)]. Im folgenden sei nun G ein primer Graph. Dann ist $u_{\min} > 0$ und $\delta_{\max} > 0$. Ferner sei B eine extreme Punktmenge von G, d. h. es bestehe

$$\delta(B) = \lambda(G - B) - \mathcal{N}(B) = \delta_{\max}\,.$$

Wir setzen

$$p = \lambda(G - B)\,, \qquad q = \mathcal{N}(B)$$

$$\text{und im Falle } q > 0 \qquad B = \{b_1, \ldots, b_q\}\,.$$

Es besteht dann

(1) $$p = q + \delta_{\max} > 0\,.$$

Die Menge der primen Komponenten von $G - B$ sei

$$H^* = \{G_1, \ldots, G_p\}\,, \qquad \text{ferner sei } G^u = \bigcup_{i=1}^{p} G_i\,.$$

Diese Bezeichnungen wollen wir während des ganzen Beweises behalten.

II) Es sei E ein ε-System von G und H_s die Menge jener G_i $(1 \leqq i \leqq p)$, die keinen durch E unsaturiert gelassenen Punkt enthalten. Wir setzen $H_u = H^* - H_s$. Zu jedem $G_i \in H_s$ existiert mindestens eine solche E-Kante, die G_i mit einem B-Punkt verbindet. Es gilt daher

(2) $$\mathcal{N}(H_s) \leqq q\,,$$

und demzufolge

(3) $$\mathcal{N}(H_u) \geqq p - q = \delta_{\max}\,.$$

Daraus folgt, daß in G^u mindestens $\delta_{\max}$ durch E unsaturiert gelassene Punkte liegen. Es besteht also

(4) $$u_{\min} \geqq \delta_{\max}\,.$$

III) Wir nehmen jetzt vorläufig an, daß in (4) das Gleichheitszeichen gilt. Daraus folgt in Betracht von (3), daß jeder durch E unsaturiert gelassene Punkt in G^u liegt, jedes $G_i \in H_u$ genau einen unsaturierten Punkt enthält und $\mathcal{N}(H_u) = p - q$ besteht. Die letzte Behauptung ergibt $\mathcal{N}(H_s) = q$, woraus man sieht, daß es zu jedem $G_i \in H_s$ genau eine, zu jedem $G_i \in H_u$ dagegen keine solche E-Kante gibt, die G_i mit einem B-Punkt verbindet. Dann wird jeder B-Punkt durch eine E-Kante mit je einem $G_i \in H_s$ verbunden.

Es sei $G_i \in H_u$, G_i ein k-primer Graph und $x \in G_i$. Nach (1.16) besitzt $G_i - x$ einen 1-Faktor F_i'. Bezeichnet F_i die Menge der zu G_i gehörigen E-Kanten, so sieht man aus den vorangehenden, daß $E' = (E - F_i) \cup F_i'$ ein solches ε-System von G ist, das den Punkt x unsaturiert läßt.

IV) Von jetzt ab soll $u_{\min} = \delta_{\max}$ nicht vorausgesetzt werden. Wir nehmen nun an, daß B nicht nur extrem, sondern auch k-extrem ist. Es sind dann $G_1, \ldots, G_p$ alle k-prime Graphen. Ist $q > 0$, so existieren nach (1.15) a) solche Kanten in G, welche die Menge B auf eine Teilmenge von H^* eineindeutig abbilden. Wir dürfen diese in der Form $b_i x_i$ $(x_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, q)$ angeben. Wähle man — auch im Falle $q = 0$ — in jedem G_i $(i = q + 1, \ldots, p)$ einen beliebigen Punkt x_i aus. Es soll ferner F_i $(i = 1, \ldots, p)$ einen nach (1.16) existierenden 1-Faktor von $G_i - x_i$ bezeichnen, und es sei F_0 ein 1-Faktor desjenigen Graphen, der durch die Vereinigung der nichtprimen Komponenten von $G - B$ entsteht. (Falls es keine solche Komponente gibt, so sei $F_0 = \varnothing$.) Im Falle $q = 0$ setze man $E' = \bigcup_{i=0}^{p} F_i$, im Falle $q > 0$ sei $E' = (\bigcup_{i=0}^{p} F_i) \cup \cup \{b_1 x_1, \ldots, b_q x_q\}$. Die Kanten von E' sind unabhängig, und E' läßt in G nur die Punkte $x_{q+1}, \ldots, x_p$, also genau $p - q = \delta_{\max}$ Punkte unsaturiert. Es besteht demnach $u_{\min} \leqq \delta_{\max}$. Dies und (4) ergeben

$$u_{\min} = \delta_{\max}. \tag{5}$$

Damit sind also der Teil a) und in Betracht von III) auch der Teil b) unseres Satzes bewiesen.

V) Um den Teil c) zu beweisen, sei B eine minimale k-extreme Menge und x ein beliebiger Punkt von G^u. Es sei $x \in G_p$ und $H = H^* - \{G_p\}$. Im Falle $q > 0$ gibt es nach (1.15) c) solche Kanten in G, welche die Menge B auf eine Teilmenge von H eineindeutig abbilden. Man darf diese in der Form $b_i x_i$ ($x_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, q$) angeben. Man setze $x_p = x$ und, wenn $p > q + 1$, wähle — auch im Falle $q = 0$ — in jedem G_i ($i = q + 1, \ldots, p - 1$) einen beliebigen Punkt x_i aus. Dann führt die in IV) benützte Konstruktion zu einem solchen Kantensystem E', welches aus unabhängigen Kanten besteht und nur die Punkte $x_{q+1}, \ldots, x_p = x$ unsaturiert läßt. Nach (5) ist E ein gesuchtes ε-System von G. Damit ist der Beweis von (2.1) beendet.

(2.2) Haben die Mengen M_s, M_u und M_b die im Satze (E.1) gegebene Bedeutung, und ist B eine minimale k-extreme Menge von G, so folgt aus (2.1) $G^u = [M_u]$ und $B = M_b$. Man kann folglich mit Hilfe von (1.19) und (2.1) sämtliche Behauptungen des Satzes (E.1) leicht bestätigen.

Auf Grund dieser Überlegungen gelangt man aus (2.1) zu folgendem:

(2.3) **Satz.** *In jedem Graphen G gibt es eine einzige minimale k-extreme Punktmenge. Diese ist der Durchschnitt sämtlicher k-extremen Mengen von G und fällt mit der in der Einleitung definierten Menge M_b zusammen.*

3. Beweis des Satzes (E. 2)

(3.1) Wir beweisen den Satz erst für zusammenhängende Graphen.

Besitzt der Graph G einen 1-Faktor, gilt also $u_{\min} = 0$, so ist die zu beweisende Ungleichung

$$\frac{u_{\min}}{e_{\max}} \leqq \frac{\max(2, d'' - d')}{d'} \qquad (d' \geqq 1) \tag{1}$$

offensichtlich richtig. Das Gleichheitszeichen kann in diesem Falle nie auftreten.

I) Wir nehmen an, daß G ein zusammenhängender primer Graph ist. Es gilt dann $u_{\min} > 0$. M_s, M_u, M_b sollen die im Satze (E.1) definierten Mengen sein, $G_1, \ldots, G_p$ die Komponenten von $[M_u]$. Nach (E.1) sind $G_1, \ldots, G_p$ kritisch-prime Graphen. Setzt man $\mathcal{N}(M_b) = q$, so gilt nach (E.1)

$$p = q + u_{\min}. \tag{2}$$

Es sei E ein beliebiges ε-System von G, und bezeichne a_i ($i = 1, \ldots, p$) die Anzahl der in G_i liegenden E-Kanten. Nach (E.1) ist $\pi(G_i) = 2a_i + 1$ und es gibt in jedem G_i genau einen Punkt x_i, der entweder durch E unsaturiert.

oder durch eine E-Kante mit einem M_b-Punkt verbunden ist ($i = 1, \ldots, p$). Es gibt genau q E-Kanten, die M_b-Punkte mit den Graphen $G_1, \ldots, G_p$ verbinden. Falls $M_s \neq \emptyset$ ist, so sind sämtliche M_s-Punkte durch E saturiert. Wir setzen $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ und werden die Anzahl $\nu(X, M_b)$ jener Kanten, die X-Punkte mit M_b-Punkten verbinden, von oben und von unten abschätzen.

Da in dem Graphen G zu jedem Punkte höchstens d'' Kanten inzident sind, besteht

$$\nu(X, M_b) \leqq qd''. \tag{3}$$

Zu einem Punkt x_i ($1 \leqq i \leqq p$) sind mindestens d' Kanten inzident, von denen wegen $\pi(G_i) = 2a_i + 1$ höchstens $2a_i$ Kanten in G_i liegen können. Deshalb gilt für die Anzahl $\nu(x_i, M_b)$ jener Kanten, die x_i mit M_b-Punkten verbinden,

$$\nu(x_i, M_b) \geqq d' - 2a_i \qquad (i = 1, \ldots, p)\,. \tag{4}$$

Demzufolge ist

$$\nu(X, M_b) = \sum_{i=1}^{p} \nu(x_i, M_b) \geqq \sum_{i=1}^{p} (d' - 2a_i) = pd' - 2\sum_{i=1}^{p} a_i\,. \tag{5}$$

Die Anzahl derjenigen E-Kanten, die zu M_u-Punkten inzident sind, ist $q + \sum_{i=1}^{p} a_i$. Es gilt daher

$$q + \sum_{i=1}^{p} a_i \leqq e_{\max}. \tag{6}$$

Aus (3), (5) und (6) erhält man

$$pd' - 2(e_{\max} - q) \leqq qd''. \tag{7}$$

Laut (2) gilt daher

$$d' u_{\min} \leqq (d'' - d')q + 2(e_{\max} - q)\,. \tag{8}$$

Setzt man $m = \max(2, d'' - d')$, so ergibt sich

$$d' u_{\min} \leqq mq + m(e_{\max} - q) = me_{\max}. \tag{9}$$

Ist $d' \geqq 1$, so ergibt sich daraus die Richtigkeit von (1).

II) Nehmen wir nun an, daß in (1) die Gleichheit besteht. Dann muß auch in (8), (7), (6), (3) und in (4) für $i = 1, \ldots, p$ das Gleichheitszeichen gelten.

In (6) besteht die Gleichheit nur dann, wenn $M_s - M_b = \emptyset$ ist. In (3) nur dann, wenn jeder M_b-Punkt den Grad d'' hat und jeder solche Punkt nur mit X-Punkten verbunden ist.

1) Betrachte man erst den Fall, wo nicht alle a_i verschwinden. Es sei z. B. $a_1 > 0$. Wir zeigen, daß wenn in (4) für $i = 1$ die Gleichheit besteht, so M_b leer sein muß. Ist nämlich $M_b \neq \emptyset$, dann muß – da G zusammenhängend ist – mindestens ein Punkt von G_1 mit einem M_b-Punkt verbunden sein. Es ist also $\nu(x_1, M_b) = d' - 2a_1 > 0$. Aus $d' > 2a_1$ folgt dann jedoch, daß der Grad eines jeden von x_1 verschiedenen Punktes von G_1 kleiner als d' ist. Das ist ein Widerspruch.

Aus $M_b = \emptyset$ folgt $G = G_1$. Jetzt kann in (4) die Gleichheit nur im Falle $d' = 2a_1$ gelten. Wegen $\pi(G) = 2a_1 + 1 = d' + 1$ muß dann $d'' = d'$ bestehen, also G ein vollständiger $(d' + 1)$-Graph sein, wobei d' eine gerade Zahl ist. In diesem Falle besteht in (1) tatsächlich die Gleichheit.

2) Wir nehmen jetzt an, daß $a_1 = \ldots = a_p = 0$ gilt, also alle G_i aus den einzelnen Punkten x_i bestehen $(i = 1, \ldots, p)$. Die Gleichheiten in (4) ergeben dann, daß alle X-Punkte den gleichen Grad d' besitzen. Daraus und aus den Folgerungen, die wir aus der Bestehung der Gleichheit in (3) gezogen haben, sieht man, daß G ein halbregulärer paarer Graph sein muß. In diesem Falle ist $d'p = d''q$, und mit Hilfe von (1.1) erhält man, falls $d' \geqq 1$ ist, daß $e_{\max} = q$ besteht. Es gilt dann in (8) die Gleichheit, und zwar in der Form

$$d' u_{\min} = (d'' - d') e_{\max} .$$

Man sieht daraus, daß im betrachteten Falle in (1) das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $d'' - d' \geqq 2$ ist. Damit ist der Satz (E.2) für zusammenhängende Graphen vollständig bewiesen.

(3.2) Es besitze nun G die Komponenten $G^{(1)}, \ldots, G^{(j)}$ $(j > 1)$, und $u_{\min}^{(i)}, e_{\max}^{(i)}, d_i', d_i''$ sollen für den Graphen $G^{(i)}$ dieselbe Bedeutung haben, wie $u_{\min}, e_{\max}, d', d''$ für G. Man setze ferner

$$f(d', d'') = \frac{\max(2, d'' - d')}{d'} \qquad (d' \geqq 1) .$$

Aus $d' \leqq d_i' \leqq d_i'' \leqq d''$ folgt dann

$$f(d_i', d_i'') \leqq f(d', d'') \qquad (i = 1, \ldots, j) , \tag{1}$$

aus (3.1)

$$u_{\min}^{(i)} \leqq f(d_i', d_i'')\, e_{\max}^{(i)} \qquad (i = 1, \ldots, j) . \tag{2}$$

Es besteht aber

$$\sum_{i=1}^{j} u_{\min}^{(i)} = u_{\min} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{j} e_{\max}^{(i)} = e_{\max} ,$$

und so erhält man aus (2) und (1)

$$u_{\min} \leqq f(d', d'') e_{\max} . \tag{3}$$

Das Gleichheitszeichen besteht hier dann und nur dann, wenn es in (2) und (1) für jedes $i = 1, \ldots, j$ gilt (wegen $d' \geqq 1$ ist $e_{\max}^{(i)} > 0$, $i = 1, \ldots, j$). Es muß also $d_i' = d'$ $(i = 1, \ldots, j)$, und im Falle $d'' - d' > 2$ auch $d_i'' = d''$ $(i = 1, \ldots, j)$ bestehen. Es ergibt sich nun leicht, daß in (3.1) (1) die Gleichheit tatsächlich nur in jenen Fällen auftritt, die im Satze (E.2) angegeben wurden. Damit ist der Beweis von (E.2) beendet.

(Eingegangen: 29. April, 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BERGE, C.: *Théorie des graphes et ses applications.* Paris 1958.
[2] ERDŐS, P. and GALLAI, T.: „On maximal paths and circuits of graphs." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959) 337—356.
[3] GALLAI, T.: „Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes." *Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci.*, **8** (1963) 135—139.
[4] GALLAI, T.: „Kritische Graphen II." *Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci.*, **8** (1963) 373—395.
[5] HALL, P.: „On representatives of subsets." *Journal London Math. Soc.*, **10** (1935) 26—30.
[6] KÖNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Leipzig 1936.
[7] ORE, O.: „Graphs and matching theorems." *Duke Math. Journal*, **22** (1955) 625—639.
[8] ORE, O.: *Theory of graphs.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **38** (1962).
[9] ORE, O.: „Graphs and subgraphs". *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957) 109—136.
[10] ORE, O.: „Graphs and subgraphs II." *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959) 185—204.
[11] RADO, R.: „Factorization of even graphs." *Quarterly journal of Math.*, **20** (1949) 95—104.
[12] TUTTE, W. T.: „The factorization of linear graphs." *Journal London Math. Soc.*, **22** (1947) 107—111.
[13] WEINSTEIN, J. H.: „On the number of disjoint edges in a graph." *Canadian Journal of Math.* **15** (1963) 106—111.

МАКСИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ РЕБЕР

T. GALLAI

Резюме

Пусть G — конечный граф, не содержащий петли и кратного ребра. Обозначаем через $\varepsilon(G)$ максимальное число независимых ребер графа G, т. е. из графа G можно выбирать $\varepsilon(G)$ — ребер, попарно не содержащих общую точку, а больше таких ребер нет. Множество M_u — точек графа G определяется так: точка $x \in M_u$ тогда и только тогда, если из графа G можно выбирать $\varepsilon(G)$ — независимых ребер, каждое из которых не содержит точки x. Одна из теорем, теорема (E. 1) приводит несколько знаменитых свойств множества M_u. В теореме (E. 2) дана нижняя оценка для $\varepsilon(G)$, в которую входит только число точек графа G и минимальное и максимальное значение степени этих точек.

SIMULTANE ÜBERLAGERUNG GEGEBENER GRAPHEN

von

HORST SACHS[1]

1. Einleitung

Bezeichnungen. Wir betrachten gerichtete und ungerichtete Graphen mit endlich vielen Knotenpunkten und Kanten; Mehrfachkanten und Schlingen sind zugelassen. Das Wort *Graph* (ohne Zusatz) bezeichnet stets einen ungerichteten Graphen; es soll jedoch zwischen einem Paar entgegengesetzt gerichteter Kanten (K, K'), (K', K) mit den gleichen Endknotenpunkten K, K' $(K' \neq K)$ und einer ungerichteten Kante $[K, K']$ mit denselben Endknotenpunkten nicht unterschieden werden, und ebenso soll es gestattet sein, je zwei zum gleichen Knotenpunkt gehörige gerichtete Schlingen $(K, K)_1$, $(K, K)_2$ durch eine ungerichtete Schlinge $[K, K]$ zu ersetzen und umgekehrt, so daß jeder (ungerichtete) Graph auch als spezieller gerichteter Graph (und umgekehrt jeder gerichtete Graph, dessen sämtliche gerichtete Kanten sich paarweise zu ungerichteten Kanten zusammenfassen lassen, auch als ungerichteter Graph) aufgefaßt werden kann.

Ein Graph heißt *regulär vom Grade r*, wenn mit jedem seiner Knotenpunkte genau r (ungerichtete) Kanten inzidieren; Schlingen sind doppelt zu zählen. Ein *linearer* bzw. *quadratischer Faktor* eines regulären Graphen G ist ein regulärer Untergraph von G mit den gleichen Knotenpunkten wie G vom Grade 1 bzw. 2. Ein *gerichteter Linearfaktor* von G ist ein gerichteter Untergraph von G mit den gleichen Knotenpunkten wie G und mit der Eigenschaft, daß in jedem seiner Knotenpunkte genau eine gerichtete Kante entspringt und genau eine gerichtete Kante mündet.

Ein (gerichteter) Graph heißt *paar*, wenn seine Knotenpunkte so in zwei Klassen eingeteilt werden können, daß zwei Knotenpunkte der gleichen Klasse niemals durch eine Kante verbunden sind.

Die Knotenpunkte eines (gerichteten oder ungerichteten) Graphen G seien numeriert, g_{ik} sei die Anzahl der gerichteten Kanten, welche vom Knotenpunkt K_i zum Knotenpunkt K_k laufen (g_{ii} sei die Anzahl der zum Knotenpunkt K_i gehörenden gerichteten Schlingen). Die Matrix

$$\mathbf{G} = (g_{ik})$$

heißt die *Adjazenzmatrix* von G; durch sie ist G eindeutig bestimmt.

Problemstellung. In den Theorien der verschiedenen Strukturen spielen die Begriffe „Unterstruktur" und „Faktorstruktur" eine große Rolle. Auch in

[1] Ilmenau, Technische Hochschule.

der Graphentheorie stößt man häufig auf den Begriff des „Untergraphen", während jedoch der Begriff des „Faktorgraphen" seltener angetroffen wird. Das mag daran liegen, daß der Begriff der homomorphen Abbildung, der dem Begriff der Faktorstruktur zugrunde liegt, für die Zwecke der Graphentheorie in seiner allgemeinen Fassung zu weit ist, und es entsteht die Frage, durch welche naturgemäßen Bedingungen er sinnvoll eingeschränkt werden kann. Es liegt nahe, lokale Homöomorphie der Abbildung zu fordern; wegen einiger Analogien wollen wir in diesem Falle den Bildgraphen als Teiler bezeichnen:

Der zusammenhängende Graph D heißt ein *Teiler* des Graphen G, wenn G homomorph und lokal-homöomorph auf D abgebildet werden kann.

Der Begriff der lokal-homöomorphen Abbildung bedarf der Präzisierung: Der folgenden Definition des Teilers D von G ist die in einem gewissen weiteren Sinne lokal-homöomorphe Abbildung von G auf D zugrunde gelegt; wir werden anschließend zeigen, daß dann D stets auch im engeren Sinne (d. h. unter Einbeziehung der Kanten in die Abbildung) lokal-homöomorphes Bild von G ist. — Wir veranschaulichen die Zuordnung zwischen den Knotenpunkten bzw. Kanten, indem wir Original und Bild jeweils mit der gleichen Farbe versehen.

Definition. *Die d Knotenpunkte des zusammenhängenden Graphen D seien paarweise verschieden gefärbt, die Farben seien von 1 bis d numeriert, und von einem Knotenpunkt K der Farbe i mögen genau d_{ik} Kanten ausgehen, welche zu einem Knotenpunkt der Farbe k führen ($i, k = 1, 2, \ldots, d$; d_{ii} ist gleich der doppelten Anzahl der zum Knotenpunkt K gehörigen Schlingen). D heißt genau dann ein Teiler des Graphen G, wenn es möglich ist, auch die Knotenpunkte von G je mit einer der Farben $1, 2, \ldots, d$ zu versehen derart, daß auch in G von jedem Knotenpunkt der Farbe i genau d_{ik} Kanten ausgehen, welche zu Knotenpunkten der Farbe k führen ($i, k = 1, 2, \ldots, d$).*

Es gilt folgender Satz:

(*) *Es sei D ein Teiler von G, jedem Knotenpunkt von G sei — im Sinne der vorstehenden Definition des Teilers — eindeutig ein Knotenpunkt von D als Bild zugeordnet. Die Kanten von D seien paarweise verschieden gefärbt, die verwendeten Farben seien $f_1, f_2, \ldots, f_l$. Dann ist es immer möglich, die Kanten von G ebenfalls je mit einer der Farben $f_1, f_2, \ldots, f_l$ zu versehen derart, daß für $\lambda = 1, 2, \ldots, l$ jeder Knotenpunkt von G mit genau so vielen Kanten der Farbe f_λ inzidiert wie der zugehörige Bildknotenpunkt in D; hierbei sind Schlingen doppelt zu zählen.*

In der Sprechweise der kombinatorischen Topologie können wir also sagen:

D ist genau dann ein Teiler von G, wenn G als unverzweigter Überlagerungskomplex von D aufgefaßt werden kann.

Der Beweis der Behauptung (*) folgt am Schluß der Einleitung.

Immer wenn im Folgenden vorausgesetzt wird, daß ein Graph G_1 Teiler eines Graphen G_2 sei, wollen wir annehmen, daß damit zugleich im oben ausgeführten Sinne eine bestimmte Zuordnung der Knotenpunkte und Kanten von G_1 zu denen von G_2 gegeben sei; auf diese können wir dann im weiteren Verlauf bezug nehmen.

Für „D ist Teiler von G" sagen wir auch

„G ist Vielfaches von D"

und schreiben

$$D \mid G .$$

Die Teilerrelation ist offenbar

transitiv: Aus $A \mid B$ und $B \mid C$ folgt $A \mid C$,

reflexiv: $A \mid A$

und in folgendem Sinne *antisymmetrisch:*

Aus $A \mid B$ und $B \mid A$ folgt: A ist isomorph zu B.

Das Problem, zu einem gegebenen zusammenhängenden Graphen G alle zusammenhängenden Vielfachen von G zu bestimmen, wird in den Lehrbüchern der kombinatorischen Topologie gelöst (siehe z. B. [1], p. 114).

Wir beschäftigen uns hier mit dem Problem, zu zwei gegebenen zusammenhängenden Graphen G_1, G_2 ein gemeinschaftliches Vielfaches G zu finden, d. h. einen Graphen G mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$ zu konstruieren. In § 3 wird eine einfache notwendige Bedingung für die Existenz eines solchen Graphen G angegeben (Satz 1). In § 4 setzen wir voraus, daß G_1 und G_2 regulär vom gleichen Grade sind, und führen die Konstruktion eines gemeinschaftlichen Vielfachen effektiv aus. Die Frage nach der Minimalzahl der hierzu benötigten Knotenpunkte führt zu folgenden Ergebnissen: *Wenn G_1 und G_2 n_1 bzw. n_2 Knotenpunkte haben, so existiert stets ein gemeinschaftliches Vielfaches mit nicht mehr als $2\,n_1\,n_2$ Knotenpunkten* (Satz 3). *Haben überdies G_1 und G_2 einen gemeinsamen Teiler mit d Knotenpunkten, so existiert stets ein gemeinschaftliches Vielfaches mit nicht mehr als $2\,\frac{n_1\,n_2}{d}$ Knotenpunkten* (Satz 5).

*

Beweis *der Behauptung* (*):

Wir betrachten zunächst zwei beliebige verschiedene Knotenpunkte K_i, K_k von D (der Index gebe die Farbe des Knotenpunktes an). Ist dann $d_{ik} = 0$, d. h. sind K_i und K_k nicht verbunden, so ist auch in G kein Knotenpunkt der Farbe i mit einem solchen der Farbe k verbunden. Ist aber $d_{ik} > 0$, so bildet die Gesamtheit der Kanten, welche in G einen Knotenpunkt der Farbe i mit einem solchen der Farbe k verbinden (zusammen mit den Endknotenpunkten aller dieser Kanten) einen Untergraphen U von G, welcher offenbar regulär vom Grade d_{ik} ist. U enthält sämtliche Knotenpunkte der Farben i und k von G und nur diese; zwei Knotenpunkte gleicher Farbe sind in U nicht verbunden, U ist also ein paarer Graph. Nach einem bekannten Satz von König können wir U in d_{ik} Linearfaktoren $L_1, L_2, \ldots, L_{d_{ik}}$ zerlegen. Sind dann (bei willkürlicher Numerierung) $E_1, E_2, \ldots, E_{d_{ik}}$ die Kanten, welche die Knotenpunkte K_i und K_k in D miteinander verbinden, so versehen wir jede Kante des Linearfaktors L_α mit der Farbe der Kante E_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, d_{ik}$).

Schließlich betrachten wir einen beliebigen Knotenpunkt K_i von D und die zugehörige Zahl d_{ii}. Ist $d_{ii} = 0$, d. h. ist K_i durch keine Schlinge mit sich selbst verbunden, so sind auch in G keine zwei Knotenpunkte der Farbe i miteinander verbunden. Ist aber $d_{ii} > 0$, so bildet die Gesamtheit der Kanten (einschließlich Schlingen) von G, deren beide Endknotenpunkte die Farbe i haben (zusammen mit allen diesen Knotenpunkten) einen Untergraphen V von G, welcher offenbar regulär vom Grade d_{ii} ist. V enthält sämtliche Knotenpunkte der Farbe i von G und nur diese. Da d_{ii} gerade ist, können wir V nach einem bekannten Satz von Petersen in $\frac{1}{2}\,d_{ii}$ quadratische Faktoren Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{d_{ii}/2}$ zerlegen. Sind dann $S_1, S_2, \ldots, S_{d_{ii}/2}$ die Schlingen, welche zum

Knotenpunkt K_i gehören, so versehen wir jede Kante von Q_β mit der Farbe der Schlinge S_β ($\beta = 1, 2, \ldots, d_{ii}/2$).

Es ist leicht einzusehen, daß auf diese Weise jede Kante von G genau eine der Farben $f_1, f_2, \ldots, f_l$ erhält und daß die so gewonnene Färbung die in (*) genannte Eigenschaft besitzt.

2. Summe, direktes und paares Produkt zweier (gerichteter) Graphen

Für die zu führenden Beweise erweist es sich als zweckmäßig, folgende Graphenverknüpfungen zu betrachten:

Summe. A und B seien zwei beliebige gerichtete Graphen über der gleichen Knotenpunktmenge $\mathfrak{K}$, $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ seien die zugehörigen Adjazenzmatrizen. Dann definiert die Matrix $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ik} + b_{ik})$ einen gerichteten Graphen S über $\mathfrak{K}$, die Summe von A und B. Wir schreiben

$$S = A + B\,.$$

Entsprechend ist die Summe für mehr als zwei Summanden definiert, wir verwenden auch das Summenzeichen Σ.

Direktes Produkt. A und B seien zwei beliebige gerichtete Graphen, A habe die Knotenpunkte K_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), B habe die Knotenpunkte K'_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Wir führen $m \cdot n$ neue Knotenpunkte K_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) ein und verbinden diese folgendermaßen durch gerichtete Kanten: Die Anzahl $m_{ij,kl}$ der Kanten, die von einem Knotenpunkt K_{ij} zu einem Knotenpunkt K_{kl} laufen, sei gleich der Anzahl der Kanten, die in A von K_i nach K_k laufen, multipliziert mit der Anzahl der Kanten, die in B von K'_j nach K'_l laufen, oder kurz:

$$m_{ij,kl} = a_{ik} \cdot b_{jl}\,.$$

Der Graph M, der hierbei entsteht, heiße das direkte Produkt von A und B; wir schreiben

$$M = A \times B\,.$$

Die Adjazenzmatrix $\mathbf{M}$ von M erhält man, wenn man in $\mathbf{A}$ jedes Element a_{ik} durch die Matrix $a_{ik} \cdot \mathbf{B}$ ersetzt.

Paares Produkt. A und B seien zwei beliebige gerichtete Graphen über der gleichen Knotenpunktmenge $\mathfrak{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$. $K'_i = K_{n+i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) seien n weitere Knotenpunkte, ferner sei $\mathfrak{K}' = \{K'_1, K'_2, \ldots, K'_n\} = \{K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots, K_{2n}\}$. Wir definieren über

$$\mathfrak{K} + \mathfrak{K}' = \{K_1, K_2, \ldots, K_{2n}\}$$

einen gerichteten Graphen P mit der Adjazenzmatrix

$$\mathbf{P} = (p_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

durch folgende Festsetzung:

$$p_{ik} = \begin{cases} a_{i,\,k-n} & \text{für } K_i \in \mathfrak{K},\ K_k \in \mathfrak{K}' \\ b_{i-n,\,k} & \text{für } K_i \in \mathfrak{K}',\ K_k \in \mathfrak{K} \\ 0 & \text{für } K_i \in \mathfrak{K},\ K_k \in \mathfrak{K} \\ & \text{sowie für } K_i \in \mathfrak{K}',\ K_k \in \mathfrak{K}'\,, \end{cases}$$

d. h. es sei

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

P ist ersichtlich ein (gerichteter) paarer Graph, der paares Produkt von A und B heißen möge; wir schreiben

$$P = A \circ B .$$

P ist offenbar genau dann ungerichtet, wenn $\mathbf{B}$ zu $\mathbf{A}$ transponiert ist. Ist $B = A$, so nennen wir $A \circ A$ das *paare Quadrat* von A.

H bezeichne den Graphen, der aus einer ungerichteten Kante und deren beiden Endknotenpunkten besteht. Dann gilt

$$A \circ A = H \times A .$$

Für die Definition des direkten Produktes und damit auch des paaren Quadrates ist — anders als für die Definition der Summe und des paaren Produktes im allgemeinen Falle — die Anordnung der Knotenpunkte nicht wesentlich.

Ist G ungerichtet, so ist auch $G \circ G$ ungerichtet, und man veranschaulicht sich $G \circ G$ auf folgende Weise: Der Graph G' sei isomorph zu G; dann kann man sich G und G' in zwei parallelen Ebenen kongruent übereinanderliegend gezeichnet denken, und man erhält $G \circ G$, indem man jedes Paar übereinanderliegender (ungerichteter) Kanten $[K_i, K_j]$, $[K'_i, K'_j]$ durch das zugehörige Paar „sich kreuzender" Kanten $[K_i, K'_j]$, $[K'_i, K_j]$ ersetzt.

Aus dieser Konstruktion liest man sofort folgende Eigenschaften des paaren Quadrates eines ungerichteten Graphen G ab:

(A) *Ist G zusammenhängend und nicht paar, so ist auch $G \circ G$ zusammenhängend.*

(B) *Ist G zusammenhängend und paar, so zerfällt $G \circ G$ in genau zwei zusammenhängende Komponenten, welche beide zu G isomorph sind.*

(C) *Ist G zusammenhängend, so gilt*

$$G \mid G \circ G .$$

Außerdem benötigen wir folgenden Hilfssatz:

(D) *Der Graph H sei paar, und der Graph G sei ein nicht-paarer Teiler von H. Dann ist auch $G \circ G$ ein Teiler von H.*

Beweis. Wir konstruieren $G \circ G$ auf die oben angegebene Weise, der Knotenpunkt K_i erhält die „Farbe" $(i, 1)$, der darüberliegende Knotenpunkt $K'_i = K_{n+i}$ erhält die Farbe $(i, 2)$. Dann haben verschiedene Knotenpunkte von $G \circ G$ verschiedene Farben, und die Farben zweier durch eine Kante verbundener Knotenpunkte haben verschiedene zweite Komponenten.

Da H paar ist, können wir die Knotenpunkte von H so in zwei Klassen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ einteilen, daß zwei Knotenpunkte der gleichen Klasse niemals durch eine Kante verbunden sind. Nun ordnen wir auch jedem Knotenpunkt von H eine Farbe (i, j) zu, wobei i die Nummer seines Bildknotenpunktes in G und j die Nummer der Klasse ist, welcher er angehört ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2$).

Diese Färbung der Knotenpunkte vermittelt eine lokal-homöomorphe homomorphe Abbildung von H auf $G \circ G$, denn die Farben der Nachbarn eines Knotenpunktes von H stimmen ersichtlich mit den Farben der Nachbarn des zugehörigen Knotenpunktes von $G \circ G$ (in ihrer Gesamtheit und je mit der richtigen Multiplizität gezählt) sowohl in der ersten Komponente i (wegen $G \mid H$) als auch in der zweiten Komponente j (weil H und $G \circ G$ beide paar sind) überein.

3. Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines gemeinschaftlichen Vielfachen

Satz 1. *Es seien G_1 und G_2 zwei gegebene zusammenhängende Graphen. $n_i^{(j)}$ sei die Anzahl der in G_i vorkommenden Knotenpunkte vom Grade j, n_i sei die Anzahl aller in G_i vorkommenden Knotenpunkte ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, \ldots$). Wenn dann ein Graph G mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$ und $G_2 \mid G$ existiert, so gilt*

$$n_2\, n_1^{(j)} = n_1\, n_2^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Beweis. $n^{(j)}$ und n seien die Anzahlen der Knotenpunkte vom Grade j bzw. aller Knotenpunkte von G. G ist Überlagerungsgraph zu G_1, jeder Knotenpunkt K von G_1 wird von je gleich vielen Knotenpunkten von G überlagert (s. [1], loc. cit.), welche überdies alle den gleichen Grad wie K haben. Folglich gibt es eine natürliche Zahl c_1 so, daß

$$n^{(j)} = c_1 \cdot n_1^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

und entsprechend eine natürliche Zahl c_2 mit

$$n^{(j)} = c_2 \cdot n_2^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Durch Summation über j ergibt sich aus (2) und (3)

$$n = c_1\, n_1 = c_2\, n_2\,; \tag{4}$$

aus (2) und (3) folgt weiter

$$c_1\, n_1^{(j)} = c_2\, n_2^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

und aus (4) und (5) ergibt sich die behauptete Relation (1).

Bemerkung. Ist insbesondere G_1 regulär vom Grade r und gilt $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$, so sind G und G_2 notwendig ebenfalls regulär vom Grade r. Für reguläre Graphen gleichen Grades ist die Bedingung (1) von selbst erfüllt. Diesem Fall wenden wir uns im folgenden Abschnitt zu.

4. Konstruktion gemeinschaftlicher Vielfacher für gegebene reguläre Graphen

Satz 2. *G_1 und G_2 seien zwei beliebige zusammenhängende reguläre Graphen vom Grade r mit n_1 bzw. n_2 Knotenpunkten, welche beide in lineare und quadratische Faktoren zerfallen.*[1] *Dann existiert ein zusammenhängender regulärer Graph G vom Grade r mit nicht mehr als $n_1\, n_2$ Knotenpunkten, welcher ebenfalls in lineare und quadratische Faktoren zerfällt, mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.*

---

[1] Das ist bekanntlich gewiß der Fall, wenn r gerade ist, sowie für $r = 3$, wenn G_1 und G_2 keine Brücken besitzen.

Zusatz. *Sind G_1 und G_2 außerdem beide paar, so existiert sogar ein paarer zusammenhängender Graph G mit nicht mehr als $\frac{1}{2} n_1 n_2$ Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.*

Beweis. Indem wir nötigenfalls Linearfaktoren paarweise zu quadratischen Faktoren zusammenfassen, dürfen wir annehmen, daß sowohl G_1 als auch G_2 in genau u quadratische und v lineare Faktoren zerfällt ($u \geqq 0$, $v \geqq 0$; $2u + v = r$). Die quadratischen Faktoren Q_i und die linearen Faktoren L_i von G_i werden folgendermaßen numeriert:

$$Q_i^{(1)}, Q_i^{(2)}, \ldots, Q_i^{(u)};\ L_i^{(2u+1)}, L_i^{(2u+2)}, \ldots, L_i^{(2u+v)} = L_i^{(r)} \qquad (i = 1, 2) \cdot$$

Wird nun jeder Kreis eines quadratischen Faktor $Q_i^{(j)}$ in beliebiger Weise fest orientiert, so geht hierdurch $Q_i^{(j)}$ in einen g e r i c h t e t e n Linearfaktor $L_i^{(j)}$ über; der entgegengesetzt orientierte Linearfaktor werde mit $L_i^{(u+j)}$ bezeichnet, so daß also $L_i^{(j)} + L_i^{(u+j)} = Q_i^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, u$; $i = 1, 2$). Nach dieser Festsetzung haben wir also

$$G_i = \sum_{\varrho=1}^{r} L_i^{(\varrho)} \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Dann ist

$$G_0 = \sum_{\varrho=1}^{r} L_1^{(\varrho)} \times L_2^{(\varrho)}$$

ein ungerichteter Graph mit $n_1 n_2$ Knotenpunkten, u ungerichteten quadratischen Faktoren

$$Q_0^{(j)} = L_1^{(j)} \times L_2^{(j)} + L_1^{(u+j)} \times L_2^{(u+j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, u)$$

und v ungerichteten Linearfaktoren

$$L_0^{(2u+k)} = L_1^{(2u+k)} \times L_2^{(2u+k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, v)\,.$$

G_1 habe die Knotenpunkte K_i^1

G_2 habe die Knotenpunkte K_j^2

G_0 habe die Knotenpunkte K_{ij}^0 $\qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1;\ j = 1, 2, \ldots, n_2)$,

wobei die Indizierung der Knotenpunkte von G_0 durch die direkte Multiplikation der Linearfaktoren gegeben ist. Man macht sich leicht klar: Durch die Zuordnung

$$K_{i1}^0, K_{i2}^0, \ldots, K_{in_2}^0 \to K_i^1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1)$$

ist eine homomorphe und lokal-homöomorphe Abbildung von G_0 auf G_1 definiert, das bedeutet $G_1 \mid G_0$, und ebenso schließen wir $G_2 \mid G_0$ (vgl. Abb. 1); also hat G_0 oder — falls G_0 nicht zusammenhängend ist — jede zusammenhängende Komponente von G_0 alle im Satz für G geforderten Eigenschaften.

Beweis *des Zusatzes:* Sind G_1 und G_2 paar, so gilt $n_1 \equiv n_2 \equiv 0 \pmod 2$, und die Knotenpunktmengen von G_1 und G_2 zerfallen je in zwei Klassen von je $\frac{1}{2} n_1$ bzw. $\frac{1}{2} n_2$ Knotenpunkten derart, daß zwei Knotenpunkte der gleichen Klasse niemals durch eine Kante verbunden sind. Wir denken uns die

Knotenpunkte so numeriert, daß jeweils die Knotenpunkte mit ungeradem Index die eine und die mit geradem Index die andere Klasse bilden, so daß also jede Kante einen Knotenpunkt mit geradem Index mit einem solchen mit ungeradem Index verbindet.

G_1 und G_2 zerfallen nach einem bekannten Satz von KŐNIG als reguläre paare Graphen vollständig in Linearfaktoren, wir können also die im Beweis

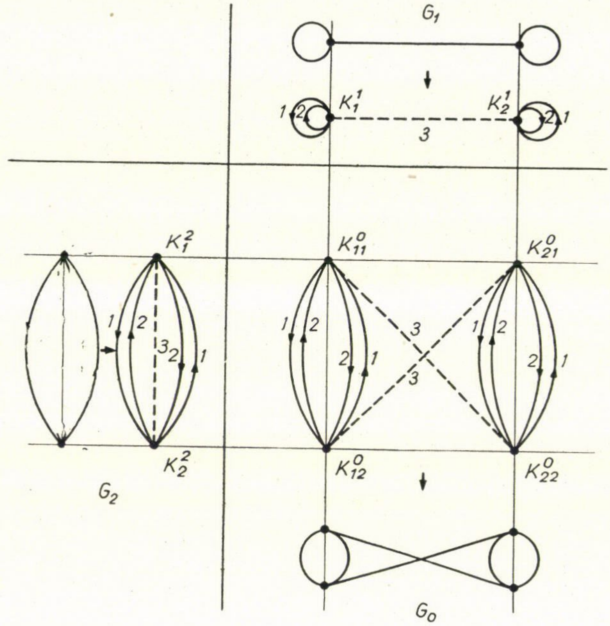


Abb. 1.

zu Satz 2 angegebene Konstruktion mit $u = 0$ und $v = r$ durchführen. Wir teilen die Knotenpunkte K_{ij}^0 in zwei Klassen ein: Diejenigen K_{ij}^0 mit $i \equiv j \pmod 2$ bilden die eine, diejenigen mit $i \not\equiv j \pmod 2$ bilden die andere Klasse. Jede dieser Klassen enthält genau $\frac{1}{2} n_1 \cdot n_2$ Knotenpunkte.

Auf grund der Konstruktionsvorschrift für G_0 ist klar: Jede der neu eingeführten Kanten verbindet zwei Knotenpunkte miteinander, welche zur gleichen Klasse gehören. Folglich zerfällt G_0 in mehrere (untereinander nicht verbundene) Komponenten, von denen keine mehr als $\frac{1}{2} n_1 n_2$ Knotenpunkte besitzt, und jede dieser Komponenten hat sowohl G_1 als auch G_2 zu Teilern. Diese sind überdies paar, da sie paare Teiler haben.

Satz 3. *G_1 und G_2 seien zwei beliebige zusammenhängende reguläre Graphen vom Grade r mit n_1 bzw. n_2 Knotenpunkten. Es sei*

$h = \frac{1}{2} n_1 n_2$, *falls G_1 und G_2 beide paar sind,*

$h = n_1 n_2$, *falls genau einer der Graphen G_1, G_2 paar ist,*

$h = 2 n_1 n_2$, *falls keiner der Graphen G_1, G_2 paar ist.*

Dann existiert ein zusammenhängender regulärer p a a r e r *Graph G mit nicht mehr als h Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.*

Bemerkung. Aus Satz 3 folgt insbesondere, daß es zu zwei beliebigen zusammenhängenden regulären Graphen gleichen Grades stets ein gemeinschaftliches Vielfaches mit nicht mehr als $2\, n_1\, n_2$ Knotenpunkten gibt. Diese Schranke ist scharf in dem Sinne, daß es Fälle gibt, in welchen kein gemeinschaftliches Vielfaches mit weniger als $2\, n_1\, n_2$ Knotenpunkten existiert; Beispiel siehe Abb. 2.

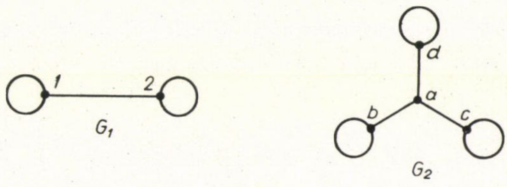


Abb. 2.

(Man zeigt leicht durch Probieren, daß kein gemeinschaftliches Vielfaches mit 4, 8 oder 12 Knotenpunkten existiert.)

Es kann jedoch neben dem paaren Vielfachen, dessen Existenz in Satz 3 behauptet wird, weitere nicht-paare gemeinschaftliche Vielfache mit $2\, n_1\, n_2$ Knotenpunkten geben; für unser Beispiel siehe Abb. 3.

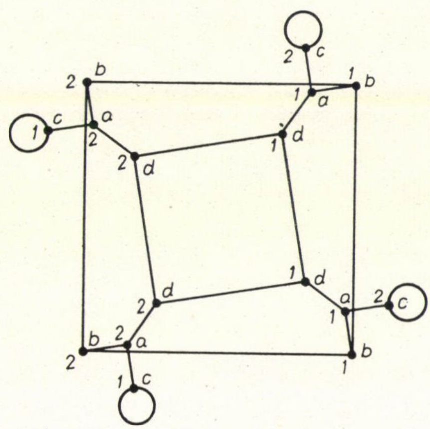


Abb. 3.

Beweis *von Satz* 3. Wenn G_1 und G_2 beide paar sind, so stimmt die Behauptung mit dem Zusatz zu Satz 2 überein.

Wenn genau einer der beiden Graphen, etwa G_1 paar ist, so betrachten wir die Graphen G_1 und $G_2^* = G_2 \circ G_2$; nach dem Zusatz zu Satz 2 existiert dann ein paarer Graph G^* mit nicht mehr als $\frac{1}{2} n_1 \cdot 2\, n_2 = n_1\, n_2$ Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 | G^*$, $G_2^* | G^*$. Wegen $G_2 | G_2 \circ G_2 = G_2^*$ gilt dann auch $G_2 \mid G^*$.

Wenn keiner der Graphen G_1, G_2 paar ist, so betrachten wir die Graphen $G_1^* = G_1 \circ G_1$ und $G_2^* = G_2 \circ G_2$ und wenden wieder den Zusatz zu Satz 2 an: hiernach existiert ein paarer Graph G^{**} mit nicht mehr als $\frac{1}{2} 2\, n_1 \cdot 2\, n_2 = 2\, n_1 n_2$ Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1^* \mid G^{**}$, $G_2^* \mid G^{**}$. Daraus ergibt sich wegen $G_1 \mid G_1^*$ und $G_2 \mid G_2^*$ sofort $G_1 \mid G^{**}$ und $G_2 \mid G^{**}$.

Satz 4. *G_1 und G_2 seien zwei beliebige zusammenhängende reguläre Graphen mit n_1 bzw. n_2 Knotenpunkten, welche einen gemeinsamen Teiler D mit d Knotenpunkten besitzen, der in lineare und quadratische Faktoren zerfällt. Dann existiert ein zusammenhängender regulärer Graph G mit nicht mehr als $\frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.*

Bemerkung. Der Zusatz zu Satz 2 ergibt sich aus Satz 4 als Spezialfall, die Rolle von D hat der aus zwei Knotenpunkten und r diese Knotenpunkte miteinander verbindenden Kanten bestehende Graph.

Beweis *von Satz* 4 (vgl. dazu Abb. 4): Die Knotenpunkte von D seien von 1 bis d numeriert. Auf der Menge $\{K\}$ aller Knotenpunkte von G_1 und G_2 definieren wir nun eine Funktion $\delta = \delta(K)$ durch die Vorschrift:

$\delta(K)$ ist gleich der Nummer desjenigen Knotenpunktes von D, auf welchen K abgebildet wird (durch den Homomorphismus, welcher der Relation $D \mid G_1$ bzw. $D \mid G_2$ zugrunde liegt).

D wird wie beim Beweis von Satz 2 in r (gerichtete und ungerichtete) Linearfaktoren $L^{(\varrho)}$ zerlegt; diesen entsprechen je r Linearfaktoren $L_1^{(\varrho)}$ von G_1 und $L_2^{(\varrho)}$ von G_2 ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$).[2] Wie beim Beweis von Satz 2 konstruieren wir nun den Graphen

$$G^* = \sum_{\varrho=1}^{r} L_1^{(\varrho)} \times L_2^{(\varrho)}$$

mit den $n_1 \cdot n_2$ Knotenpunkten K_{ij}^* ($i = 1, 2, \ldots, n_1$; $j = 1, 2, \ldots, n_2$); dabei entspreche K_{ij}^* dem Knotenpunktpaar $K_i^1 \in G_1$, $K_j^2 \in G_2$. Es gilt $G_1 \mid G^*$, $G_2 \mid G^*$. $\mathfrak{C}$ sei die Klasse derjenigen Knotenpunkte K_{ij}^* von G^*, für welche $\delta(K_i^1) = \delta(K_j^2)$ ist; $\mathfrak{C}$ enthält offenbar genau $\frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkte. Wir wollen zeigen, daß in G^* kein Knotenpunkt von $\mathfrak{C}$ mit einem nicht zu $\mathfrak{C}$ gehörigen Knotenpunkt durch eine Kante verbunden ist; daraus folgt dann, daß $\mathfrak{C}$ einen Untergraphen G von G^* mit $\frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkten bestimmt, welcher ebenfalls die Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$ besitzt, womit dann der Satz bewiesen sein wird.

Wir betrachten eine von dem Knotenpunkt $K_{ij}^* \in \mathfrak{C}$ ausgehende gerichtete Kante $E^* = (K_{ij}^*, K_{i'j'}^*)$ von G^*, welche dem Linearfaktor $L_1^{(\varrho_0)} \times L_2^{(\varrho_0)}$ angehören möge. Diese hat in G_1 die Bildkante $E_1 = (K_i^1, K_{i'}^1) \in L_1^{(\varrho_0)}$ und in

[2] Allgemein gilt: Sind D und G reguläre Graphen mit $D \mid G$ und besitzt D einen (gerichteten oder ungerichteten) regulären Faktor, so bilden die zu den Kanten dieses Faktors gehörigen Originalkanten in G einen entsprechenden regulären Faktor von G. Zu einer Faktorzerlegung von D gehört eine entsprechende Faktorzerlegung von G.

Man beachte aber, daß sich umgekehrt die Eigenschaft eines Graphen, eine Faktorzerlegung bestimmter Art zu besitzen, nicht allgemein auf seine Teiler überträgt: Der PETERSENsche Graph Π ist ein Teiler des Pentagondodekaeder-Graphen Δ, Δ zerfällt in 3 Linearfaktoren, Π dagegen nicht.

G_2 die Bildkante $E_2 = (K_j^2, K_{j'}^2) \in L_2^{(\varrho_0)}$. E_1 und E_2 wiederum haben in D Bildkanten, welche dem Linearfaktor $L^{(\varrho_0)}$ angehören und von Knotenpunkten mit den Nummern $\delta(K_i^1)$ und $\delta(K_j^2)$ beziehentlich ausgehen. Wegen $\delta(K_i^1) = \delta(K_j^2)$ folgt hieraus aber sogleich, daß diese beiden Kanten identisch sind, daß also E_1 und E_2 in D dieselbe Bildkante und damit $K_{i'}^1$ und $K_{j'}^2$ in D denselben Bildknotenpunkt haben. Das bedeutet aber $\delta(K_{i'}^1) = \delta(K_{j'}^2)$, und folglich gehört auch $K_{i'j'}^*$ zu $\mathfrak{C}$.

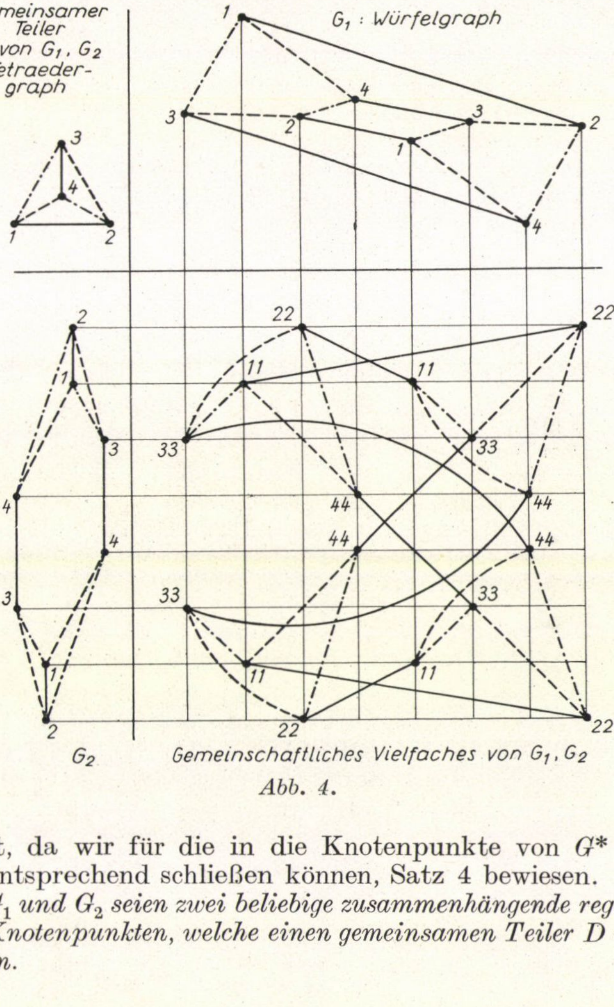


Abb. 4.

Damit ist, da wir für die in die Knotenpunkte von G^* einlaufenden Kanten ganz entsprechend schließen können, Satz 4 bewiesen.

Satz 5. *G_1 und G_2 seien zwei beliebige zusammenhängende reguläre Graphen mit n_1 bzw. n_2 Knotenpunkten, welche einen gemeinsamen Teiler D mit d Knotenpunkten besitzen.*

Es sei

$h = \frac{1}{2}\,\frac{n_1 n_2}{d}$, *falls D nicht paar ist, aber G_1 und G_2 beide paar sind,*

$h = \frac{n_1 n_2}{d}$, *falls D paar ist oder falls D nicht paar und genau einer der Graphen G_1, G_2 paar ist,*

$h = 2\,\frac{n_1 n_2}{d}$, *falls keiner der Graphen D, G_1, G_2 paar ist.*

Dann existiert ein zusammenhängender regulärer paarer Graph G mit nicht mehr als h Knotenpunkten und mit der Eigenschaft $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.

Beweis *von Satz* 5.

1. D ist nicht paar, G_1 und G_2 sind beide paar.

Nach (D) gilt sogar $D \circ D \mid G_1$, $D \circ D \mid G_2$. Da $D \circ D$ als paarer Graph in Linearfaktoren zerfällt, kann Satz 4 mit $D^* = D \circ D$ angewandt werden: Es gibt einen zusammenhängenden regulären Graphen G mit $\frac{n_1 n_2}{d^*} = \frac{n_1 n_2}{2d}$ Knotenpunkten und mit $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$, und da G den paaren Teiler D^* besitzt, ist G gewiß paar.

2. a) D ist paar.

Dann folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 4.

b) D ist nicht paar, genau einer der Graphen G_1, G_2, etwa G_1, ist paar.

Dann sei $D^* = D \circ D$, $G_2^* = G_2 \circ G_2$; aus Satz 4, angewandt auf die Graphen G_1, G_2^*, D^*, ergibt sich die Existenz eines paaren Graphen G mit $\frac{n_1 \cdot 2\, n_2}{2d} = \frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkten mit $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.

3. Keiner der Graphen D, G_1, G_2 ist paar.

Jetzt sei $D^* = D \circ D$, $G_1^* = G_1 \circ G_1$, $G_2^* = G_2 \circ G_2$; wie vorher ergibt sich die Existenz eines paaren Graphen G mit $\frac{2\, n_1 \cdot 2\, n_2}{2d} = 2\frac{n_1 n_2}{d}$ Knotenpunkten mit $G_1 \mid G$, $G_2 \mid G$.

Damit ist Satz 5 bewiesen.

(Eingegangen: 29. April, 1964.)

LITERATUR

[1] Reidemeister, K.: *Einführung in die kombinatorische Topologie*. Braunschweig 1932

ОДНОВРЕМЕННОЕ ПОКРЫТИЕ ДАННЫХ ГРАФОВ

H. SACHS

Резюме

Пусть D и G односвязные, неориентированные графы. D называется делителем G и G называется кратным D, если D является гомоморфным и локально гомеоморфным отображением от G, т. е. если G является неразветвленным покрывающим множеством от D.

В работе изучена задача, найти к данным двум односвязным неориентированным графам общий кратный.

В § 3 дается простое необходимое условие для существования такого графа (Теорема 1).

В § 4 предположено, что G_1 и G_2 являются регулярными *равными порядками*. В этом случае конструкция общего кратного может быть эффек-

тивно выполнена. Вопрос о минимальном числе вершин, потребованных для этого ведет к следующему результату: *если* G_1 *и* G_2 *имеют* n_1 *и* n_2 *вершин, тогда всегда существует общий кратный с не больше чем* $2n_1n_2$ *вершинами* (Теорема 3). *Если* G_1 *и* G_2 *имеют общий делитель с* d *вершинами, тогда всегда существует общий кратный с не больше чем* $2\frac{n_1n_2}{d}$ *вершинами.*

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ P. BATEMAN—A, S. CHOWLA И P. ERDŐS—A

М. Б. БАРБАН[1]

Пусть $L(S, \chi_D)$ означает L — ряд, соответствующий характеру χ модуля D. В одной из работ Chowla [1] доказал, что для вещественных характеров χ_D любое из неравенств

$$L(1, \chi_D) > (1 - \varepsilon)\, e^{\gamma} \ln \ln D$$

$$L(1, \chi_D) < \frac{1 + \varepsilon}{6\pi^{-2}\, e^{\gamma} \ln \ln D} \quad (\gamma\text{-постоянная Эйлера})$$

выполняется для бесконечного множества модулей D. До этого Ю. В. Линник [2] и A. Walfish [3] независимо друг от друга получили

$$L^{-1}(1, \chi_D) = \Omega(\sqrt{\ln \ln D}).$$

P. Bateman, S. Chowla и P. Erdős [4] показали, что если D пробегает простые модули, то верны те же оценки лишь с ухудшением констант в 18 раз. В этой же работе был намечен путь, позволяющий заменить 18 на 4. Дальнейшее продвижение связано с видоизменением «большого решета» так, чтобы оно действовало на интервале $(1, x)$ для модулей $p \leqq x^{1-\varepsilon}$ (у Rényi наиболее далеко продвинутое «большое решето» ограничено условием $p \leqq \sqrt{x}$). (p означает простое число.) Но это совсем нетрудно получить в рамках тех же идей.

Введем обозначения:

a_n — возрастающая последовательность целых чисел

$p(n)$ — максимальный простой делитель, $\ln_l n$ — l-тая итерация логарифма.

$$A(x) = \sum_{a_n \leqq x} 1, \quad A(x, D, l) = \sum_{\substack{a_n \leqq x \\ a_n \equiv l(D)}} 1\,,$$

$$T(x, D) = \sum_{l(D)} \left\{ A(x, D, l) - \frac{A(x)}{D} \right\}^2, \quad S(a) = \sum_{a_n \leqq x} e^{2\pi i a a_n}$$

где $\sum\limits_{l(D)}$ означает что суммирование распространяется для $l = 0, 1, \ldots, D-1$.

---

[1] Институт математики им. В. И. Романовского АН УзССР, Ташкент.

Теорема 1. *(«большое решето»).*

При любом $1 < B < \frac{x}{M}$, $B < M$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{p \leq M} pT(x, p) \leqq \frac{2\pi A(x)\, x}{B} M + A^2(x) \frac{B^2}{M^2} M .$$

где p *простое число.*

Доказательство. Рассмотрим систему интервалов

$$\left\{\left[\frac{y}{p} - \delta,\ \frac{y}{p} + \delta\right],\ y = \overline{1, p-1}\right\},$$

где

$$\delta = \frac{1}{2\pi x} \frac{B}{M},$$

и обозначим через I_p сумму интегралов от $|S(\alpha)|^2$ по этим интервалам. Очевидно,

$$I_p = \int_{-\delta}^{+\delta} \sum_{y=0}^{p-1} \left| S\left(\frac{y}{p} + \alpha\right)\right|^2 d\alpha - \int_{-\delta}^{+\delta} |S(\alpha)|^2 d\alpha \geqq$$

$$\geqq \sum_{a_n \leq x} \sum_{a_m \leq x} \sum_{y=0}^{p-1} e^{2\pi i (a_n - a_m) \frac{y}{p}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{2\pi i (a_n - a_m)\alpha}\, d\alpha - 2\,\delta A^2(x) =$$

$$= 2\,p \sum_{\substack{a_n - a_m \equiv 0(p) \\ a_n \leq x,\ a_m \leq x \\ a_n \neq a_m}} \frac{\sin 2\pi\delta\, |a_n - a_m|}{2\pi\, |a_n - a_m|} + 2\,p\delta\, A(x) - 2\,\delta\, A^2(x) .$$

Так как $\delta \leqq \frac{1}{2\pi x}$, то пользуясь неравенством $\sin \alpha > \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$, верном при $0 < \alpha \leqq 1$, получим, что

$$I_p \geqq 2p\delta \sum_{\substack{a_n - a_m \equiv 0(p) \\ a_n \leq x,\ a_m \leq x}} 1 - \frac{4\,\pi^2\,\delta^3\,px^2}{3} \sum_{\substack{a_n - a_m \equiv 0(p) \\ a_n \leq x,\ a_m \leq x}} 1 - 2\,\delta\, A^2(x) . \tag{1}$$

Теперь уже видно, что I_p «мало» отличается от $T(x, p)$. В самом деле

$$T(x, D) = \sum_{l(D)} \left\{A(x, D, l) - \frac{A(x)}{D}\right\}^2 = \sum_{l(D)} A^2(x, D, l) -$$

$$- 2\, \frac{A(x)}{D} \sum_{l(D)} A(x, D, l) + \frac{A^2(x)}{D} = \sum_{\substack{a_n - a_m \equiv 0(D) \\ a_n \leq x,\ a_m \leq x}} 1 - \frac{A^2(x)}{D},$$

поэтому (1) можно переписать в виде

$$I_p \geqq 2\,p\,\delta \left(1 - \frac{2\,\pi^2\,\delta^2\,x^2}{3}\right) T(x, p) - \frac{4\,\pi^2\,\delta^3\,x^2\,A^2(x)}{3} ,$$

или

$$(2) \qquad I_p \geqq \delta p\, T(x, p) - \frac{4\,\pi^2\,\delta^3\,x^2\,A^2(x)}{3}$$

в силу условия $\delta < \dfrac{1}{2\pi x}$.

Но все интервалы, соответствующие различным $p < M$, не пересекаются, ибо расстояние между центрами различных интервалов

$$\left|\frac{y_1}{p_1} - \frac{y_2}{p_2}\right| = \frac{|\,p_2\,y_1 - y_2\,p_1|}{p_1\,p_2} \geqq \frac{1}{p_1\,p_2} > \frac{1}{M^2},$$

что, очевидно, больше длины интервалов $2\delta = \dfrac{B}{\pi\,xM}$. Поэтому

$$\sum_{p \leqq M} I_p \leqq \int_0^1 |\,S(\alpha)\,|^2\,d\alpha = A(x)$$

и применение неравенства (2) завершает доказательство теоремы.

Теперь мы можем дать простое доказательство усиленной теоремы. от P. Bateman, S. Chowla и P. Erdős.

Теорема 2. *Для простых чисел q имеет место*

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\,\frac{L(1,\,\chi_q)}{\ln\ln q} \geqq e^{\gamma}, \quad \underline{\lim_{q\to\infty}}\,(\ln\ln q)\,L(1,\,\chi_q) < \frac{\pi^2}{6\,e^{\gamma}}.$$

Между прочим, теорема S. Chowla [1] является следствием теоремы 2. Мы начнем со вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Для неглавного квадратического характера χ_q имеет место*

$$\ln L(1,\,\chi_q) = -\sum_{p\leqq y} \ln\left\{1 - \left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{p}\right\} + \sum_{p>y}\left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Лемма является легким следствием представления $L(1,\,\chi_q)$ в виде бесконечного произведения

$$L(1,\,\chi_q) = \prod_p \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Лемма 2. *Для всех $D \leqq e^{c\frac{\ln x}{\ln\ln x}}$ за исключением кратных некоторого $Q > \ln^A x$, которое может встретиться, при $(D,\,l) = 1$ имеет место*

$$\pi(x,\,D,\,l) = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(D)}\,[1 + O(e^{-c\frac{\ln x}{\ln D}}) + O(e^{-c\sqrt{\ln x}})]\,.$$

Это известный результат теории простых чисел (см., например, [4]).

Доказательство теоремы 2. Пусть $k = 4 \prod\limits_{\substack{p < \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^4} \\ p \neq p(Q)}} p$, где

Q — число из леммы 2. Тогда, очевидно, к модулю k применима лемма 2. Выберем класс вычетов $l_1 \pmod{k}$, удовлетворяющий следующим условиям

$$l_1 \equiv 1 \pmod 8, \quad l_1 \equiv g_p \pmod p \text{ для } 2 < p < \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^8}, \; p \neq p(Q),$$

где g_p — произвольный квадратический вычет $\bmod p$.

Обозначим через F множество простых чисел q, $\sqrt{x} < q \leqq x$, ($q \neq Q$, если Q окажется простым числом этого интервала), удовлетворяющих сравнению $q \equiv l_1(k)$). Пусть S означает количество чисел множества F.

Тогда для всех простых чисел q, $q \in F$, в силу квадратического закона взаимности, имеем

$$\left(\frac{p}{q}\right) = 1 \quad \text{для} \quad p < \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^8}, \; p \neq p(Q)\,.$$

Воспользуемся теперь леммой 1 с $y = \dfrac{\ln x}{(\ln\ln x)^8}$. Получим

$$\sum_{q\in F} \ln L(1, \chi_q) = -S \sum_{p \leq \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^8}} \ln\left\{1 - \frac{1}{p}\right\} + \sum_{q\in F} \sum_{p > \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^8}} \left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{p} +$$
$$+ O\left(\frac{S}{p(Q)}\right) + O\left(\frac{S}{\sqrt{\ln x}}\right).$$

Хорошо известно (см. [5]), что Q можно считать не делящимся на квадраты нечетных простых чисел и на степень, большую третьей, простого числа 2. Поэтому $\ln Q < \ln 4 + \sum_{p \leq p(Q)} \ln p < cp(Q)$. Далее, применяя теорему Мертенса, получаем

$$\sum_{q\in F} \ln L(1, \chi_D) = S \ln\ln x + \gamma S + \sum_{q\in F} \sum_{p > \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^8}} \left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{p} + O\left(\frac{S \ln_3 x}{\ln_2 x}\right).$$

Доказательство теоремы, таким образом, сведено к оценке

$$\sum_{q\in F} \sum_{p > \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^8}} \left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{p} = o(S)\,,$$

что мы и получим с помощью «большого решета» и закона взаимности. Мы разделим эту сумму на пять частей R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 — соответственно суммированию по p по пяти интервалам

$$\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^8} < p \leqq e^{\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^3}} \; (I_1), \; \exp\left\{\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^3}\right\} < p \leqq x \exp\left\{-\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^8}\right\} \; (I_2)$$

$$x \exp\left\{-\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right\} < p \leqq x \exp\left\{\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right\} \; (I_3)$$

$$x \exp\left\{\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right\} < p \leqq \exp\{(\ln x)(\ln\ln x)^2\} \; (I_4), \; p > \exp\{(\ln x)(\ln\ln x)^2\} \; (I_5)$$

К R_1 применим лемму 2. Пусть $S(p, h)$ означает число элементов множества F сравнимых с h по модулю p. Тогда

$$|R_1| < \sum_{p \in I_1} \frac{1}{p} \left| \sum_{h=1}^{p-1} \left(\frac{h}{p}\right) S(p, h) \right|.$$

Для $p \neq p(Q)$ модуль $kp < e^{\frac{\ln x}{(\ln \ln x)^2}}$ не является исключительным в смысле леммы 2. Поэтому $((k, p) = 1)$ очевидным образом выбирая класс вычетов $\ln \pmod{kp}$ получаем

$$S(p, h) = \sum_{\substack{q \in F \\ q = h(p)}} 1 = \sum_{\substack{q = l_h(kp) \\ \sqrt{x} < q \leq x \\ q \neq Q}} 1 = \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(kp)} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\} = \frac{S}{p-1} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\}.$$

Вместе с тривиальной оценкой при $p = p(Q)$, это дает

$$|R_1| \leq \frac{S}{\sqrt{\ln x}}.$$

К R_2 применим «большое решето» в форме теоремы 2. Сначала, воспользовавшись неравенством Шварца, получаем

$$|R_2| < \sum_{p \in I_2} \frac{1}{p} \left| \sum_{h=1}^{p-1} \left(\frac{h}{p}\right) S(p, h) \right| \leq \sum_{p \in I_2} \frac{1}{p} \sqrt{p T_1(x, p)},$$

где

$$T_1(x, p) = \sum_{h=1}^{p-1} \left\{ S(p, h) - \frac{S}{p} \right\}^2.$$

Подразделение суммирования на подинтервалы вида $(M_m, 2\, M_m]$ $M_1 = \exp\left\{\frac{\ln x}{(\ln \ln x)^3}\right\}$, (причем количество их, очевидно, не превосходит $\ln x$), приводим к неравенству

$$|R_2| \leq \sum_m \frac{1}{M_m} \cdot \sum_{M_m < p \leq 2M_m} \sqrt{p T_1(x, p)}.$$

К внутренней сумме применим сначала неравенство Шварца, затем теорему 1. Получаем

$$\sum_{M_m \leq p \leq 2M_m} \sqrt{p T_1(x, p)} \leq \{M_m \sum_{p \leq 2M_m} p T_1(x, p)\}^{1/2} \leq 10\, M_m \left\{ \frac{Sx}{B_m} + S^2 \frac{B_m}{M_m} \right\}^{1/2},$$

где $1 < B_m < 2\, M_m$ должно еще удовлетворять условию $B_m < \dfrac{x}{2\, M_m}$. Выберем $B_m = \exp\left\{\dfrac{\ln x}{(\ln \ln x)^4}\right\}$ для всех m. Получим

$$|R_2| < \ln x \left(Sx \exp\left\{ - \frac{\ln x}{(\ln \ln x)^4} \right\} + S^2 \frac{B}{M_1} \right)^{1/2} < \frac{S}{\ln x},$$

ибо

$$S > \frac{x}{2\,\varphi(k)\ln x} > x \exp\left\{-\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^7}\right\}.$$

Для оценки R_3 воспользуемся известной асимптотической формулой

$$\sum_{p<y} \frac{1}{p} = \ln\ln y + c + O\left(\frac{1}{\ln y}\right).$$ Получим

$$|R_3| < S\left(\sum_{p\in I_3} \frac{1}{p}\right) < \frac{S}{\ln\ln x}.$$

Переходим к оценке R_4. Имеем

$$|R_4| \leqq \sum_{q\in F} \left|\sum_{p\in I_4} \left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{p}\right| \leqq \sum_{q\in F}\left|\sum_{n\in I_4} \frac{1}{n}\{P_q(n) - 1 - P_q(n)\}\right|,$$

где $P_q(n) = \sum_{p\leq n}\left(\frac{p}{q}\right)$. Перегруппировка по Абелю приводит к неравенству

$$|R_4| < \sum_{q\in F}\sum_{n\in I_4} \frac{|P_q(n)|}{n^2}$$

или

$$|R_4| < \sum_{n\in I_4} \frac{1}{n^2}\sum_{q\in F} \sqrt{qT_2(n, q)},$$

где $T_2(x, D)$ есть функция $T(x, D)$, соответствующая последовательности простых чисел. Далее, пользуясь теоремой 1, получаем

$$\sum_{q\in F}\sqrt{qT_2(n, q)} \leqq \left\{S\sum_{q\in F} qT_2(n, q)\right\}^{1/2} \leqq \left\{S\cdot 7\,n^2 x\left(\frac{1}{B} + \frac{B^2}{x^2}\right)\right\}^{1/2},$$

где B должно удовлетворять неравенствам $B < x$, $B < \frac{n}{x}$. Поэтому для $n \in I_4$ можно выбрать $B = \exp\left\{\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^3}\right\}$. Таким образом,

$$\sum_{q\in F}\sqrt{qT_2(n, q)} \leqq 3nS\exp\left\{-\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^4}\right\}$$

и, следовательно,

$$|R_4| < \frac{S}{\ln x}.$$

Наконец,

$$|R_5| \leqq \sum_{n\in I_5}\frac{1}{n^2}\sum_{q\in F}\sqrt{qT_2(n, q)},$$

и мы можем воспользоваться леммой 2. Получаем

$$|R_5| \ll \sum_{n>\exp\{(\ln x)(\ln\ln x)^2\}} \frac{1}{n^2}\,\frac{S\,\mathrm{li}\,n}{\ln n} \ll \frac{S}{\ln x}.$$

Собрав все оценки $R_i, i = \overline{1, 5}$, получаем доказательство первого неравенства теоремы 2. Для доказательства второго неравенства вместо класса вычетов $l_1 \pmod k$ следует выбрать класс вычетов l_2 из следующих условий

$$l_2 \equiv 5(8), \ l_2 \equiv \bar{g}_p (\operatorname{mod} p) \ \text{для} \ 2 < p < \frac{\ln x}{(\ln \ln x)^8}, \ p \neq p(Q),$$

где $\bar{g}_p$ — произвольный квадратический невычет $\operatorname{mod} p$. Дальнейшее очевидно.

(Поступила: 3. мая, 1964 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] CHOWLA, S.: "Improvement of a theorem of Linnik and Walfish." *Proc. London Math. Soc.* **30** (1949) 423—429.
[2] Линник, Ю. В.: «Об одной условной теореме Литлвуда». *ДАН СССР* **37** (1942) 142—144.
[3] WALFISH, A.: „On the class-number of binary quadratic forms." *Trav. Inst. Math. Tbilissi* **11** (1942) 57—71.
[4] PRACHAR, K.: *Primzahlverteilung*. Springer, 1957.
[5] Чудаков, Н. Г.: «*Введение в теорию L-функций Дирихле*. М.—Л. 1947.

ON A THEOREM OF P. BATEMAN, S. CHOWLA AND P. ERDŐS

by

M. E. BARBAN

Summary

The following improvement of the "large sieve" is given:

Theorem 1. *Let a_n denote an increasing sequence of natural numbers; put $A(x) = \sum_{a_n \leq x} 1$ and $A(x, p, l) = \sum_{\substack{a_n \leq x \\ a_n \equiv l \bmod p}} 1$, further*

$$T(x, p) = \sum_{l=0}^{p-1} \left(A(x, p, l) - \frac{A(x)}{p} \right)^2.$$

Then for any $M < x$ and B with $1 < B < \min \left(M, \frac{x}{M} \right)$ we have

$$\sum_{p \leq M} pT(x, p) \leq \frac{2\pi A(x)\, xM}{B} + A^2(x)\, M \cdot \left(\frac{B}{M} \right)^2$$

where p runs over primes.

As an application the following theorem is proved.

Theorem 2. *Let $L(s, \chi)$ denote the L-series corresponding to a character $\chi_p(n) = \left(\frac{n}{p} \right)$ where $\left(\frac{n}{p} \right)$ is the Legendre-symbol. Then*

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \frac{L(1, \chi_p)}{\log \log p} \geqq e^{\gamma}, \quad \underline{\lim_{p \to \infty}} \log \log p \cdot L(1, \chi_p) \leqq \frac{\pi^2}{6\, e^{\gamma}}$$

where γ denotes Euler's constant.

EINE VOLLSTÄNDIGE CHARAKTERISIERUNG DER TEILRÄUME EINES EUKLIDISCHEN RAUMES MITTELS DER RICHTUNGSDIMENSION

von

E. DEÁK

Einleitung

Der Begriff der Richtungsdimension eines topologischen Raumes wurde in [3] eingeführt, wird aber in dieser Arbeit wiederholt definiert [s. die Definitionen (1.1), (1.12) und (1.14)]. Es ist ein neuer topologischer Dimensionsbegriff, dessen Bezeichnung als "Dimension" durch folgende — in [3] erwiesene — zwei Eigenschaften gerechtfertigt werden kann: (a) die Richtungsdimension ist monoton, (b) die Richtungsdimension des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n ist n.

Es bestehen weitgehende Analogien zwischen einigen Sätzen über die Richtungsdimension und entsprechenden Sätzen der klassischen Dimensionstheorie. Für den Unterschied zwischen unserem — mit Dim X bezeichneten — Dimensionsbegriff und dem klassischen — hier mit dim X bezeichneten — Dimensionsbegriff von MENGER und URYSOHN sind im Ganzen genommen folgende zwei Züge charakteristisch:

1. Dim X richtet sich stärker nach dem gewöhnlichen euklidischen Dimensionsbegriff als dim X; dies zeigt sowohl ihre Definition als auch einige Sätze, vor allem Satz (9.4); vgl. auch (2.1).

2. Die Wirksamkeit des Begriffs Dim X reicht — dem Vorigen scheinbar widersprechend — weiter als diejenige von dim X, u. zw. existiert Dim X für jeden topologischen Raum X.

Diese Allgemeinheit und einige — für beliebige topologische Räume bzw. beliebige Familien derselben gültige — Ergebnisse [z. B. die Sätze (3.1), (2.3)] dürften die Hoffnung erwecken, dass die Theorie des neuen Dimensionsbegriffs auch "jenseits des Hilbertraumes" ausgebaut werden kann. Unser Hauptergebnis, der erste Einbettungssatz (6.1) — eine Verallgemeinerung des Tychonoffschen Einbettungssatzes [vgl. (6.5)] — bezieht sich z. B. auf die Klasse der „schwach ordentlichen T_0-Räume" [Def. (5.1)], die mit der Klasse der Tychonoff-Räume zusammenfällt [Satz (6.4)].

Der dritte Einbettungssatz (8.1) — eine Verallgemeinerung des Urysohnschen Einbettungssatzes — ermöglicht die Richtungsdimensionen des E_n und des Hilbertraumes sowie eine grundlegende Beziehung zwischen dim X und Dim X für separable metrische Räume X zu ermitteln [die Sätze (9.1), (9.2) und (9.3)]. Die Ergebnisse (9.1) und (9.3) wurden in [3] mit anderen Mitteln gewonnen, und es wurde die Frage aufgeworfen, ob die Klasse der Teilräume X des E_n für ein bestimmtes n mit Dim $X \leq n$ vollständig charakterisiert ist. Die Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit ist diese Vermutung zu bestätigen [Satz (9.4)].

Einige Bezeichnungen:

Unter „Raum" verstehen wir durchwegs einen nichtleeren allgemeinen topologischen Raum. „Normaler Raum" und „vollständig regulärer Raum" sind ohne T_0-axiom gemeint.

$\tau(X)$ ist das Zeichen für das Gewicht eines Raumes X, d. h. die kleinste Kardinalzahl, welche Mächtigkeit irgendeiner Basis von X ist.

E_n ist der n-dimensionale euklidische Raum.

Alle Ordnungsrelationen werden mit $\prec$ bezeichnet.

$\overline{\overline{A}}$ ist die Mächtigkeit einer Menge A.

Für eine Teilmenge A eines Raumes X bedeuten:

A^-: abgeschlossene Hülle von A,
A°: offener Kern von A,
Gr A: Begrenzung von A,
$A \subset B$ bedeutet: A ist echte Teilmenge von B.

§ 1. Die Grundbegriffe Richtung, Richtungsstruktur und Richtungsdimension

(1.1) Definition. Als *Richtung eines Raumes* X wird ein geordnetes System $\mathcal{R}$ von geordneten Paaren (G, F) bezeichnet, wobei die G bzw. F die Elemente einer Familie $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{F}$ offener bzw. abgeschlossener Mengen in X sind, und $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{R}$ folgenden Forderungen (im weiteren auch *Richtungsaxiome* genannt) genügen:

(1.1.1) $$(\emptyset, \emptyset),\ (X, X) \in \mathcal{R};$$

(1.1.2) Aus

$$(G_1, F_1),\ (G_2, F_2) \in \mathcal{R},\ (G_1, F_1) \prec (G_2, F_2)$$

folgt

$$G_1 \subseteq F_1 \subseteq G_2 \subseteq F_2,\ G_1 \subset F_2;$$

(1.1.3) $$\bigcup \{G : G \in \mathcal{G}^*\} \in \mathcal{G} \qquad (\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G},\ \mathcal{G}^* \neq \emptyset);$$

(1.1.4) $$\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}^*\} \in \mathcal{F} \qquad (\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F},\ \mathcal{F}^* \neq \emptyset).$$

Die Mengenfamilien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}$ werden mit Bezug aufeinander und auf $\mathcal{R}$ gelegentlich auch mit

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}), \mathcal{F}(\mathcal{R}), \mathcal{G}(\mathcal{R}, \mathcal{F}), \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{G})$$

bezeichnet, und diese Symbole werden auch in Fällen nichtvollständiger — d. h. nicht alle Forderungen (1.1.1) bis (1.1.4) erfüllender — Systeme $\mathcal{R}^*$ bzw. Familien $\mathcal{G}^*, \mathcal{F}^*$ (meistens als Teilmengen einer Richtung $\mathcal{R}$ bzw. der Familien $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ und $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ vorkommend) sinngemäss angewandt. Für eine Richtung $\mathcal{R}$ bedeuten somit z. B.

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{G}^*) = \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}),\ (G, F) \in \mathcal{R} \text{ für ein } G \in \mathcal{G}^*\} \ (\mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{R}));$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}, \mathcal{F}^*) = \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),\ (G, F) \in \mathcal{R} \text{ für ein } F \in \mathcal{F}^*\} \ (\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{R}));$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}^*) = \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}),\ (G, F) \in \mathcal{R}^* \text{ für ein } G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})\} \ (\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R});$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}^*) = \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),\ (G, F) \in \mathcal{R}^* \text{ für ein } F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})\} (\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}).$$

(1.2) Definition. Mit Bezug auf eine Richtung $\mathcal{R}$ eines Raumes X werden die Mengen

$$G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}), \quad F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \tag{1.2.1}$$

Halbräume von X genannt.

Die Bezeichnung ,,Halbraum" für eine offene oder abgeschlossene Menge eines Raumes X verweist demnach nicht auf eine Eigenschaft dieser Menge für sich, sondern auf ihre Beziehung zu einer gewissen Richtung $\mathcal{R}$ in X, eine der Mengen (1.2.1) zu sein.

(1.3) Satz. *Ein jeder Halbraum $G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$ oder $F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ eines Raumes X bezugs einer Richtung $\mathcal{R}$ in X kommt in höchstens zwei Elementen von $\mathcal{R}$ vor.*

Wäre nämlich diese Behauptung z. B. für einen Halbraum $G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$ nicht richtig, gäbe es also Elemente

$$(G, F_i) \in \mathcal{R} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

mit

$$F_i \neq F_j \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

dann gäbe es eine Permutation p_1, p_2, p_3 der Indizes 1, 2, 3 mit

$$(G, F_{p_1}) \prec (G, F_{p_2}) \prec (G, F_{p_3}),$$

und es wäre nach dem ersten Teil der Forderung (1.1.2) $G = F_{p_2}$ im Widerspruch mit dem zweiten Teil derselben. Der Beweis für einen Halbraum $F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ verläuft analog.

(1.4) Bezeichnungen. Die Beziehung $(G, F) \in \mathcal{R}$ wird in der Folge auch mit $G = G(\mathcal{R}; F)$ oder $F = F(\mathcal{R}; G)$ ausgedrückt; hierbei kann der Parameter $\mathcal{R}$ in eindeutigen Fällen auch weggelassen werden. Nach (1.3) sind $G(F)$ und $F(G)$ (für eine bestimmte Richtung $\mathcal{R}$) nicht immer eindeutig, aber höchstens zweideutig. Wir bezeichnen mit $\underline{G}(F)$ bzw. $\bar{G}(F)$ die kleinere bzw. grössere Menge $G(F)$ und mit $\underline{F}(G)$ bzw. $\bar{F}(G)$ die kleinere bzw. grössere Menge $F(G)$. Eventuell ist $\underline{G}(F) = \bar{G}(F)$ bzw. $\underline{F}(G) = \bar{F}(G)$. Das Vorkommen des Symbols $G(F)$ bzw. $F(G)$ in einer Relaticn besagt die eventuelle Zweideutigkeit derselben: sie besteht sowohl für $\underline{G}(F)$ bzw. $\underline{F}(G)$ als auch für $\bar{G}(F)$ bzw. $\bar{F}(G)$. Stehen mehrere Richtungen $\mathcal{R}$ in Rede, so benutzen wir zur Wahrung der Eindeutigkeit die entsprechenden Zeichen $\underline{G}(\mathcal{R}; F)$, $\bar{G}(\mathcal{R}; F)$, $\underline{F}(\mathcal{R}; G)$ und $\bar{F}(\mathcal{R}; G)$.

(1.5) Satz. *Es sei $\mathcal{R}$ eine Richtung eines Raumes X. Aus*

$$\underline{F}(G) \subset \bar{F}(G) \quad \textit{für einen Halbraum} \quad G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$$

bzw.

$$\underline{G}(F) \subset \bar{G}(F) \quad \textit{für einen Halbraum} \quad F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$$

folgt

$$G = \underline{F}(G) \quad \textit{bzw.} \quad F = \bar{G}(F).$$

Aus

$$G_1 \subset G_2 \quad \textit{für zwei Halbräume} \quad G_1, G_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$$

bzw.

$$F_1 \subset F_2 \quad \textit{für zwei Halbräume} \quad F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$$

folgt

$$(G_1, F(G_1)) \prec (G_2, F(G_2))$$

bzw.

$$(G(F_1), F_1) \prec (G(F_2), F_2)\,.$$

All dies ist aus (1.1.2) ersichtlich.

(1.6) Satz. *Für eine beliebige Richtung $\mathcal{R}$ eines Raumes X und eine beliebige nichtleere Teilfamilie $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$ ohne letztes Element bzw. ohne erstes Element gilt*

$$\bigcup \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}^*)\} = \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}^*)\} \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$$

bzw.

$$\bigcap \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}^*)\} = \bigcap \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}^*)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})\,.$$

Dies folgt unmittelbar aus (1.1.2) und aus (1.1.3) bzw. (1.1.4).

(1.7) Satz. *Für eine beliebige Richtung $\mathcal{R}$ eines Raumes X ist die Mengenfamilie $\mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$ — und daher auch die Familien $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ und $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ — durch die Relation $\subset$ geordnet.*

Dies folgt leicht aus (1.1).

(1.8) Satz. *Für eine beliebige Richtung $\mathcal{R}$ eines Raumes X ist die Mengenfamilie $\mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$ mit Bezug auf die Operationen Vereinigung (beliebig vieler Mengen) und Durchschnitt (beliebig vieler Mengen) abgeschlossen.*

Dies folgt aus (1.1.3), (1.1.4) und (1.7).

(1.9) Satz. *Die durch $\subset$ geordneten Mengenfamilien $\mathcal{G}(\mathcal{R})$, $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ und $\mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$ (bezugs einer Richtung $\mathcal{R}$ eines Raumes X) sind lückenlos.*

Dies folgt unmittelbar aus (1.6).

(1.10) Satz. *Jede Richtung eines Raumes ist als geordnete Menge (bezugs ihrer definitionsmässigen Ordnung) lückenlos.*

Dies folgt unmittelbar aus (1.9) und (1.3).

(1.11) Satz. *Jede Richtung $\mathcal{R}$ eines Raumes X ist als ordnungstopologischer Raum (bezugs ihrer definitionsmässigen Ordnung) ein kompakter T_2-Raum.*

$\mathcal{R}$ hat nämlich nach (1.1.1) und (1.1.2) ein erstes und ein letztes Element [die Paare $(\emptyset, \emptyset)$ und (X, X)] und ist als geordnete Menge wegen (1.10) vollständig.

(1.12) Definition. *Als Richtungsstruktur eines Raumes X wird ein System*

$$\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_a : a \in A\}$$

von Richtungen $\mathcal{R}_a$ in X bezeichnet, wenn die Mengenfamilie

$$\bigcup_{a \in A} \{G \setminus F : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_a)\,,\ F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_a)\}$$

eine Subbasis von X ist.

Für ein endliches System

$$\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_k : k = 1, 2, \ldots, n\} \tag{1.12.1}$$

von Richtungen $\mathcal{R}_k$ in X kann die Bedingung, eine Richtungsstruktur von X zu sein, auch so formuliert werden: für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung $x \in U$ gibt es Halbräume

$$G_k \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_k)\,,\ F_k \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} (G_k \setminus F_k) \subseteq U\,.$$

Wären nämlich in diesem Mengendurchschnitt nicht alle Richtungen vertreten, so könnte man aus den Fehlenden je einen Faktor hinzunehmen; wegen (1.7) und (1.8) kann verabredet werden aus jeder Richtung immer nur einen Faktor zu verwenden.

Jede offene oder abgeschlossene Menge eines Raumes X ist ein Halbraum von X mit Bezug auf gewisse Richtungen; für die Mengen $\emptyset$ und X ist z. B.

$$\mathcal{R}_X = \{(\emptyset, \emptyset), (X, X)\} \tag{1.12.2}$$

eine solche Richtung; für eine nichttriviale offene Menge G bzw. abgeschlossene Menge F kann es die Richtung

$$\mathcal{R}_G = \{(\emptyset, \emptyset), (G, G^-), (X, X)\} \tag{1.12.3}$$

bzw.

$$\mathcal{R}_F = \{(\emptyset, \emptyset), (F^\circ, F), (X, X)\} \tag{1.12.4}$$

sein. Es folgt daraus leicht der

(1.13) Satz. *Jeder Raum hat Richtungsstrukturen.*

Ist nämlich $\mathfrak{G}$ die Familie aller nichtleeren offenen Mengen (oder auch nur eine Basis) eines Raumes X, so ist mit den Bezeichnungen (1.12.2) und (1.12.3) das System $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_G : G \in \mathfrak{G}\}$ eine Richtungsstruktur.

Für jeden Raum gibt es eine Richtungsstruktur mit minimaler Mächtigkeit, da eine beliebige Menge von Kardinalzahlen der Grösse nach wohlgeordnet ist. Daraus entspringt die — der vorliegenden Arbeit zugrunde liegende —

(1.14) Definition. Die — mit Dim X bezeichnete — *Richtungsdimension eines Raumes* X ist das Minimum der Mächtigkeiten seiner Richtungsstrukturen.

Dadurch ist jedem Raum X eindeutig eine Kardinalzahl Dim X mit Dim $X \geq 1$ zugeordnet.[1]

(1.15) Definition. Eine *minimale Richtungsstruktur eines Raumes* X ist eine Richtungsstruktur $\mathfrak{R}$ von X mit $\overline{\overline{\mathfrak{R}}} = \mathrm{Dim}\, X$.

[1] Die Definition der Richtungsdimension könnte derart abgeändert werden, dass auch die Zahl 0 als Richtungsdimension vorkommt; z. B. könnte man jedem indiskreten Raum — und daher auch dem 0-dimensionalen euklidischen Raum — die Zahl 0 zuordnen. Dies würde die Analogie mit dem Menger-Urysohnschen Dimensionsbegriff verstärken und eine unwichtige — obgleich harmonische — Ergänzung des Satzes (9.4) nach sich ziehen, andererseits aber die Formulierung einiger Sätze [z. B. des Vereinigungssatzes (3.2)] erschweren.

§ 2. Beispiele

(2.1) Der Begriff der Richtungsstruktur eines topologischen Raumes ist der Descartesschen Koordinatenstruktur der euklidischen Räume nachgebildet und eine Verallgemeinerung derselben. Sind nämlich n eine natürliche Zahl und

$$E_n = \{x : x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}),\ -\infty < x^{(i)} < \infty\ (i = 1, 2, \ldots, n)\},$$

$$(2.1.1)\qquad \begin{aligned} G_{i,t} &= \{x : x^{(i)} < t\} \\ F_{i,t} &= \{x : x^{(i)} \leqq t\} \end{aligned} \quad (-\infty < t < \infty\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

so sind die Mengen

$$\mathcal{R}_i = \{(\emptyset, \emptyset)\} \cup \{(G_{i,t}, F_{i,t}) : -\infty < t < \infty\} \cup \{(E_n, E_n)\}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Richtungen und das System

$$\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

eine Richtungsstruktur des euklidischen Raumes E_n. Aus (2.1.1) ist auch die Veranlassung zu unserer Begriffsbildung und Bezeichnung „Halbraum" ersichtlich.[2]

Es gilt somit

$$(2.1.2)\qquad \operatorname{Dim} E_n \leqq n \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Es gilt auch selbstverständlich $\operatorname{Dim} E_1 = 1$; die naheliegende Vermutung, dass die soeben beschriebene Richtungsstruktur des E_n eine minimale ist, und daher für jede natürliche Zahl n $\operatorname{Dim} E_n = n$ gilt, wird in (9.1) verifiziert.

(2.2) Satz. *Für jeden Raum X gilt*

$$\operatorname{Dim} X \leqq \tau(X)\,.$$

Beweis. Man beachte das Beispiel zu (1.13).

Es gilt z. B. für jeden Raum X mit abzählbarer Basis $\operatorname{Dim} X \leqq \aleph_0$. Man vermutet, dass für den Hilbertraum H — da er der umfassendste separable metrische Raum ist — $\operatorname{Dim} H = \aleph_0$ gilt; dies wird in (9.2) verifiziert.

(2.3) Satz. *Für jede Kardinalzahl $\mathfrak{a} > 0$ gibt es Räume X mit* $\operatorname{Dim} X = \mathfrak{a}$.

Beweis. 1° Im Falle einer endlichen Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ wird Satz (9.1) unsere Behauptung bestätigen; es kann aber schon hier ein einfaches Beispiel gegeben werden.

Es sei n eine natürliche Zahl und X_n ein topologischer Raum mit der Grundmenge $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ und den nichttrivialen offenen Mengen

$$\{1, 2, \ldots, k\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

[2] Natürlich könnten in stärkerer Anlehnung an das euklidische Urbild auch die Komplemente der Halbräume aus den Richtungen eines Raumes Halbräume genannt werden. Eine solche Abänderung der Definition (1.2) wäre in dieser Arbeit belanglos, wird aber in einer folgenden Mitteilung, dessen Gegenstand die Auffassung des mit einer Richtungsstruktur versehenen topologischen Raumes als eine Verallgemeinerung des Begriffs des lokalkonvexen topologischen Vektorraums mit der schwachen Topologie ist, Bedeutung erlangen.

Hier ist X_n die abgeschlossene Hülle einer jeden nichtleeren offenen Menge, mithin existieren lediglich die zwei Typen

$$\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, F), (X_n, X_n)\} \qquad (F\text{: nichtleere abgeschlossene Menge})$$

$$\{(\emptyset, \emptyset), (G, X_n), (X_n, X_n)\} \qquad (G\text{: nichttriviale offene Menge})$$

solcher Richtungen $\mathcal{R}$, die wenigstens eine nichttriviale Menge $\Gamma \setminus \Phi$ mit $\Gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$ und $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ liefern. Da jeder dieser Richtungen nur eine solche Menge liefert, gilt Dim $X_n = n$, w. z. b. w.

2° Für eine beliebige unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ liefert eine Variante des vorigen Verfahrens — allerdings mit Anwendung des Wohlordnungssatzes — sogar einen Raum X mit

$$\overline{\overline{X}} = \operatorname{Dim} X = \tau(X) = \mathfrak{a}\,.$$

Es sei nämlich X eine wohlgeordnete Menge mit $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{a}$ und mit allen Anfängen als offene Mengen. Diese Topologie hat eine kleinste Basis (d. h. eine Basis, die in jeder anderen Basis enthalten ist) u. zw. die Mengenfamilie

$$\{B_x : x \in X\} \cup \{X\}$$

mit

$$B_x = \{y : y \in X,\ y \leqq x\} \qquad (x \in X)\,.$$

Es gilt also $\tau(X) = \mathfrak{a}$, und es folgt — mit derselben Überlegung wie in 1° — Dim $X = \tau(X)$, w. z. b. w.

Bemerkung. Mit vollständiger Induktion wird leicht

$$\dim X_n = n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

bestätigt. Für die in 2° geschilderte Räume X existiert aber dim X nicht (d. h. dim $X = \infty$), selbst nicht nach dem transfiniten Dimensionsbegriff von Menger und Urysohn. Zum Beweis dieser Tatsache beachte man, dass die Begrenzung der kleinsten offenen Umgebung des ersten Punktes eines solchen Raumes X als Teilraum dem Raum X homöomorph ist.

Der Begriff der Richtungsdimension ermöglicht also eine weitgehendere Differenzierung in der Klasse der Räume X mit dim $X = \infty$, als der klassische transfinite Dimensionsbegriff.

(2.4) Satz. *Für jeden ordnungstopologischen Raum X gilt*

$$\operatorname{Dim} X = 1\,.$$

Beweis. Da jeder ordnungstopologische Raum mit nicht vollständiger Ordnung in einen nämlichen mit vollständiger Ordnung topologisch einbettbar ist, können wir uns auf letztere beschränken. Es seien

$$\text{(2.4.1)} \qquad \begin{aligned} G_x &= \{y : y \in X\,,\ y \prec x\} \\ F_x &= \{y : y \in X\,,\ y \leqq x\} \end{aligned} \qquad (x \in X)\,,$$

und

$$\text{(2.4.2)} \qquad \mathcal{R} = \{(\emptyset, \emptyset)\} \cup \{(G_x, F_x) : x \in X\} \cup \{(X, X)\}$$

mit der Ordnung

$$
(2.4.3)\qquad
\begin{aligned}
&(\emptyset, \emptyset) \prec (G, F) && \big((G, F) \in \mathcal{R} \setminus \{(\emptyset, \emptyset)\}\big)\,,\\
&(G, F) \prec (X, X) && \big((G, F) \in \mathcal{R} \setminus \{(X, X)\}\big)\,,\\
&(G_x, F_x) \prec (G_y, F_y) && (x, y \in X,\ x \prec y)\,.
\end{aligned}
$$

Dann ist $\mathcal{R}$ eine Richtung von X: die Richtungseigenschaften (1.1.1) und (1.1.2) bzw. (1.1.3) und (1.1.4) folgen unmittelbar aus (2.4.1) und (2.4.3) bzw. aus

$$
\bigcup \{G_x : x \in X^*\} = G_{x^*}\,,
$$

$$
\bigcap \{F_x : x \in X^*\} = F_{x_*}\,,
$$

mit den Bezeichnungen

$$
\left.\begin{aligned}
x^* &= \sup \{x : x \in X^*\}\\
x_* &= \inf \{x : x \in X^*\}
\end{aligned}\right\} \qquad (X^* \subseteq X,\ X^* \neq \emptyset)\,.
$$

Aus (2.4.1) ist endlich ersichtlich, dass $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}\}$ eine Richtungsstruktur von X ist, womit der Satz bewiesen ist.

Bemerkung. Für jeden ordnungstopologischen Raum X gilt $\dim X \leq 1$.

(2.5) Satz. *Für jeden diskreten Raum X gilt* $\operatorname{Dim} X = 1$.

Beweis. Wir benötigen eine Ordnung der Grundmenge X eines diskreten Raumes, und bezeichnen mit $\mathcal{A}$ die Familie der Mengen $\emptyset$, X und aller Anfänge der geordneten Menge X. Dann ist

$$
\mathcal{R} = \{(A, A) : A \in \mathcal{A}\}
$$

mit der Ordnung

$$
(A_1, A_1) \prec (A_2, A_2) \qquad (A_1, A_2 \in \mathcal{A},\ A_1 \subset A_2)
$$

eine Richtung des Raumes X [die Richtungsaxiome (1.1.1) bis (1.1.4) sind wegen

$$
\left.\begin{aligned}
&\bigcup \{A : A \in \mathcal{A}^*\} \in \mathcal{A}\\
&\bigcap \{A : A \in \mathcal{A}^*\} \in \mathcal{A}
\end{aligned}\right. \qquad (\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{A}^* \neq \emptyset)
$$

offensichtlich gültig], und $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}\}$ ist eine Richtungsstruktur für X. Mit den Bezeichnungen

$$
\left.\begin{aligned}
A_x &= \bigcup \{A : A \in \mathcal{A},\ x \notin A\}\\
B_x &= \bigcap \{A : A \in \mathcal{A},\ x \in A\}
\end{aligned}\right. \qquad (x \in X)
$$

gilt nämlich $A_x \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$, $B_x \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ und

$$
\{x\} = B_x \setminus A_x \qquad (x \in X)\,.
$$

Bemerkung. Für jeden diskreten Raum X gilt $\dim X = 0$.

Weitere Beispiele wurden in [3] gegeben; z. B. gilt für eine Kreislinie K im E_2 Dim $K = 2$ (während dim $K = 1$ ist). Es ist bemerkenswert, dass in all diesen Fällen die Beziehung dim $X \leqq$ Dim X besteht, die wir für separable metrische Räume auch allgemein bestätigen werden [Satz (9.3)].

§ 3. Ein Produkt- und ein Vereinigungssatz

(3.1) Produktsatz. *Für das topologische Produkt*

$$X = \mathbf{X}\,\{X_\beta : \beta \in B\}$$

einer beliebigen nichtleeren Familie $\{X_\beta : \beta \in B\}$ *von Räumen gilt*

$$\text{Dim}\, X \leqq \sum \{\text{Dim}\, X_\beta : \beta \in B\}\,. \tag{3.1.1}$$

Beweis. Es seien

$$\mathfrak{R}_\beta = \{\mathcal{R}_{\beta,\alpha} : \alpha \in A_\beta\} \qquad (\beta \in B)$$

minimale Richtungsstrukturen der entsprechenden Räume X_β, d. h. die A_β sind Mengen mit

$$\overline{\overline{A_\beta}} = \text{Dim}\, X_\beta \qquad (\beta \in B)\,.$$

Mit der Bezeichnung

$$E' = \{x : x \in X\,,\ x_\beta \in E\} \qquad (E \subseteq X_\beta,\ \beta \in B)\,,$$

wobei x_β die Koordinate von x aus X_β bedeutet, sind die Systeme

$$\mathcal{R}'_{\beta,\alpha} = \{(G', F') : (G, F) \in \mathcal{R}_{\beta,\alpha}\} \qquad (\alpha \in A_\beta;\ \beta \in B) \tag{3.1.2}$$

mit der Ordnung

$$(G_1', F_1') \prec (G_2', F_2') \quad \big((G_1', F_1')\,,\ (G_2', F_2') \in \mathcal{R}'_{\beta,\alpha}\,,$$

$$(G_1, F_1) \prec (G_2, F_2) \text{ in der Ordnung von } \mathcal{R}_{\beta,\alpha}\big)$$

Richtungen des Raumes X; die Forderungen (1.1.1) bis (1.1.4) sind offensichtlich erfüllt.

Es bleibt zu beweisen, dass das System

$$\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}'_{\beta,\alpha} : \alpha \in A_\beta\,,\ \beta \in B\} \tag{3.1.3}$$

eine Richtungsstruktur für X ist, denn daraus folgt (3.1.1) wegen

$$\overline{\overline{\mathfrak{R}}} \leqq \sum \{\overline{\overline{\mathfrak{R}_\beta}} : \beta \in B\} = \sum \{\text{Dim}\, X_\beta : \beta \in B\}\,.$$

Es seien also $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x in X. Es gibt eine endliche nichtleere Menge $B^* \subseteq B$ und offene Mengen

$$U_\beta \subseteq X_\beta \qquad (\beta \in B^*)$$

mit

$$x \in \bigcap \{U_\beta' : \beta \in B^*\} \subseteq U\,. \tag{3.1.4}$$

Ferner gibt es für jedes $\beta \in B^*$ eine nichtleere endliche Menge $A_\beta^* \subseteq A_\beta$, Richtungen

$$\mathcal{R}_{\beta,\alpha} \in \mathfrak{R}_\beta \qquad (\alpha \in A_\beta^*)$$

und Halbräume

$$G_{\beta,\alpha} \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{\beta,\alpha}), \quad F_{\beta,\alpha} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_{\beta,\alpha}) \qquad (\alpha \in A^*_\beta)$$

mit

$$x_\beta \in \bigcap \{G_{\beta,\alpha} \setminus F_{\beta,\alpha} : \alpha \in A^*_\beta\} \subseteq U_\beta . \tag{3.1.5}$$

Es gilt nun nach (3.1.4) und (3.1.5)

$$x \in \bigcap \{(G_{\beta,\alpha} \setminus F_{\beta,\alpha})' : \alpha \in A^*_\beta , \ \beta \in B^*\} =$$
$$= \bigcap \{G'_{\beta,\alpha} \setminus F'_{\beta,\alpha} : \alpha \in A^*_\beta , \ \beta \in B^*\} \subseteq U ,$$

und nach (3.1.2)

$$G'_{\beta,\alpha} \in \mathcal{G}(\mathcal{R}'_{\beta,\alpha}), \quad F'_{\beta,\alpha} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}'_{\beta,\alpha}),$$

also ist das System (3.1.3) in der Tat eine Richtungsstruktur für X w. z. b. w.

Dieser Satz ist ein Analogon des klassischen Produktsatzes[3] der Menger—Urysohnschen Theorie; seine Formulierung ist — sowohl in bezug auf die Anzahl als auch auf die Beschaffenheit der Faktorenräume — allgemeiner als diejenige des letzteren oder sogar der verschiedenen bekannten Verallgemeinerungen desselben.

Im folgenden Satz, einem Analogon des Vereinigungssatzes von Hurewicz,[4] müssen indessen den Summanden wesentlich stärkere Beschränkungen auferlegt werden:

(3.2) Satz. *Für einen beliebigen Raum X und eine abzählbare Familie $\{X_k : k = 1, 2, \ldots\}$ von Teilräumen mit gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen X_k und mit*

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$$

gilt

$$\operatorname{Dim} X = \sup \{\operatorname{Dim} X_k : k = 1, 2, \ldots\} .$$

Beweis. Es seien A eine Menge mit

$$\overline{\overline{A}} = \sup \{\operatorname{Dim} X_k : k = 1, 2, \ldots\}$$

und

$$\mathfrak{R}_k = \{\mathcal{R}_{k,\alpha} : \alpha \in A\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Richtungsstrukturen für die entsprechenden Räume X_k [es existieren solche laut Definition (1.14)]. Ferner seien für einen jeden Index $\alpha \in A$

$$\mathcal{R}^*_{1,\alpha} = \mathcal{R}_{1,\alpha}$$
$$\mathcal{R}^*_{k,\alpha} = \mathcal{R}_{k,\alpha} \setminus \{(\emptyset, \emptyset)\} \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

---

[3] *Für separable metrische Räume X und Y gilt* $\dim (X \times Y) \leqq \dim X + \dim Y$. —[7] 246, oder z. B. [6] 33.

[4] *Ist für einen separablen metrischen Raum X und eine natürliche Zahl n, $\{X_k : k = 1, 2, \ldots\}$ eine Folge von F_σ-Mengen mit* $\dim X_k \leqq n$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *so gilt* $\dim \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \leqq n$. — [4] oder z. B. [6] 30.

und

$$G' = \begin{cases} G & (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}^*_{1,a})) \\ G \cup (\bigcup_{i=1}^{k-1} X_i) & (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}^*_{k,a}),\ k = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

$$F' = \begin{cases} F & (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}^*_{1,a})) \\ F \cup (\bigcup_{i=1}^{k-1} X_i) & (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}^*_{k,a}),\ k = 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Offensichtlich sind dann die Mengen

$$\mathcal{R}_a = \{(G', F') : (G, F) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}^*_{k,a}\} \cup \{(X, X)\} \qquad (a \in A)$$

(mit der Ordnung:

für (G_1', F_1'), $(G_2', F_2') \in \mathcal{R}_a$ sei $(G_1', F_1') \prec (G_2', F_2')$, wenn entweder $(G_1, F_1), (G_2, F_2) \in \mathcal{R}_{k,a}$ für eine natürliche Zahl k und $(G_1, F_1) \prec (G_2, F_2)$ in der Ordnung von $\mathcal{R}_{k,a}$ oder $(G_i, F_i) \in \mathcal{R}_{k_i,a}$ $(i = 1, 2)$ und $k_1 < k_2$ besteht; endlich sei $(G', F') \prec (X, X)$ für $(G', F') \in \mathcal{R}_a \setminus \{(X, X)\}$)

Richtungen des Raumes X und das System

$$\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_a \colon a \in A\}$$

eine Richtungsstruktur von X. Es gilt daher

$$\operatorname{Dim} X \leqq \overline{\overline{A}}.$$

Wegen

$$\operatorname{Dim} X \geqq \operatorname{Dim} X_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

gilt aber auch

$$\operatorname{Dim} X \geqq \overline{\overline{A}},$$

und der Satz ist bewiesen.

§ 4. Ordentliche Richtungen und Richtungsstrukturen

(4.1) Definition. Eine Richtung $\mathcal{R}$ eines Raumes X ist eine *ordentliche Richtung*, wenn

$$\bigcup \{F \setminus G : (G, F) \in \mathcal{R}\} = X$$

gilt.

(4.2) Hilfssatz. *Mit den Bezeichnungen*

$$\mathcal{M}_F = \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),\ \overline{F}(G) \supset F\}$$

(4.2.1)
$$M_F = \bigcap \{G : G \in \mathcal{M}_F\} \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\})$$

$$\mathcal{N}_G = \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}),\ \underline{G}(F) \subset G\}$$

$$N_G = \bigcup \{F : F \in \mathcal{N}_G\} \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\})$$

— *wobei* $\mathcal{R}$ *eine beliebige Richtung eines beliebigen Raumes* X *bedeutet — gilt*

$$\text{(4.2.2)} \qquad \mathcal{M}_F \neq \emptyset \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\}),$$
$$\mathcal{N}_G \neq \emptyset \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\})$$

$$\text{(4.2.3)} \qquad M_F \in \begin{cases} \mathcal{G}(\mathcal{R}) & (\mathcal{M}_F \text{ hat ein erstes Element}) \\ \mathcal{F}(\mathcal{R}) & (\mathcal{M}_F \text{ hat kein erstes Element}) \end{cases}$$
$$N_G \in \begin{cases} \mathcal{F}(\mathcal{R}) & (\mathcal{N}_G \text{ hat ein letztes Element}) \\ \mathcal{G}(\mathcal{R}) & (\mathcal{N}_G \text{ hat kein letztes Element}) \end{cases}$$

$$\text{(4.2.4)} \qquad M_F \supseteq F \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\})$$
$$N_G \subseteq G \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\}).$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus (1.6).

(4.3) Hilfssatz. *Mit den Bezeichnungen*

$$\text{(4.3.1)} \qquad G_x = \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),\ x \notin G\}$$
$$F_x = \bigcap \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}),\ x \in F\}$$

gelten für eine beliebige Richtung $\mathcal{R}$ *eines beliebigen Raumes* X *folgende Aussagen:*

(a) $G_x \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$, $F_x \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$, $x \in F_x \setminus G_x$ $\quad (x \in X)$;

(b) *Für jeden Punkt* $x \in X$ *mit* $(G_x, F_x) \in \mathcal{R}$ *und jeden Halbraum* $M \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$ *mit*

$$x \notin M \quad \textit{bzw.} \quad x \in M$$

gilt

$$G_x \supseteq M \quad \textit{bzw.} \quad F_x \subseteq M .$$

(c) *Für einen Punkt* $x \in X$ *existiert dann und nur dann ein Element* (G, F) *von* $\mathcal{R}$ *mit* $x \in F \setminus G$, *wenn* $(G_x, F_x) \in \mathcal{R}$ *ist, und in diesem Fall ist* (G_x, F_x) *das einzige Element von* $\mathcal{R}$ *mit dieser Eigenschaft.*

(d) *Ist für einen Punkt* $x \in X$ $(G_x, F_x) \notin \mathcal{R}$, *so gilt*

$$\overline{F}(G_x) = N_{\underline{G}(F_x)} \subset M_{\overline{F}(G_x)} = \underline{G}(F_x) ,$$

und $\big(\underline{G}(F_x), F_x\big)$ *ist der unmittelbare Nachfolger von* $\big(G_x, \overline{F}(G_x)\big)$ *in der Ordnung von* $\mathcal{R}$.

Beweis. (a) folgt aus den Richtungsaxiomen (1.1.3) und (1.1.4). (b) folgt aus (1.5). Für den Beweis von (c) beachte man, dass aus $x \in F \setminus G$ [für ein Element (G, F) von $\mathcal{R}$] wegen (1.5) $F = F_x$ und $G = G_x$ folgt. Die Aussage (d) ist eine Folge der leicht einzusehenden Beziehung

$$x \in \underline{G}(F_x) \setminus \overline{F}(G_x) \qquad \big((G_x, F_x) \notin \mathcal{R}\big) .$$

(4.4) Satz. *Bezugs einer Richtung* $\mathcal{R}$ *eines Raumes* X *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathcal{R}$ ist ordentlich;

(b) $M_F = F \quad \big(F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\}\big)$;

(c) $N_G = G \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\})$;
(d) $(G_x, F_x) \in \mathcal{R} \; (x \in X)$.

Beweis. 1° *Aus* (a) *folgt* (b) *und* (c).

Für einen Halbraum $F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\}$ bzw. $G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\}$ und für jeden Punkt $x \notin F$ bzw. $x \in G$ gilt nach (4.3), (b)

$$F \subseteq G_x \subset F_x = \overline{F}(G_x)$$

bzw.

$$\underline{G}(F_x) = G_x \subset F_x \subseteq G ,$$

also $G_x \in \mathcal{M}_F$ bzw. $F_x \in \mathcal{N}_G$; hieraus folgt

$$M_F \subseteq \bigcap \{G_x : x \notin F\} = F \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\})$$

bzw.

$$N_G \supseteq \bigcup \{F_x : x \in G\} = G \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\}),$$

also gilt wegen (4.2.4)

$$M_F = F \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\})$$

bzw.

$$N_G = G \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\}),$$

w. z. b. w.

2° *Aus* (b) *bzw.* (c) *folgt* (d). Ist nämlich für einen Punkt $x \in X$

$$(G_x, F_x) \notin \mathcal{R} ,$$

so gilt nach (4.3), (c)

$$M_{\overline{F}(G_x)} \supset \overline{F}(G_x)$$

bzw.

$$N_{\underline{G}(F_x)} \subset \underline{G}(F_x) ,$$

also besteht (b) bzw. (c) nicht für den Halbraum

$$F = \overline{F}(G_x) \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\}$$

bzw.

$$G = \underline{G}(F_x) \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\} ,$$

w. z. b. w.

3° *Aus* (d) *folgt* (a) wegen (4.3), (b).

(4.5) Definition. Eine *ordentliche Richtungsstruktur* eines Raumes ist eine Richtungsstruktur, deren jedes Element eine ordentliche Richtung ist.

(4.6) Beispiele. 1° Für einen beliebigen Raum X ist

$$\mathcal{R} = \{(\emptyset, \emptyset) , (\emptyset, X) , (X, X)\}$$

eine ordentliche Richtung.

2° Jede in einem Raum X definierte und daselbst stetige reelle Funktion f liefert eine ordentliche Richtung für X; mit den Bezeichnungen

$$G_t^f = \{x : x \in X , f(x) < t\} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

$$F_t^f = \{x : x \in X , f(x) \leq t\}$$

$$G_{-\infty} = F_{-\infty} = \emptyset , \; G_\infty = F_\infty = X$$

ist dies z. B. das (nach den Werten von t geordnete) System

$$\mathcal{R}^f = \{(G_t, F_t) : -\infty \leqq t \leqq \infty\}.$$

3° Sind X ein Tychonoff-Raum und $\mathfrak{F}$ die Familie aller in X definierten und daselbst stetigen reellen Funktionen f mit $f[X] \subseteq [0, 1]$, so ist mit den Bezeichnungen von 2°

$$\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}^f : f \in \mathfrak{F}\}$$

eine ordentliche Richtungsstruktur von X. Die Familie aller offenen Halbräume ist hier nicht nur eine Subbasis, sondern sogar eine Basis der Topologie des Raumes.

4° Diese triviale Bemerkung kann durch eine wesentliche Verminderung der Anzahl der zu verwendenden Funktionen f verschärft werden.

Es ist bekannt, dass sich zu jedem Punkt x_0 eines Tychonoffschen Raumes und zu jeder Umgebung U dieses Punktes eine Umgebung U^* desselben findet, so dass $U^{*-} \subseteq U$ und sogar die abgeschlossenen Mengen U^{*-} und $X \setminus U$ funktional trennbar sind; d. h. es gibt eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ und eine Zahl $0 < t < 1$ mit

$$f(x) < t \ (x \in U^{*-}), \ f(x) \geqq t \ (x \in X \setminus U).$$

Es sei also $\mathcal{B}$ eine Basis von X, und

$$\mathcal{C} = \{(U, V) : U, V \in \mathcal{B}, \ U^- \subseteq V, \ U^- \text{ und } X \setminus V \text{ sind funktional trennbar}\}$$

es sei ferner jedem Element (U, V) von $\mathcal{C}$ eine Funktion $f_{(U,V)} \in \mathfrak{F}$, welche U^- und $X \setminus V$ funktional trennt, zugeordnet, und endlich

$$\mathfrak{F}^* = \{f_{(U,V)} : (U, V) \in \mathcal{C}\}.$$

Ist nun $x_0 \in X$ und W eine Umgebung von x_0, so sei (U, V) ein Element von $\mathcal{C}$ mit $x_0 \in U$ und $V \subseteq W$; ein solches existiert nach der einleitenden Bemerkung. Es gibt dann eine Zahl $0 < t < 1$ mit

$$f_{(U,V)}(x) < t \ (x \in U), \ f_{(U,V)}(x) \geqq t \ (x \in X \setminus V).$$

Die Familie $\{G_t^f : f \in \mathfrak{F}^*\}$ ist daher eine Basis des Raumes, und somit das System

$$\mathfrak{R}^* = \{\mathcal{R}^f : f \in \mathfrak{F}^*\}$$

eine (ordentliche) Richtungsstruktur desselben, mit $\overline{\overline{\mathfrak{R}^*}} \leqq \overline{\overline{\mathfrak{F}^*}}$.

§ 5. Ordentliche und schwach ordentliche Räume

(5.1) Definition. Ein *schwach ordentlicher Raum* ist ein Raum, der eine ordentliche Richtungsstruktur besitzt.

(5.2) Definition. Ein *ordentlicher Raum* ist ein Raum, der eine ordentliche minimale Richtungsstruktur besitzt.

(5.3) *Jeder Tychonoff-Raum ist schwach ordentlich.* Diese Folgerung aus (4.6), 3° wird im § 7 durch ihre Umkehrung — eine Folge des Ersten Einbettungssatzes (6.1) – ergänzt. Dadurch wird die Klasse der Tychonoff-Räume mittels des Begriffs der ordentlichen Richtungsstruktur vollständig charakterisiert.

Der Zweite Einbettungssatz (6.7) bezieht sich aber nur auf einen Teil dieser Klasse, nämlich auf ordentliche Räume. Wir bestimmen deshalb in der Folge [s. (5.9) bis (5.12)] einige Klassen ordentlicher Räume. Wir berufen uns dabei auf die selbstverständliche Tatsache, dass ein Raum, zu dessen jede nichtordentliche Richtung $\mathcal{R}$ eine ordentliche Richtung $\mathcal{R}'$ mit $\mathcal{R}' \supset \mathcal{R}$ existiert, ordentlich ist.

(5.4) Definition. Ein *vollkommen normaler Raum* ist ein normaler Raum, dessen jede abgeschlossene Menge vom Typ G_δ ist.

(5.5) Satz. *Zu jedem Paar F, Φ disjunkter abgeschlossener Mengen eines vollkommen normalen Raumes X gibt es eine auf X definierte stetige reelle Funktion f mit $f[X] \subseteq [0, 1]$ und*

$$f^{-1}(0) = F, \; f^{-1}(1) = \Phi . \tag{5.5.1}$$

Beweis. 1° Es genügt die Existenz einer auf X definierten stetigen reellen Funktion $f_{F,\Phi}$ mit $f_{F,\Phi}[X] \subseteq [0, 1]$ und

$$f_{F,\Phi}^{-1}(0) = F \, , \; f_{F,\Phi}^{-1}(1) \supseteq \Phi$$

zu beweisen. In diesem Fall ist nämlich

$$f(x) = \frac{1 + f_{F,\Phi}(x) - f_{\Phi,F}(x)}{2}$$

eine Funktion mit der gewünschten Eigenschaft (5.5.1).

2° Ist F eine offene Menge, so genügt die Funktion

$$f_{F,\Phi}(x) = \begin{cases} 0 & (x \in F) \\ 1 & (x \in X \setminus F) \end{cases}$$

den Erfordernissen.

3° Ist F nicht offen, so sei $\{G_n : n = 1, 2, \ldots\}$ eine Folge offener Mengen mit

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \, .$$

Es kann ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$X \setminus \Phi \supseteq G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots \tag{5.5.2}$$

angenommen werden.

Es seien für jede natürliche Zahl n $f_n(x)$ eine auf X definierte stetige reelle Funktion mit

$$f_n[X] \subseteq [0, 1] \, , \; f_n^{-1}(0) \supseteq F \, , \; f_n^{-1}(1) \supseteq X \setminus G_n \, ,$$

und

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n} \qquad (x \in X) \, .$$

Dann ist $f(x)$ eine stetige Funktion, und es gilt

$$f^{-1}(0) = F\,,\; f^{-1}(1) \supseteq X \setminus G_1 \supseteq \Phi\,,$$

also ist die geforderte Funktion $f_{F,\Phi}(x)$ gefunden.[5]

(5.6) Satz. *Jede nicht-ordentliche Richtung $\mathcal{R}$ eines vollkommen normalen Raumes X ist zu einer ordentlichen Richtung ergänzbar, d. h. in eine ordentliche Richtung von X ordnungstreu einbettbar.*

Beweis. 1° Es sei mit der Bezeichnung M_F aus (4.2.1)

$$\mathcal{F}_0 = \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\}\,,\; F \subset M_F\}\,. \tag{5.6.1}$$

Nach Satz (4.4) und nach (4.2.4) ist die Nicht-Ordentlichkeit von $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ äquivalent.

Nach (1.8) ist $M_F \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$. Wir beweisen zuerst

$$M_F \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \qquad (F \in \mathcal{F}_0)\,, \tag{5.6.2}$$

u. zw. gilt im Falle $M_F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$

$$M_F = \underline{G}(M_F) \qquad (F \in \mathcal{F}_0)\,. \tag{5.6.3}$$

Wegen $F \subset M_F$ gilt nämlich nach (1.5)

$$F \subseteq \underline{G}(M_F)\,; \tag{5.6.4}$$

wäre nun im Gegensatz zu (5.6.3)

$$\underline{G}(M_F) \subset M_F\,, \tag{5.6.5}$$

so müsste mit der Bezeichnung $\mathcal{M}_F$ aus (4.2.1) $\underline{G}(M_F) \in \mathcal{M}_F$, und daher, (5.6.5) widersprechend

$$M_F \subseteq \underline{G}(M_F)$$

sein. Damit ist (5.6.2) in der Form (5.6.3) bewiesen.

Wir bezeichnen in der Folge — wegen (5.6.5) — M_F mit G_F für $F \in \mathcal{F}_0$. Es gilt also

$$G_F \in \mathcal{G}(\mathcal{R})\,,\; F \subset G_F \qquad (F \in \mathcal{F}_0)\,. \tag{5.6.6}$$

Ferner gilt für $F \in \mathcal{F}_0$

$$\{(G', F') : (G', F') \in \mathcal{R},\; \big(\bar{G}(F), F\big) \prec (G', F') \prec \big(G_F, \underline{F}(G_F)\big)\} = \emptyset\,,$$

d. h. für jeden Halbraum $F \in \mathcal{F}_0$ folgt $\big(G_F, \underline{F}(G_F)\big)$ in der Ordnung von $\mathcal{R}$ unmittelbar auf $\big(\bar{G}(F), F\big)$.

2° Nach Satz (5.5) existiert für jeden Halbraum $F \in \mathcal{F}_0$ eine stetige reelle Funktion f_F auf X mit $f[X] \subseteq [0, 1]$ und

$$f_F^{-1}(0) = F\,,\; f_F^{-1}(1) = X \setminus G_F\,.$$

[5] Dieselbe Beweismethode ist bei N. Bourbaki in [1], chap. 9, Exercices, 7, für ein schwächere Aussage, ohne den zweiten Teil von (5.5.1) und bei Annahme des T_1-Axioms angedeutet (mit der Bemerkung, dass dies auch eine hinreichende Bedingung für einen normalen T_1-Raum ist, vollkommen normal zu sein). Um das hiesige stärkere Ergebnis zu erreichen, musste nur noch (5.5.2) in Anbetracht gezogen werden.

Es seien

$$C_{F,0} = \bar{G}(F), \; C_{F,1} = G_F \qquad (F \in \mathscr{F}_0),$$

$$D_{F,0} = F, \quad D_{F,1} = \underline{F}(G_F)$$

ferner

$$C_{F,t} = \{x : x \in X, \; f_F(x) < t\} \qquad (F \in \mathscr{F}_0, \; 0 < t < 1)$$

$$D_{F,t} = \{x : x \in X, \; f_F(x) \leqq t\}$$

und endlich

$$\mathscr{R}_0 = \{(\bar{G}(F), F) : F \in \mathscr{F}_0\}.$$

$$(G, F)_t = \begin{cases} (C_{F,t}, D_{F,t}) & ((G, F) \in \mathscr{R}_0) \\ (G, F) & ((G, F) \in \mathscr{R} \setminus \mathscr{R}_0) \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

$$\mathscr{R}' = \{(G, F)_t : (G, F) \in \mathscr{R}, \quad 0 \leqq t \leqq 1\}.$$

3° Es ist zu beachten, dass — obwohl zu jedem Parameterwert t genau ein Element von $\mathscr{R}'$ gehört — es im Falle $[0, 1] \setminus f[X] \neq \emptyset$ Elemente (Γ, Φ) von $\mathscr{R}'$ geben kann, die mehreren Parameterwerten (u. zw. allen Werten t eines Teilintervalls von $[0, 1]$) zugeordnet sind.

Es ist nun zu beweisen, dass $\mathscr{R}'$ eine ordentliche Richtung von X ist.

4° Die Richtungsaxiome (1.1.1) und (1.1.2) gelten für $\mathscr{R}'$ augenscheinlich; wir beweisen zunächst das Bestehen von (1.1.3).

Es seien

$$\mathscr{G}^* \subset \mathscr{G}(\mathscr{R}'), \; \mathscr{G}^* \neq \emptyset$$

und

$$\mathscr{G}_0^* = \{G : \text{es gibt ein } t \text{ mit } (G, F)_t \in \mathscr{G}^*\}.$$

Hat $\mathscr{G}^*$ kein letztes Element, so gilt — je nachdem $\mathscr{G}_0^*$ kein letztes Element oder ein letztes Element G_0 hat — entweder

$$\bigcup \{G : G \in \mathscr{G}^*\} = \bigcup \{G : G \in \mathscr{G}_0^*\} \tag{5.6.7}$$

oder

$$\bigcup \{G : G \in \mathscr{G}^*\} = C_{\overline{F(G_0)}, \, \tau(G_0)} \tag{5.6.8}$$

mit der Bezeichnung

$$\tau(G_0) = \sup \{t : 0 \leqq t \leqq 1, \; C_{\overline{F(G_0)}, t} \in \mathscr{G}_0^*\}.$$

In beiden Fällen (5.6.7) und (5.6.8) gilt daher

$$\bigcup \{G : G \in \mathscr{G}^*\} \in \mathscr{G}(\mathscr{R}'),$$

w. z. b. w.

5° $\mathscr{R}'^*$ genügt auch dem Richtungsaxiom (1.1.4). Es sei nämlich

$$\mathscr{F}^* \subset \mathscr{F}(\mathscr{R}'), \; \mathscr{F}^* \neq \emptyset$$

und

$$\mathscr{F}_0{}^* = \{F : \text{es gibt ein } G \text{ und ein } t \text{ mit } (G, F)_t \in \mathscr{F}^*\}.$$

Hat $\mathscr{F}^*$ kein erstes Element, so gilt — je nachdem $\mathscr{F}_0^*$ kein erstes Element oder ein erstes Element F_0 hat — entweder

$$\bigcap \{F : F \in \mathscr{F}^*\} = \bigcap \{F : F \in \mathscr{F}_0^*\} \tag{5.6.9}$$

oder

$$\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}^*\} = D_{F_0,\, \tau(F_0)} \tag{5.6.10}$$

mit der Bezeichnung

$$\tau(F_0) = \inf \{t : 0 \leqq t \leqq 1 \,,\; D_{F_0,t} \in \mathcal{F}^*\} \,.$$

In beiden Fällen (5.6.9) und (5.6.10) gilt daher

$$\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}^*\} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}') \,,$$

w. z. b. w.

6° Mit 4° und 5° ist erwiesen, dass $\mathcal{R}'$ eine Richtung von X ist. Zum Abschluss ist zu beweisen, dass die Richtung $\mathcal{R}'$ ordentlich ist, d. h. dass mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} G_x &= \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}'^*) \,,\; x \notin G\} \\ F_x &= \bigcap \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}'^*) \,,\; x \in F\} \end{aligned}\right\} \qquad (x \in X)$$

die Beziehung

$$(G_x, F_x) \in \mathcal{R}' \qquad (x \in X) \tag{5.6.11}$$

besteht.

Es seien

$$\left.\begin{aligned} G_{(x)} &= \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),\; x \notin G\} \\ F_{(x)} &= \bigcap \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}),\; x \in F\} \end{aligned}\right\} \qquad (x \in X) \,.$$

Gilt für einen Punkt $x \in X$

$$(G_{(x)}, F_{(x)}) \in \mathcal{R} \,,$$

so ist nach (4.3), (c)

$$(G_x, F_x) = (G_{(x)}, F_{(x)}) \in \mathcal{R}' \,.$$

Ist aber

$$(G_{(x)}, F_{(x)}) \notin \mathcal{R}$$

so gilt nach (4.3), (d)

$$\bar{F}(\mathcal{R}, G_{(x)}) \in \mathcal{F}_0 \,.$$

Mit den Bezeichnungen

$$\bar{F}_x = \bar{F}(\mathcal{R}, G_{(x)}) \,,\quad t_x = f_{\bar{F}_x}(x) \qquad (0 < t_x < 1)$$

ist in diesem Fall

$$G_x = C_{\bar{F}_x, t_x} \,,\quad F_x = D_{\bar{F}_x, t_x} \,,$$

und es gilt wieder (5.6.11), w. z. b. w.

(5.7) Zusatz 1. *Mit der Bezeichnung*

$$\mathcal{R}'_{(G,F)} = \{(G, F)_t : (G, F)_t \in \mathcal{R}'\} \qquad ((G, F) \in \mathcal{R}_0) \tag{5.7.1}$$

[s. Teil 2° des Beweises von (5.6)] *gibt es für jedes Element* $(G, F) \in \mathcal{R}_0$ *eine abzählbare, in* $\mathcal{R}'_{(G,F)}$ *dichte Teilmenge von* $\mathcal{R}'_{(G,F)}$.

(5.8) Zusatz 2. *Für jedes Element* $(G, F) \in \mathcal{R}_0$ *hat die geordnete Menge* $\mathcal{R}'_{(G,F)}$ [s. (5.10.1)] *höchstens abzählbar viele Sprünge.*

(Beide Zusätze können daraus gefolgert werden, dass die geordnete Menge $\mathcal{R}'_{(G,F)}$ einer Teilmenge des Interwalls $[0,1]$ ähnlich ist.)

(5.9) Satz. *Jeder vollkommen normale Raum ist ordentlich.*

Dies ist eine unmittelbare Folge des Satzes (5.6).

(5.10) Korollar. *Jeder pseudo-metrisierbare Raum ist ordentlich.*

(5.11) Korollar. *Jeder diskrete Raum ist ordentlich.*

(5.12) Satz. *Jeder ordnungstopologische Raum ist ordentlich.*

Beweis. Die für einen beliebigen ordnungstopologischen Raum im Beweis des Satzes (2.4) konstruierte minimale Richtungsstruktur ist ordentlich.

Weitere Aufschlüsse über die Klasse der schwach ordentlichen bzw. ordentlichen Räume werden durch die Sätze (6.4) bzw. (7.1) geboten.

§ 6. Der erste und der zweite Einbettungssatz

Eine Verallgemeinerung des klassischen Einbettungssatzes von Tychonoff [s. (6.5)] ist unser

(6.1) erste Einbettungssatz. *Jeder schwach ordentliche* T_0*-Raum* X *ist einem Teilraum des topologischen Produkts*

$$\mathcal{P}(\mathfrak{R}) = \mathsf{X}\,\{\mathcal{R}_a : a \in A\}$$

der — mit der Ordnungstopologie versehenen — Richtungen einer beliebigen ordentlichen Richtungsstruktur $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_a : a \in A\}$ *von* X *homöomorph.*

Beweis. 1° Es sei f diejenige Abbildung des Raumes X in den Raum $\mathcal{P}(\mathfrak{R})$, bei welcher für die Koordinate $f(x)_a$ von $f(x)$ aus $\mathcal{R}_a$

$$f(x)_a = (G^a_x, F^a_x) \qquad (a \in A,\ x \in X)$$

gilt, wobei (G^a_x, F^a_x) das dem Punkt x laut (4.3.1), (4.3), (c) und (4.4), (d) eindeutig zugeordnete Element der Richtung $\mathcal{R}_a$ bedeutet.

Wir beweisen in der Folge, dass die Funktion f eine Homöomorphie zwischen X und dem Teilraum $f[X]$ von $\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ ist.

2° f^{-1} *ist eindeutig*, d. h. für ein beliebiges Punktepaar $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt

$$f(x) \neq f(y)\,. \tag{6.1.1}$$

Zum Beweis betrachten wir eine offene Menge U in X z. B. mit

$$x \in U\,,\ y \notin U\,,$$

ferner eine endliche Menge $A^* \subseteq A$ und Halbräume

$$G_a \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_a)\,,\ F_a \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_a) \qquad (a \in A^*)$$

mit
$$x \in \bigcap \{G_a \setminus F_a : a \in A^*\} \subseteq U .$$
Es gibt einen Index $a_0 \in A^*$ mit
$$y \notin G_{a_0} \setminus F_{a_0} ,$$
und es gilt entweder $y \notin G_{a_0}$ und daher

(6.1.2) $$G_x^{a_0} \subset G_{a_0} \subseteq G_y^{a_0}$$

oder $y \in F_{a_0}$ und daher

(6.1.3) $$F_y^{a_0} \subseteq F_{a_0} \subset F_x^{a_0} .$$

In beiden Fällen (6.1.2) und (6.1.3) gilt
$$(G_x^{a_0}, F_x^{a_0}) \neq (G_y^{a_0}, F_y^{a_0}) ,$$
d. h. $f(x)_{a_0} \neq f(y)_{a_0}$, womit (6.1.1) bewiesen ist.

3° *Die Funktionen f und f^{-1} sind stetig.* Es seien
$$\mathcal{P}_{a,G} = \{p : p \in \mathcal{P}(\mathfrak{R}) ,\ p_a \prec (G, \underline{F}(G))\} \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_a) ,\ a \in A)$$
$$Q_{a,F} = \{p : p \in \mathcal{P}(\mathfrak{R}) ,\ p_a \succ (\bar{G}(F), F)\} \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_a) ,\ a \in A)$$
— wobei p_a die Koordinate eines Punktes $p \in \mathcal{P}(\mathfrak{R})$ aus $\mathcal{R}_a$ bedeutet — und
$$\mathcal{B}^{(1)}_{f[X]} = \{\mathcal{P}_{a,G} \cap f[X] : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_a) ,\ a \in A\}$$
$$\mathcal{B}^{(2)}_{f[X]} = \{Q_{a,F} \cap f[X] : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_a) ,\ a \in A\}.$$

Dann ist das Mengensystem
$$\mathcal{B}_{f[X]} = \mathcal{B}^{(1)}_{f[X]} \cup \mathcal{B}^{(2)}_{f[X]}$$
eine Subbasis des Raumes $f[X]$. (Die Mengen
$$\mathcal{P}'_{a,G} = \{p : p \in \mathcal{P}(\mathfrak{R}),\ p_a \prec (G, \bar{F}(G))\} \quad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_a) ,\ a \in A)$$
$$Q'_{a,F} = \{p : p \in \mathcal{P}(\mathfrak{R}) ,\ p_a \succ (\underline{G}(F), F)\} \quad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_a) ,\ a \in A)$$
brauchen deshalb nicht berücksichtigt werden, weil aus $\underline{F}(G) \neq \bar{F}(G)$ bzw. $\underline{G}(F) \neq \bar{G}(F)$ nach Satz (1.5) $\underline{F}(G) \setminus G = \emptyset$ bzw. $F \setminus \bar{G}(F) = \emptyset$ folgt, und daher
$$\mathcal{P}'_{a,G} \cap f[X] = \mathcal{P}_{a,G} \cap f[X]$$
bzw.
$$Q'_{a,F} \cap f[X] = Q_{a,F} \cap f[X]$$
ist.)

Es genügt nun zu beweisen, dass die Funktionen f und f^{-1} die Subbasen $\mathcal{B}_{f[X]}$ von $f[X]$ und
$$\mathcal{B}_X = \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_a) ,\ a \in A\} \cup \{ X \setminus F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_a) ,\ a \in A\}$$
von X ineinander abbilden, d. h. es gilt

(6.1.4) $$f[B_X] \in \mathcal{B}_{f[X]} \qquad (B_X \in \mathcal{B}_X) ,$$

(6.1.5) $$f^{-1}[B_{f[X]}] \in \mathcal{B}_X \qquad (B_{f[X]} \in \mathcal{B}_{f[X]}) .$$

Um dies einzusehen, wenden wir zwei Hilfssätze an:

(6.2) Hilfssatz. *Mit den Bezeichnungen* (4.3.1) *gilt für eine ordentliche Richtung* $\mathcal{R}$ *eines Raumes* X

$$G = \{x : x \in X\,,\ (G_x, F_x) \prec (G, \underline{F}(G))\} \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}))\,.$$

Beweis. Nach Satz (4.4), (d) gilt $(G_x, F_x) \in \mathcal{R}$. Aus $x \in G$ folgt nach (1.7) $G_x \subset G$, und daraus nach Satz (1.5)

$$(G_x, F_x) \prec (G, \underline{F}(G))\ ; \tag{6.2.1}$$

umgekehrt folgt aus (6.2.1) $F_x \subseteq G$ und endlich $x \in G$, w. z. b. w.

(6.3) Hilfssatz. *Für eine ordentliche Richtung* $\mathcal{R}$ *eines Raumes* X *gilt*

$$F = \{x : x \in X\,,\ (G_x, F_x) \leq (\bar{G}(F), F)\} \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}))\,.$$

Beweis. Aus $x \in F$ folgt nach (4.3), (b) $F_x \subseteq F$ und nach (1.5)

$$(G_x, F_x) \leq (\bar{G}(F), F)\ ; \tag{6.3.1}$$

umgekehrt folgt aus (6.3.1) $F_x \subseteq F$, und daraus $x \in F$, w. z. b. w.

Mittels dieser Hilfssätze beenden wir nun den Beweis von 3°. Aus (6.2) bzw. (6.3) folgt

$$f[G] = f[X] \cap \mathcal{P}_{a,G} \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_a)\,,\ a \in A)$$

bzw.

$$f[X \setminus F] = f[X] \cap Q_{a,F} \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_a)\,,\ a \in A)$$

also gilt (6.1.4) und — wegen der Eindeutigkeit von f^{-1} — auch (6.1.5); damit ist der Beweis von (6.1) vollständig.

Als erste Anwendung von (6.1) führen wir die in (5.3) erwähnte Charakterisation der Klasse der Tychonoff-Räume an:

(6.4) Satz. *Ein T_0-Raum ist dann und nur dann vollständig regulär, wenn er schwach ordentlich ist.*

Beweis. 1° Wegen den Sätzen (6.1) und (1.11) ist jeder schwach ordentliche T_0-Raum — als Teilraum eines Produkts von Tychonoff-Räumen — vollständig regulär. 2° Das Umgekehrte wurde schon in (5.3) bemerkt.

Zweitens ergibt sich aus dem Satz (6.1) der

(6.5) Einbettungssatz von Tychonoff. *Jeder vollständig reguläre T_0-Raum X ist einem Teilraum des topologischen Produkts einer Familie von Zahlengeraden, deren Mächtigkeit nicht grösser als $\tau(X)$ ist, homöomorph.*

Beweis. 1° Laut (5.3) ist Satz (6.1) auf vollständig reguläre T_0-Räume anwendbar. 2° Für $\tau(X) < \aleph_0$ ist die Behauptung trivial, weil ja dann X diskret und endlich ist. 3° Ist $\tau(X) \geq \aleph_0$, so gilt für eine beliebige ordentliche Richtungsstruktur $\mathfrak{R}^*$ vom in (4.6), 4° beschriebenen Typ, wobei für $\mathcal{B}$ eine minimale Basis gewählt wird,

$$\overline{\overline{\mathfrak{R}^*}} \leq \overline{\overline{\mathfrak{F}^*}} \leq \overline{\overline{\mathcal{C}}} \leq \overline{\overline{\mathcal{B}}} = \tau(X)\,,$$

und jede Richtung $\mathcal{R}^f \in \mathfrak{R}^*$ ist — als ordnungstopologischer Raum — der Zahlengerade homöomorph.

Wird der Erste Einbettungssatz auf die Teilklasse ,,ordentliche T_0-Räume" seines ursprünglichen Geltungsbereiches bezogen, so entspringt daraus der

(6.6) zweite Einbettungssatz. *Jeder ordentliche T_0-Raum ist einem Teilraum des topologischen Produkts einer Familie $\mathfrak{X} = \{X_a : a \in A\}$ von ordnungstopologischen Räumen X_a mit*

$$\overline{\overline{\mathfrak{X}}} \leqq \operatorname{Dim} X\,, \ \operatorname{Dim} X_a = 1 \qquad (a \in A)$$

(nämlich der Familie der mit der Ordnungstopologie versehenen Richtungen einer ordentlichen minimalen Richtungsstruktur) homöomorph.

Dies folgt aus (6.1) in Verbindung mit (2.4).

Mit Hinsicht auf den Produktsatz (3.1) ergibt sich das

(6.7) Korollar. *Jeder ordentliche T_0-Raum X mit*

$$\operatorname{Dim} X = \sum \{\mathfrak{a}_a : a \in A\} \qquad (\mathfrak{a}_a > 0)$$

ist einem Teilraum des topologischen Produkts

$$\mathsf{X}\,\{X_a : a \in A\}$$

von Räumen X_a mit

$$\operatorname{Dim} X_a \leqq \mathfrak{a}_a \qquad (a \in A)$$

homöomorph.

Ein Analogon des Hurewiczschen Kompaktifizierbarkeitssatzes der Menger—Urysohnschen Theorie[6] ist das folgende

(6.8) Korollar. *Jeder ordentliche T_0-Raum X ist einem Teilraum eines kompakten Raumes Y mit* $\operatorname{Dim} Y = \operatorname{Dim} X$ *homöomorph.*

Dies folgt aus (6.6) mit Hinsicht auf (1.11).

§ 7. Vergleich des zweiten Einbettungssatzes mit dem Einbettungssatz von Tychonoff

Wir stellen zuerst die Beziehung der Geltungsbereiche dieser Sätze (dies ist ein Teil des Satzes (6.4)] fest:

(7.1) *Jeder ordentliche T_0-Raum ist ein Tychonoff-Raum.*

Dabei bleibt es allerdings dahingestellt, ob jeder Tychonoff-Raum ordentlich ist, oder es — wegen (5.9) notwendigerweise nicht vollkommen normale — Tychonoff-Räume gibt, unter deren minimalen Richtungen sich keine ordentliche findet.

(7.2) Satz (6.6) weist nun eine interessante Analogie mit dem Einbettungssatz von Tychonoff auf, wenn man letzteren auf die Klasse der ordent-

[6] *Jeder separable metrische Raum X ist einem Teilraum eines kompakten metrischen Raumes Y mit* $\dim Y = \dim X$ *homöomorph.* — [5], oder [7] 280, [6] 65.

lichen T_0-Räume bezogen formuliert. Dann haben nämlich die beiden Sätze einen gemeinsamen Teil, u. zw.:

Jeder ordentliche T_0-Raum X ist einem Teilraum des topologischen Produkts einer Familie ordnungstopologischer Räume homöomorph.

Der Zusatz des eingeschränkten Tychonoff-Satzes bzw. des Satzes (6.6) lautet:

Als Faktorenräume können in jedem Fall reelle Zahlenintervalle genommen werden, und die Familie der Faktorenräume braucht nicht von grösserer Mächtigkeit als $\tau(X)$ zu sein; im Falle $\tau(X) > \aleph_0$ kann sie nicht von kleinerer Mächtigkeit als $\tau(X)$ sein; bzw.

die Familie der Faktorenräume kann in jedem Fall von der Mächtigkeit Dim X *gewählt werden, welche zugleich — nach dem Produktsatz* (3.1) — *die kleinstmögliche ist.*

Der Satz von Tychonoff spezialisiert demnach im Falle eines *ordentlichen* Tychonoff-Raumes die Faktorenräume auf Kosten ihrer Anzahl; in der Tat kann das Gewicht $\tau(X)$ eines ordentlichen Raumes X beträchtlich grösser als Dim X sein [vgl. auch Satz (2.2)]. Satz (6.6) aber reduziert die Mächtigkeit der notwendigen Familie von Faktorenräumen auf das überhaupt erreichbare Minimum, ohne zugleich die Faktorenräume zu spezialisieren.

Die folgende *Übersicht der diesbezüglichen Verhältnisse* bei den ordentlichen T_0-Räumen und in einer — allerdings sehr speziellen — Teilklasse derselben, den diskreten Räumen [s. (5.11)], mag das Gesagte beleuchten:

(7.3) Satz. *Mit der Bezeichnung $\pi(X)$ für die kleinste Kardinalzahl, welche Mächtigkeit einer Familie von Zahlenintervallen sein kann, in deren topologisches Produkt der Raum X einbettbar ist, gilt für jeden ordentlichen T_0-Raum X*

(a) $\operatorname{Dim} X = \pi(X) < \tau(X) \qquad (1 < \tau(X) < \aleph_0)$,

(b) $\operatorname{Dim} X \leqq \pi(X) \leqq \tau(X) \qquad (\tau(X) = \aleph_0)$,

(c) $\operatorname{Dim} X \leqq \pi(X) = \tau(X) \qquad (\tau(X) > \aleph_0)$;

ist X sogar ein diskreter Raum, so gelten folgende Verschärfungen von (b) *und* (c):

(b′) $\operatorname{Dim} X = \pi(X) < \tau(X) \qquad (\tau(X) = \aleph_0)$

(c′) $\operatorname{Dim} X < \pi(X) = \tau(X) \qquad (\tau(X) > \aleph_0)$.

Beweis. (a) folgt aus Satz (7.2): jeder ordentliche T_0-Raum X ist auch ein T_1-Raum; gilt $\tau(X) < \aleph_0$, so ist er diskret und daher endlich, also in das Intervall $[0, 1]$ einbettbar [vgl. (2.5)]. Die zweite Aussage in (b) und in (c) sind die bekannten, weiter oben angeführten, für jeden Tychonoff-Raum gültigen Tatsachen bezugs der Tychonoff-Einbettung. Die erste Aussage in (b) und (c) folgt aus (6.1). Aus (2.5) folgt endlich (b′) und (c′).

(7.4) Die Ungleichung (2) im Satz (7.3) bringt nun die Frage nahe, ob und inwieweit Synthesen beider Aspekte möglich sind; d. h. Einbettungssätze für ordentliche T_0-Räume X mit abzählbarem Gewicht oder für engere Klassen von Räumen (etwa für vollkommen normale T_0-Räume), mit möglichst speziellen ordnungstopologischen Räumen als Faktoren und mit einer möglichst kleinen Anzahl (bestenfalls Dim X) dieser Faktoren.

Da das topologische Produkt abzählbar vieler metrischer Räume metrisierbar ist, kann diese Aufgabe, falls von den Faktorenräumen verlangt wird, Zahlenintervalle zu sein, wahrhaftig nur für vollkommen normale T_0-Räume (mit abzählbarem Gewicht) d. h. für separable metrische Räume gelöst werden. Als Faktorenanzahl ergibt sich dabei tatsächlich das optimale Dim X. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

§ 8. Der dritte Einbettungssatz

Dieser Satz ist einerseits ein Analogon des klassischen Einbettungssatzes von MENGER und NÖBELING (in der engeren Formulierung von MENGER[8]), andererseits eine Verallgemeinerung des Urysohnschen Einbettungssatzes.[9]

(8.1) Dritter Einbettungssatz. *Jeder separable metrische Raum X ist einem Teilraum des $E_{\mathrm{Dim}\, X}$ homöomorph.*

Beweis. 1° Nach dem zweiten Einbettungssatz (6.6) ist X einem Teilraum des topologischen Produkts der — als ordnungstopologische Räume betrachteten — Richtungen aus einer beliebigen ordentlichen minimalen Richtungsstruktur von X homöomorph. Wir werden zeigen, dass ein jeder separable metrische Raum X eine ordentliche minimale Richtungsstruktur mit folgender Eigenschaft besitzt: jede Richtung ist als geordnete Menge einer Teilmenge der Menge der reellen Zahlen ähnlich und daher als ordnungstopologischer Raum einem Teilraum des E_1 homöomorph.

2° Es sei $\mathfrak{R}$ eine ordentliche minimale Richtungsstruktur von X. Die Mengenfamilie

$$\mathcal{B} = \{G \setminus F : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),\ F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}),\ \mathcal{R} \in \mathfrak{R}\}$$

ist eine Subbasis des Raumes X, und da X eine abzählbare Basis besitzt, gibt es eine abzählbare Teilfamilie $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$, welche ebenfalls eine Subbasis von X ist. Es seien

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{G}^*(\mathcal{R}) &= \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),\ G \setminus F \in \mathcal{B}^* \text{ für ein } F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})\} \\ \mathcal{F}^*(\mathcal{R}) &= \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}),\ G \setminus F \in \mathcal{B}^* \text{ für ein } G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})\} \end{aligned}\right. \quad (\mathcal{R} \in \mathfrak{R})$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* = {} & \{(G, F) : (G, F) \in \mathcal{R},\ G \in \mathcal{G}^*(\mathcal{R})\} \cup \\ & \cup \{(G, F) : (G, F) \in \mathcal{R},\ F \in \mathcal{F}^*(\mathcal{R})\} \qquad (\mathcal{R} \in \mathfrak{R}). \end{aligned}$$

Die mit der Ordnung aus den Richtungen $\mathcal{R}$ versehenen und wegen

$$\overline{\overline{\mathcal{R}^*}} \leq \overline{\overline{\mathcal{G}^*(\mathcal{R})}} + \overline{\overline{\mathcal{F}^*(\mathcal{R})}} \leq \overline{\overline{\mathcal{B}^*}} + \overline{\overline{\mathcal{B}^*}}$$

abzählbaren Mengen $\mathcal{R}^*$ $(\mathcal{R} \in \mathfrak{R})$ sind nicht notwendigerweise Richtungen, obwohl das Richtungsaxiom (1.1.2) wegen $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$ $(\mathcal{R} \in \mathfrak{R})$ besteht und auch

---

[8] *Jeder separable metrische Raum X mit* $\dim X \leq n$ *(n eine natürliche Zahl) ist einem Teilraum des E_{2n+1} homöomorph.* — [7] und [8], oder z. B. [6] 60.

[9] in der Form: *Jeder reguläre Raum mit abzählbarer Basis ist einem Teilraum des $E_{\aleph_0}$ homöomorph.*

(1.1.1) ohne weiteres angenommen werden kann; die Gültigkeit der Axiome (1.1.3) und (1.1.4) ist aber nicht gesichert, und somit können die geordneten Mengen $\mathcal{R}^*$ nicht nur Sprünge (allerdings höchstens abzählbar viele), sondern auch Lücken aufweisen.

Wir werden in der Folge eine jede Menge $\mathcal{R}^*$ in drei Schritten ($\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$) mittels Hinzunahme gewisser Elemente aus $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}^*$ (im ersten und zweiten Schritt) und auch völlig neuer Elemente (im dritten Schritt) derart erweitern, dass der letzte Schritt eine ordentliche Richtung $\mathcal{R}_3$ mit einer in ihr dichten abzählbaren Teilmenge und mit höchstens abzählbar vielen Sprüngen ergibt, womit das in 1° gesetzte Ziel erreicht und der Satz bewiesen sein wird.

3° *Konstruktion von* $\mathcal{R}_1$.

Es seien mit den aus (4.2.1) übernommenen aber auf $\mathcal{R}^*$ bezogenen Bezeichnungen $\mathcal{M}_F$, M_F, $\mathcal{N}_G$ und N_G

$$\mathcal{F}_1^* = \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}^*)\,,\ \mathcal{M}_F \neq \emptyset, \mathcal{M}_F \text{ hat kein erstes Element, } F \subset M_F\}\,,$$

$$\mathcal{G}_1^* = \{G \,:\, G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}^*)\,,\ \mathcal{N}_G \neq \emptyset, \mathcal{N}_G \text{ hat kein letztes Element, } G \supset N_G\}\,.$$

Dann gilt

$$M_F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})\,,\ (\bar{G}(\mathcal{R}, M_F)\,,\ M_F) \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}^* \qquad (F \in \mathcal{F}_1^*)\,,$$

$$N_G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})\,,\ (N_G,\ \underline{F}(\mathcal{R}\,,\ N_G)) \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}^* \qquad (G \in \mathcal{G}_1^*)\,.$$

Es seien noch

$$\mathcal{R}_1^* = \{(\bar{G}(\mathcal{R}, M_F),\ M_F) : F \in \mathcal{F}_1^*\}\,,$$

$$\mathcal{R}_2^* = \{(N_G,\ \underline{F}(\mathcal{R}\,,\ N_G)) : G \in \mathcal{G}_1^*\}$$

und

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}^* \cup \mathcal{R}_1^* \cup \mathcal{R}_2^*$$

Dann ist $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}$, und wir versehen die Menge $\mathcal{R}_1$ mit der Ordnung aus $\mathcal{R}$.

(8.1.1) *Durch die Erweiterung von* $\mathcal{R}^*$ *durch* $\mathcal{R}_1^*$ *und* $\mathcal{R}_2^*$ *werden ausschliesslich gewisse — höchstens abzählbar viele — Dedekindsche Schnitte in Sprünge verwandelt.*

Diese beiden Erweiterungen sind daher unabhängig voneinander, d. h. ihre Ausführung in verschiedenen Reihenfolgen oder auch gleichzeitig ergibt stets dieselbe Menge $\mathcal{R}_1$.

Wegen

$$\overline{\overline{\mathcal{R}_1^*}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_1^*}} \leq \overline{\overline{\mathcal{R}^*}}, \qquad \overline{\overline{\mathcal{R}_2^*}} = \overline{\overline{\mathcal{G}_1^*}} \leq \overline{\overline{\mathcal{R}^*}}$$

gilt nun:

(8.1.2) $\mathcal{R}_1$ *ist abzählbar und hat daher auch höchstens abzählbar viele Sprünge.*

4° *Die Konstruktion von* $\mathcal{R}_2$.

Es sei $\mathcal{L}$ die Menge der Lücken in $\mathcal{R}_1$, d. h. die Menge der Paare $(\mathcal{R}_{11}, \mathcal{R}_{12})$ mit $\mathcal{R}_{11} \cup \mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_1$ und

$$(G_1, F_1) \prec (G_2, F_2)\ \big((G_1, F_1) \in \mathcal{R}_{11}\,,\ (G_2, F_2) \in \mathcal{R}_{12}\big)\,,$$

wobei weder $\mathcal{R}_{11}$ ein letztes noch $\mathcal{R}_{12}$ ein erstes Element enthält. Mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} G(\mathcal{R}_{11}) &= \bigcup\,\{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{11})\} \\ F(\mathcal{R}_{12}) &= \bigcap\,\{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_{12})\} \end{aligned}\right\} \qquad ((\mathcal{R}_{11}, \mathcal{R}_{12}) \in \mathcal{L})$$

gilt

$$G(\mathcal{R}_{11}) \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) , \quad F(\mathcal{R}_{12}) \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \qquad ((\mathcal{R}_{11}, \mathcal{R}_{12}) \in \mathcal{L})$$

und

$$G(\mathcal{R}_{11}) \subseteq F(\mathcal{R}_{12}) \qquad ((\mathcal{R}_{11}, \mathcal{R}_{12}) \in \mathcal{L}) .$$

Nun sei

$$\mathcal{R}_1' = \{(G(\mathcal{R}_{11}) , F(\mathcal{R}_{12})) : (\mathcal{R}_{11}, \mathcal{R}_{12}) \in \mathcal{L}\}$$

und

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_1' .$$

Wir versehen $\mathcal{R}_2$ mit folgender Ordnung:
Für (G_1, F_1) , $(G_2, F_2) \in \mathcal{R}_2$ sei

$$(G_1, F_1) \prec (G_2, F_2) ,$$

wenn eine der folgenden vier Relationen besteht:

(a) (G_1, F_1) , $(G_2, F_2) \in \mathcal{R}_1$, $(G_1, F_1) \prec (G_2, F_2)$ in der Ordnung von $\mathcal{R}_1$;

(b) $G_1 \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{11})$, $G_2 = G(\mathcal{R}_{11})$ $\qquad ((\mathcal{R}_{11}, \mathcal{R}_{12}) \in \mathcal{L})$;

(c) $G_1 = G(\mathcal{R}_{11})$, $G_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{12})$ $\qquad ((\mathcal{R}_{11}, \mathcal{R}_{12}) \in \mathcal{L})$;

(d) $G_1 = G(\mathcal{R}_{11}')$, $G_2 = G(\mathcal{R}_{11}'')$

$$((\mathcal{R}_{11}', \mathcal{R}_{12}') , (\mathcal{R}_{11}'', \mathcal{R}_{12}'') \in \mathcal{L} , \mathcal{R}_{11}'' \cap \mathcal{R}_{12}' \neq \emptyset) .$$

5° *Eigenschaften von* $\mathcal{R}_2$.

(8.1.3) $\mathcal{R}_2$ *ist eine Richtung.*

Es sind nur (1.1.3) und (1.1.4) zu beweisen. Ist

$$\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}(\mathcal{R}_2) , \quad \mathcal{G}^* \neq \emptyset$$

und enthält $\mathcal{G}^*$ kein letztes Element, so enthält — der Konstruktion von $\mathcal{R}_2$ bzw. $\mathcal{R}_1$ gemäss — mit den Bezeichnungen

$$G(\mathcal{G}^*) = \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}^*\} ,$$

$$\mathcal{G}_1 = \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_2) , \ G \subset G(\mathcal{G}^*)\}$$

auch $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}(\mathcal{R}_1)$ und sogar $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}(\mathcal{R}^*)$ kein letztes Element, und es gilt daher

$$G(\mathcal{G}^*) = \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}(\mathcal{R}_1)\} = \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}(\mathcal{R}^*)\} .$$

Es gilt nun, je nachdem die Menge $\mathcal{G}(\mathcal{R}^*) \setminus \mathcal{G}_1$ ein erstes Element enthält oder nicht enthält, $G(\mathcal{G}^*) \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_1)$ (der Konstruktion von $\mathcal{R}_1$ gemäss) oder $G(\mathcal{G}^*) \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_2)$ (der Konstruktion von $\mathcal{R}_2$ gemäss), also in jedem Fall

$$G(\mathcal{G}^*) \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_2) ,$$

womit (1.1.3) für $\mathcal{R}_2$ bewiesen ist. In völlig analoger Weise kann auch

$$\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}^*\} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_2) \quad (\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}_2) , \ \mathcal{F}^* \neq \emptyset)$$

d. h. (1.1.4) für $\mathcal{R}_2$ bewiesen werden.

(8.1.4) *Die abzählbare Menge* $\mathcal{R}_1$ *ist in* $\mathcal{R}_2$ *dicht*, m. a. W. aus

$$(G_i, F_i) \in \mathcal{R}_2 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$(G_1, F_1) \prec (G_3, F_3) \prec (G_2, F_2)$$

folgt die Existenz eines Elementes $(G, F) \in \mathcal{R}_1$ mit

$$(G_1, F_1) \prec (G, F) \prec (G_2, F_2).$$

Ist nämlich $(G_3, F_3) \in \mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}_1$, so kann weder $F_1 = G_3$ noch $F_3 = G_2$ bestehen, da jedes Element von $\mathcal{G}(\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}_1)$ bzw. $\mathcal{F}(\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}_1)$ Vereinigung einer Familie von Elementen aus $\mathcal{F}(\mathcal{R}_1)$ ohne letztes Element bzw. Durchschnitt einer Familie von Elementen aus $\mathcal{G}(\mathcal{R}_1)$ ohne erstes Element ist. Aus demselben Grunde folgt aber sowohl aus $F_1 \subset G_3$ als auch aus $F_3 \subset G_2$ die Richtigkeit unserer Behauptung.[10]

(8.1.5) *Die Richtung* $\mathcal{R}_2$ *hat höchstens abzählbar viele Sprünge.*

Bei der Erweiterung von $\mathcal{R}_1$ mit $\mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}_1$ kommen nämlich keine neuen Sprünge zustande.

6° *Konstruktion von* $\mathcal{R}_3$.

Es sei $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2$ oder $\mathcal{R}_3$ die zu $\mathcal{R}_2$ und X im Sinne des Satzes (5.6) gehörende ordentliche Richtung, je nachdem $\mathcal{R}_2$ ordentlich oder nicht ordentlich ist.

7° *Eigenschaften der ordentlichen Richtung* $\mathcal{R}_3$.

(8.1.6) $\mathcal{R}_3$ *hat höchstens abzählbar viele Sprünge.*

Dies folgt aus (8.1.5) und (5.8).

(8.1.7) $\mathcal{R}_3$ *hat eine abzählbare, überall dichte Teilmenge.*

Dies folgt aus (8.1.6), (8.1.4) und (5.7).

Die Menge $\mathcal{R}_3$ genügt also allen in 2° genannten Erfordernissen und der Satz ist bewiesen.

§ 9. Anwendungen des dritten Einbettungssatzes und Lösung der Hauptaufgabe

(9.1) Satz. *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$\operatorname{Dim} E_n = n.$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich leicht aus (8.1), (2.1.2) und aus der topologischen Invarianz der euklidischen Dimension.

(9.2) Satz. *Die Richtungsdimension des Hilbertraumes ist* $\aleph_0$.

Dies folgt aus (8.1) in Verbindung mit der Tatsache, dass der Hilbertraum in keinen euklidischen Raum topologisch einbettbar ist (d. h. — mit dem Ausdruck von Fréchet — einer höheren Dimensionsklasse als ein jeder euklidischer Raum angehört).

Bemerkung. Der Hilbertraum besitzt auch im transfiniten Sinne keine Menger—Urysohnsche Dimension.

[10] Es gilt auch allgemein (und ist bekannt): jede geordnete Menge ist in ihrer — durch Ergänzung mit den Lücken erhaltenen — vollständigen Hülle dicht.

(9.3) Satz. *Für jeden separablen metrischen Raum X mit* Dim $X < \aleph_0$ *gilt*

$$\dim X \leqq \operatorname{Dim} X \leqq 1 + 2 \cdot \dim X . \tag{9.3.1}$$

Beweis. 1° Nach Satz (8.1) ist X einem Teilraum des euklidischen Raumes $E_{\operatorname{Dim} X}$ homöomorph, also ist

$$\dim X \leqq \dim E_{\operatorname{Dim} X} = \operatorname{Dim} X .$$

2° Die zweite Ungleichung in (9.3.1) ist eine unmittelbare Folge der ersten und des Einbettungssatzes von Menger und Nöbeling.

Mittels den beiden Dimensionsbegriffen dim X und Dim X wird also die Klasse der Teilräume euklidischer Räume in gleicher Weise — durch die Endlichdimensionalität — charakterisiert. Der Unterschied erscheint in einer Verschiebung Dim $X >$ dim X bei einigen Räumen dieser Klasse, u. zw.:

(9.4) Satz. *Für eine natürliche Zahl n und einen separablen metrischen Raum X gilt* Dim $X \leqq n$ *dann und — im Gegensatz zu* dim $X \leqq n$ *— nur dann, wenn X ein Teilraum des E_n ist.*

Damit ist das in der Überschrift dieser Mitteilung gesetzte Ziel erreicht.

(Eingegangen: 11. Mai, 1964.)

LITERATUR

[1] Bourbaki, N.: *Éléments de mathématique, I, Livre III : Topologie générale.* Deuxième édition, Paris 1958.
[2] Brouwer, L. E. I.: „Beweis der Invarianz der Dimensionszahl." *Math. Ann.* **70** (1911) 161—165.
[3] Deák, E.: „Ein neuer topologischer Dimensionsbegriff." *Revue Roum Math. Pure Appl.* **10** (1965) 31-42.
[4] Hurewicz, W. „Normalbereiche und Dimensionstheorie." *Math. Ann.* **96** (1927) 736—764.
[5] Hurewicz, W.: „Über das Verhältnis separabler Räume zu kompakten Räumen." *Proc. Acad. Amst.* **30** (1927) 425—430.
[6] Hurewicz, W.—Wallman, H.: *Dimension Theory.* Princeton, 1948.
[7] Menger, K.: *Dimensionstheorie.* Leipzig u. Berlin, 1928.
[8] Nöbeling, G.: „Über eine n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}." *Math. Ann.* **104** (1931) 71—80.

ПОЛНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОДПОСТРАНСТВ ЭВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА С ПОМОЩЬЮ РАЗМЕР НОСТИ НАПРАВЛЕНИЯ

E. DEÁK

Резюме

Понятия: Направление некоторого топологического пространства — это упорядоченное множество пар (G, F) составляющихся из $G \in \mathcal{G}$ открытых и $F \in \mathcal{F}$ закрытых множеств, удовлетворяющее аксиомам (1.1.1) — (1.1.4). Структура направления некоторого пространства X — это множество направлений такое, что семейство множеств (1.12.1) является подбазой от X. Понятие структуры направления является обобщением структуры по-

лупространств эвклидовых пространств. Размерность направления некоторого пространствах означенная через $\mathrm{Dim}\, X$ минимум мощностей его (направленных структур). Понятие размерности направления было введено первый раз в [3].

Результаты: *Каждое непустое топологическое пространство имеет размерность направления.* Соотношение между $\mathrm{Dim}\, X$ и размерностью Menger-а—Урысон-а $\dim X$ для сепарабельных метрических пространств показывает (9.3).

Каждое сепарабельное метрическое постpансво X *может быть вложено в* $E_{\mathrm{Dim}\, X}$ (см. (8.11)) *и поэтому* $\mathrm{Dim}\, X \leqq n$ *в том и только в том случае, если* X — *подпространство от* E_n.

Второй главный результат работы, который показывает некоторую аналогию с классической теоремой вложения Тихонов-а, относится к классу так называемых обычных T_0-пространств. (Этот класс часть класса пространств Тихонова, и содержит совершенно нормальные T_0-пространства (см. (4,1), (5,1), (5,2) и (7,2)): *Каждое обычное* T_0*-пространство может быть вложено в топологический продукт семейства мощности* $\mathrm{Dim}\, X$ *упорядоченно топологических пространств.*

ÜBER DIE NÄHERUNGSLÖSUNG EINES WÄRMELEITUNGSPROBLEMS DURCH ANWENDUNG DER THEORIE DER HYPERMATRIZEN

von

P. KOSIK

Betrachten wir eine lange, hohe Wand, mit der Dicke d. Die Wand ist ihrer Länge entlang aus Säulen zusammengesetzt. Diese Säulen sind homogen, jedoch in bezug auf Wärmeleitungseigenschaften zweierlei Art. Ihre Temperaturfähigkeiten seien durch a_1^2 bzw. a_2^2 bezeichnet. Die Säulen sollen der Wand entlang so aufeinander folgen, wie das in der Abbildung 1 veranschaulicht ist. Die Temperaturleitfähigkeiten von je zwei nebeneinander stehenden Säulen sind immer verschieden.

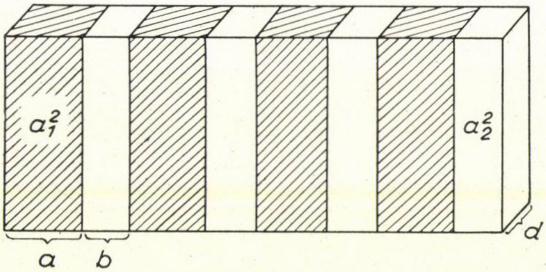


Abb. 1.

Nehmen wir an, dass die Temperatur der einen Wandfläche, welche wir ,,äussere Wandfläche'' nennen wollen, sich unabhängig vom Orte periodisch ändert. Diese Temperatur soll gleich $A \cos \omega t$ bzw. $A \sin \omega t$ sein (t ist die Zeit). Die Aufgabe ist, für einen beliebigen inneren Punkt der Wand die Temperatur als Funktion der Zeit zu finden, wenn wir annehmen, dass zwischen der anderen (als ,,innere'' bezeichneten) Wandfläche und dem Medium, welches die innere Fläche der Wand begrenzt, keine Wärmeübertragung stattfindet.

Da die Wand genügend lang ist, so wird es genügen, die Temperaturverteilung nur in zwei nebeneinander stehenden Säulen zu untersuchen. Die an den Enden der Säulen auftretende Temperaturänderung beeinträchtigt die Temperatur der Säulen nicht wesentlich. Es genügt also einen zu der Grundfläche der Säulen parallelen Durchschnitt zu untersuchen.

Mathematisch wird das hier besprochene Problem folgendermassen lauten:

Betrachten wir in einer (x, y)-Ebene die beiden, von den Geraden

$$x = 0\,, \quad x = d\,, \quad y = 0\,, \quad y = a$$

und

$$x = 0\,, \quad x = d\,, \quad y = 0\,, \quad y = -b$$

begrenzten Gebiete. Es ist dasjenige System $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ der Lösungen der Gleichungen

$$u_{1_{xx}} + u_{1_{yy}} = a_1^2\, u_{1_t}, \text{ falls } 0 \leqq x \leqq d\,, \quad 0 \leqq y \leqq a \tag{1a}$$

$$u_{2_{xx}} + u_{2_{yy}} = a_2^2\, u_{2_t}, \text{ falls } 0 \leqq x \leqq d\,, \quad -b \leqq y \leqq 0 \tag{1b}$$

zu bestimmen, welches folgende Bedingungen befriedigt:

$$u_1(d, y, t) = Ae^{i\omega t}\,; \qquad 0 \leqq y \leqq a \tag{2a}$$

$$u_2(d, y, t) = Ae^{i\omega t}\,; \qquad -b \leqq y \leqq 0 \tag{2b}$$

$$u_{1_x}(0, y, t) = 0 \quad ; \qquad 0 \leqq y \leqq a \tag{3a}$$

$$u_{2_x}(0, y, t) = 0 \quad ; \qquad -b \leqq y \leqq 0 \tag{3b}$$

$$u_1(x, 0, t) = u_2(x, 0, t) \tag{4}$$

$$\lambda_1\, u_{1_y}(x, 0, t) = \lambda_2\, u_{2_y}(x, 0, t) \tag{5}$$

$$u_1(x, a, t) = u_2(x, -b, t) \tag{6}$$

$$\lambda_1\, u_{1_y}(x, a, t) = \lambda_2\, u_{2_y}(x, -b, t) \tag{7}$$

(λ_1 und λ_2 sind die Wärmeleitungskoeffizienten in den beiden, oben beschriebenen Gebieten.)

Aus den vier letzten Gleichungen und daraus, dass die Säulen in bezug auf Wärmeleitung homogen sind, folgt, dass

$$u_{1_y}\left(x, \frac{a}{2}, t\right) = 0 \tag{8}$$

und

$$u_{2_y}\left(x, -\frac{b}{2}, t\right) = 0\,. \tag{9}$$

Werden die Bedingungen (6) und (7) durch die Bedingungen (8) und (9) ersetzt, so kann daraus das ursprüngliche System der Anfangsbedingungen einfach hergeleitet werden.

Nehmen wir an, dass

$$u_1(x, y, t) = f_1(x, y)\, e^{i\omega t} \tag{10}$$

und

$$u_2(x, y, t) = f_2(x, y)\, e^{i\omega t} \tag{11}$$

ist.

Wenn wir die Funktionen u_1 und u_2 in der Form (10) und (11) schreiben, so folgt aus den Gleichungen (1a) und (1b):

$$\Delta f_1 = a_1^2\, i\omega f_1 \tag{12}$$

und

$$\Delta f_2 = a_2^2\, i\omega f_2\,. \tag{13}$$

Zur Lösung des Problems wenden wir das Differenzenverfahren an.

Teilen wir das, durch die Geraden $y = \frac{a}{2}$, $y = \frac{-b}{2}$, $x = 0$, $x = d$ begrenzte Gebiet mit Hilfe zu den Achsen x, y parallelen Geraden in der Weise auf, dass wir durch diese Aufteilung ein quadratisches Gitter bekommen. Der Einfachheithalber nehmen wir an, dass die Werte von a, b und d dieser Bedingung entsprechen.

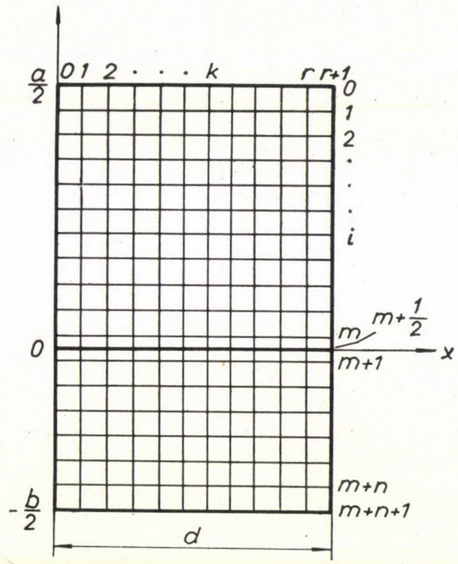


Abb. 2.

Die zu der x Achse parallele Aufteilung soll so vorgenommen werden, dass die x Achse selbst keine Gitterlinie sei, jedoch soll sie zwischen zwei Gitterlinien liegen die von ihr gleich weit entfernt sind. Zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = d$ laufen r zu der Achse y parallele Gitterlinien. Parallel zur x-Achse sollen sich oberhalb der Achse m, und unterhalb ihr n Gitterlinien befinden. Die Näherungswerte von u_1 und u_2 bestimmen wir in der Gitterpunkten, die sich innerhalb des Gebietes befinden.

Numerieren wir die zur x Achse parallelen Gitterlinien von oben nach unten von 1 bis $(m + n)$ und die zur y Achse parallelen Gitterlinien von links nach rechts von 1 bis r. So gehört zu jedem Gitterpunkt je ein Indexpaar, welches den Punkt eindeutig bestimmt. Der, dem Laplace'schen Operator entsprechende Differenzen-Operator kann also in folgender Form geschrieben werden[1] (wobei h der Abstand zweier benachbarter Gitterlinien ist):

$$(14) \qquad h^2 \Delta f(x, y) \cong (f_{i-1,k} - f_{i,k}) + (f_{i,k-1} - f_{i,k}) + (f_{i+1,k} - f_{i,k}) + \\ + (f_{i,k+1} - f_{i,k}) = f_{i-1,k} + f_{i,k-1} + f_{i+1,k} + f_{i,k+1} - 4 f_{i,k} .$$

[1] S. z. B. [1].

Zum Zwecke der einfacheren Darstellungsweise führen wir nun eine Funktion $f(x, y)$ ein. Es soll

$$f(x, y) = f_1(x, y) \text{ sein, falls } 0 \leqq x \leqq d\,,\ 0 \leqq y \leqq \frac{a}{2}$$

und es soll

$$f(x, y) = f_2(x, y) \text{ sein, falls } 0 \leqq x \leqq d,\ -\frac{b}{2} \leqq y \leqq 0\,.$$

In diesem Falle kann die Wärmeleitungsgleichung durch folgende partielle Differenzengleichung ersetzt werden (der Index i bezieht sich auf die horizontalen, der Index k auf die vertikalen Gitterlinien):

$$f_{i-1,k} + f_{i,k-1} - 4 f_{i,k} + f_{i,k+1} + f_{i+1,k} = \begin{cases} h^2 a_1^2\, i\omega \text{ für } 1 \leqq i \leqq m \\ h^2 a_2^2\, i\omega \text{ für } m+1 \leqq i \leqq m+n. \end{cases} \tag{15}$$

Den Randbedingungen werden folgendermassen in Betracht gezogen: Da $f_{i,\,0} - f_{i,\,1} \cong 0$ und auch $f_{0,\,k} - f_{1,\,k} \cong 0$ so lassen wir aus (14) diese Differenzen weg:

$$h^2 \Delta f_{11} \cong -\,2 f_{11} + f_{12} + f_{21}\,. \tag{16}$$

Im Falle $i > 1$:

$$h^2 \Delta f_{i,r} \cong f_{i-1,r} + f_{i,r-1} - 4 f_{i,r} + f_{i+1,r} + A \tag{17}$$

[da wir statt $f_{i,\,r+1}$ die Grösse A einsetzen müssen — s. (2a) und (2b)].

Bezeichnen wir die Schnittpunkte der zur y Achse parallelen Gitterlinien und der Achse x der Reihe nach durch die Indizes

$$\left(m + \frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(m + \frac{1}{2},\ 2\right),\ \ldots,\ \left(m + \frac{1}{2},\ r\right).$$

Gemäss den Gleichungen (1) und (5) erhalten wir dann:

$$\lambda_1(f_{m,\,k} - f_{m+\frac{1}{2},\,k}) = \lambda_2(f_{m+\frac{1}{2},\,k} - f_{m+1,\,k})\,. \tag{18}$$

Die Grösse $f_{m+\frac{1}{2},\,k}$ drücken wir durch die Funktionswerte $f_{m,\,k}$ und $f_{m+1,\,k}$ aus:

$$f_{m+\frac{1}{2},\,k} = \frac{\lambda_1 f_{m,k} + \lambda_2 f_{m+1,k}}{\lambda_1 + \lambda_2}\,. \tag{19}$$

Da

$$f_{m+1,k} - f_{m,k} \cong 2(f_{m+\frac{1}{2},k} - f_{m,k})\,, \tag{20}$$

so erhalten wir, wenn wir laut (14) den Näherungswert von $\Delta f_{m,\,k}$ unter Beachtung von (19) und (20) berechnen:

$$h^2 \Delta f_{m,k} \cong f_{m-1,k} + f_{m,k-1} - (4 + a) f_{m,k} + f_{m,k+1} + 2\,\beta f_{m+1,k} \tag{21}$$

und ebenso:

$$h^2 \Delta f_{m+1,k} \cong 2(1 - \beta) f_{m,\,k} + f_{m+1,\,k-1} - (4 + a) f_{m+1,\,k} + f_{m+1,\,k+1} + f_{m+2\,k} \tag{22}$$

$$\text{wobei } a = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \text{ und } \beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1}\,.$$

Wenn wir die Unbekannten $f_{i,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, m + n)$ in lexikographischer Reihenfolge aufschreiben und auch die obenerwähnten Randbedingungen in Betracht ziehen, so können wir die Differenzengleichung (15) als ein algebraisches Gleichungssystem mit $r(m + n)$ Unbekannten auffassen. Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems kann in vier Hypermatrizen zerlegt werden, die aus Blöcken r-ter Ordnung bestehen. Diese Koeffizientenmatrix soll durch $\mathbf{Q}$, der unbekannte Vektor, welcher $(m + n)r$ Elemente enthält und dessen Elemente durch die Indexpaare (I, i) charakterisiert werden sollen, durch $\mathbf{u}$ bezeichnet werden. Dann kann dieses Gleichungssystem in der Form

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{23}$$

geschrieben werden, wo jedes kr-te $(k = 1, 2, \ldots, m + n)$ Element des Vektors $\mathbf{f}$ gleich A ist, und wo die übrigen Elemente gleich Null sind.

Die Lösung der Aufgabe wird dadurch ermöglicht, dass die Blöcke der Koeffizientenmatrix $\mathbf{Q}$ lineare Funktionen von einer sehr einfachen Struktur der folgenden Matrix $\mathbf{K}$ sind:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{matrix}\right] \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ \\ . \\ \\ (r \end{matrix} \tag{24}$$

Die Matrix $\mathbf{Q}$ kann nämlich, wenn man die obenerwähnte Zerlegung ausführt, in der Form

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \mathbf{S} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \tag{25}$$

geschrieben werden, wo $\mathbf{P}$ eine Hypermatrix m-ter Ordnung (d. h. aus m Blockzeilen und m Blockspalten bestehend) und $\mathbf{T}$ eine Hypermatrix n-ter Ordnung (d. h. aus n Blockzeilen und n Blockspalten bestehend) ist, und zwar

$$\mathbf{P} = \left[\begin{matrix} \mathbf{K}+(1+i\omega a_1^2h^2)\mathbf{E} & -\mathbf{E} & 0 & \cdots & \\ -\mathbf{E} & \mathbf{K}+(2+i\omega a_1^2h^2)\mathbf{E} & -\mathbf{E} & \cdots & \\ 0 & -\mathbf{E} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \cdots & -\mathbf{E} & \mathbf{K}+(2+i\omega a_1^2h^2)\mathbf{E} & -\mathbf{E} & \\ \cdots & 0 & -\mathbf{E} & \mathbf{K}+(2+i\omega a_1^2h^2+a)\mathbf{E} & \end{matrix}\right] \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ . \\ . \\ . \\ (m \end{matrix} \tag{26}$$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{matrix} \mathbf{K}+(2+i\omega a_2^2h^2)\mathbf{E} & -\mathbf{E} & 0 & \cdots \\ -\mathbf{E} & \mathbf{K}+(2+i\omega a_2^2h^2)\mathbf{E} & -\mathbf{E} & \cdots \\ & \ddots & & \\ \cdots & -\mathbf{E} & \mathbf{K}+(2+i\omega a_2^2h^2)\mathbf{E} & -\mathbf{E} \\ \cdots & 0 & -\mathbf{E} & \mathbf{K}+(1+i\omega a_2^2h^2)\mathbf{E} \end{matrix}\right] \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ . \\ . \\ (n \end{matrix} \tag{27}$$

Weiterhin haben wir:

$$(28)\qquad \mathbf{R} = -2\beta \begin{bmatrix} 0 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{E} & \dots\dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ \vdots \\ (m \end{matrix} ; \quad \mathbf{S} = -2(1-\beta) \begin{bmatrix} 0 & \dots\dots & \mathbf{E} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots\dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ \vdots \\ (n \end{matrix} ,$$

wobei durch $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix r-ter Ordnung bezeichnet wird.

Der Vektor $\mathbf{u}$ wird bestimmt, indem die Gleichung (23) — angenommen, dass $\mathbf{Q}$ nicht singulär ist — mit $\mathbf{Q}^{-1}$ von links multipliziert wird:

$$(29)\qquad \mathbf{u} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{f}\,.$$

Unsere Aufgabe besteht also in der Bestimmung der Kehrmatrix $\mathbf{Q}^{-1}$. Es soll noch bemerkt werden, dass es genügt das kr-te ($k = 1, 2, \dots, m+n$) Element von jeder Zeile der Matrix $\mathbf{Q}^{-1}$ zu bestimmen, da doch nur die kr-ten Komponenten des Vektors $\mathbf{f}$ von Null verschieden sind. Für die Inverse der derart zerlegten Matrix ist folgende Formel bekannt (S. z. B. [2]):

$$(30)\qquad \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \mathbf{S} & \mathbf{T} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{T} - \mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}^{-1} & -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{T} - \mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R})^{-1} \\ -(\mathbf{T} - \mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}^{-1} & (\mathbf{T} - \mathbf{S}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R})^{-1} \end{bmatrix}$$

Die Blöcke der hier vorkommenden Kehrmatrizen können mit Hilfe folgender Überlegungen konstruiert werden: Da die Blöcke der obenerwähnten Matrizen $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ alle einfache Polynome der Matrix $\mathbf{K}$ sind, sind sie vertauschbar und deshalb können sie als skalare Grössen betrachtet werden. Nachdem wir die vorgeschriebenen Operationen (die Bildung der inversen Matrizen und die Multiplikationen) durchgeführt haben, können wir wieder in Betracht ziehen, dass die Blöcke $\mathbf{K}$ Matrizen sind.

Wie wir noch sehen werden, wird dies dadurch ermöglicht, dass wir die Spektralzerlegung der Matrix in expliziter Form ausführen können.

Um die Kehrmatrix $\mathbf{P}^{-1}$ zu bestimmen, benutzen wir die bekannten, sich auf die Bildung der Inversen der Kontinuantenmatrizen von einfachster Struktur beziehenden Zusammenhänge (S. z. B. [3]).

Die Determinante der Matrix

$$\mathbf{D}_n(x) = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \dots\dots & & \\ -1 & x & -1 & 0 & \dots\dots & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \dots\dots & & & & -1 & x & -1 \\ \dots\dots & & & & 0 & -1 & x \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ \vdots \\ \cdot \\ (n \end{matrix}$$

ist ein Tschebyscheffsches Polynom zweiter Art:

$$(31)\qquad D_n(2\cos\Theta) = \frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin\Theta}, \quad \text{oder} \quad D_n(2\,\mathrm{ch}\,\Theta) = \frac{\mathrm{sh}\,(n+1)\Theta}{\mathrm{sh}\,\Theta}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass infolge dieser Formeln die Elemente der Kehrmatrix $\mathbf{D}_n^{-1}(x)$ in der Form

$$\mathbf{D}_n^{-1}(x)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} i\Theta \cdot \operatorname{sh}(n+1-j)\Theta}{\operatorname{sh}\Theta \cdot \operatorname{sh}(n+1)\Theta}, & \text{wenn } i < j \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh} j\Theta \cdot \operatorname{sh}(n+1-i)\Theta}{\operatorname{sh}\Theta \cdot \operatorname{sh}(n+1)\Theta}, & \text{wenn } i \geqq j \end{cases} \tag{32}$$

aufgeschrieben werden können.

Führen wir nun die, durch die Transformation

$$K + (2 + i\omega a_1^2 h^2) = 2 \operatorname{ch} \Theta \tag{33}$$

definierte Grösse Θ ein. Durch Verwendung der Zusammenhänge (31) und (32), ergeben sich nach einfacher Rechnung die Elemente der gesuchten Matrix $\mathbf{P}^{-1}$:

$$(\mathbf{P}^{-1})_{IJ} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}\left[\left(I-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]\{\operatorname{sh}[(m+1-J)\Theta] + a\operatorname{sh}[(m-J)\Theta]\}}{\operatorname{sh}\Theta\left\{\operatorname{ch}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\Theta\right] + a\operatorname{ch}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]\right\}}, & \text{wenn } I < J \\[3ex] \dfrac{\operatorname{ch}\left[\left(J-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]\{\operatorname{sh}[(m+1-I)\Theta] + a[\operatorname{sh}(m-I)\Theta]\}}{\operatorname{sh}\Theta\left\{\operatorname{ch}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\Theta\right] + a\operatorname{ch}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]\right\}}, & \text{wenn } I \geqq J. \end{cases} \tag{34}$$

Bestimmen wir nun die Elemente der Kehrmatrix $(\mathbf{T} - \mathbf{SP}^{-1}\mathbf{R})^{-1}$. Es seien:

$$K + (2 + i\omega a_2^2 h^2) = 2 \operatorname{ch} \Phi \tag{35}$$

und

$$a + 4\beta(1-\beta)\frac{\operatorname{ch}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]}{\operatorname{ch}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\Theta\right] + a\operatorname{ch}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]} = \psi. \tag{36}$$

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen ergibt sich für die Matrix $\mathbf{T} - \mathbf{SP}^{-1}\mathbf{R}$:

$$\mathbf{T} - \mathbf{SP}^{-1}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2\operatorname{ch}\Phi - \psi & -\mathbf{E} & 0 & \cdots & & \\ -\mathbf{E} & 2\operatorname{ch}\Phi & -\mathbf{E} & \cdots & & \\ 0 & -\mathbf{E} & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & -\mathbf{E} & 2\operatorname{ch}\Phi & -\mathbf{E} \\ 0 & \cdots & & 0 & -\mathbf{E} & 2\operatorname{ch}\Phi - \mathbf{E} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Wiederum, unter Benutzung der Zusammenhänge (31) und (32) erhalten wir:

$$(38)\qquad [\mathbf{T}-\mathbf{SP}^{-1}\mathbf{R}]^{-1}_{IJ}=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch}\left[\left(n-J+\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\{\operatorname{sh}[I\Phi]-\psi\operatorname{sh}[(I-1)\Phi]\}}{\operatorname{sh}\Phi\left\{\operatorname{ch}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\Phi\right]-\psi\operatorname{ch}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\right\}}, & \text{wenn } I<J\\[2ex] \dfrac{\operatorname{ch}\left[\left(n-I+\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\{\operatorname{sh}[J\Phi]-\psi\operatorname{sh}[(J-1)\Phi]\}}{\operatorname{sh}\Phi\left\{\operatorname{ch}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\Phi\right]-\psi\operatorname{ch}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\right\}}, & \text{wenn } I\geqq J.\end{cases}$$

Nunmehr können wir leicht die Blöcke r-ter Ordnung der Kehrmatrix $\mathbf{Q}$ bestimmen.

Führen wir die Bezeichnung

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P} & \mathbf{R}\\ \mathbf{S} & \mathbf{T}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{U} & \mathbf{V}\\ \mathbf{W} & \mathbf{Z}\end{bmatrix}$$

ein und es sei

$$(39)\qquad X(\Theta,\Phi)=\left\{\operatorname{ch}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\Phi\right]-a\operatorname{ch}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\right\}\left\{\operatorname{ch}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\Theta\right]+\right.$$
$$\left.+a\operatorname{ch}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]\right\}-4\beta(1-\beta)\operatorname{ch}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\operatorname{ch}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\Theta\right],$$

$$(40)\qquad H_1(\Phi)=\operatorname{ch}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\Phi\right]-a\operatorname{ch}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Phi\right],$$

$$(41)\qquad H_2(\Theta)=\operatorname{ch}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\Theta\right]+a\operatorname{ch}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\Theta\right].$$

Dann können durch Substitution von ψ [S. Formel (36)] die Matrizen $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{Z}$ folgendermassen geschrieben werden:

$$(42)\qquad \mathbf{U}_{IJ}=\begin{cases}\left\{H_1(\Phi)\left[\dfrac{\operatorname{sh}[(m-J+1)\Theta]}{\operatorname{sh}\Theta}+a\dfrac{\operatorname{sh}[(m-J)\Theta]}{\operatorname{sh}\Theta}\right]-4\beta(1-\beta)\cdot\right.\\ \left.\cdot\operatorname{ch}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\dfrac{\operatorname{sh}[(m-J)\Theta]}{\operatorname{sh}\Theta}\right\}\dfrac{\operatorname{ch}\left[\left(I-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]}{X(\Theta,\Phi)} & \text{für } I<J\\ \left\{H_1(\Phi)\left[\dfrac{\operatorname{sh}[(m-I+1)\Theta]}{\operatorname{sh}\Theta}+a\dfrac{\operatorname{sh}[(m-I)\Theta]}{\operatorname{sh}\Theta}\right]-4\beta(1-\beta)\cdot\right.\\ \left.\cdot\operatorname{ch}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\dfrac{\operatorname{sh}[(m-I)\Theta]}{\operatorname{sh}\Theta}\right\}\dfrac{\operatorname{ch}\left[\left(J-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]}{X(\Theta,\Phi)} & \text{für } I\geqq J\end{cases}$$

$$\mathbf{V}_{IJ} = \frac{2\beta}{X(\Theta, \Phi)} \operatorname{ch}\left[\left(I - \frac{1}{2}\right)\Theta\right] \operatorname{ch}\left[\left(n - J + \frac{1}{2}\right)\Phi\right], \tag{43}$$

$$\mathbf{W}_{IJ} = \frac{2(1-\beta)}{X(\Theta, \Phi)} \operatorname{ch}\left[\left(n - I + \frac{1}{2}\right)\Phi\right] \operatorname{ch}\left[\left(J - \frac{1}{2}\right)\Theta\right], \tag{44}$$

$$\mathbf{Z}_{IJ} = \begin{cases} \left\{H_2(\Theta)\left[\dfrac{\operatorname{sh}[I\Phi]}{\operatorname{sh}\Phi} - a\dfrac{\operatorname{sh}[(I-1)\Phi]}{\operatorname{sh}\Phi}\right] - 4\beta(1-\beta)\operatorname{ch}\left[\left(m - \dfrac{1}{2}\right)\Theta\right] \cdot \right. \\ \qquad \left. \cdot \dfrac{\operatorname{sh}[(I-1)\Phi]}{\operatorname{sh}\Phi}\right\} \dfrac{\operatorname{ch}\left[\left(n - J + \frac{1}{2}\right)\Phi\right]}{X(\Theta, \Phi)} & \text{für } I \leqq J \\ \left\{H_2(\Theta)\left[\dfrac{\operatorname{sh}[J\Phi]}{\operatorname{sh}\Phi} - a\dfrac{\operatorname{sh}[(J-1)\Phi]}{\operatorname{sh}\Phi}\right] - 4\beta(1-\beta)\operatorname{ch}\left[\left(m - \dfrac{1}{2}\right)\Theta\right] \cdot \right. \\ \qquad \left. \cdot \dfrac{\operatorname{sh}[(J-1)\Phi]}{\operatorname{sh}\Phi}\right\} \dfrac{\operatorname{ch}\left[\left(n - I + \frac{1}{2}\right)\Phi\right]}{X(\Theta, \Phi)} & \text{für } I > J. \end{cases} \tag{45}$$

Die hier vorkommenden Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{\Phi}$ hängen von der Matrix $\mathbf{K}$ genau in derselben Weise ab, wie die durch die Formeln (33) und (35) definierten Skalaren Θ und Φ von der skalaren Grösse K.

Die Komponente $\mathbf{u}_{Ii}$ des Vektors $\mathbf{u}$ erhalten wir durch Summation der Jr-ten Elemente nach J $(J = 1, 2, \ldots, m+n)$ in der Zeile mit dem Index (Ii) der Matrix $\mathbf{Q}^{-1}$ und Multiplikation der so erhaltenen Summe mit A:

$$\mathbf{u}_{Ii} = A \sum_{J=1}^{m+n} (\mathbf{Q}^{-1})_{IJ;ir} \,. \tag{46}$$

Nun bestimmen wir die Elemente $(\mathbf{Q}^{-1})_{IJ;ir}$. Die Blöcke $(\mathbf{Q}^{-1})_{IJ}$ sind Funktionen f_{IJ} der Matrix $\mathbf{K}$:

$$(\mathbf{Q}^{-1})_{IJ} = f_{IJ}(\mathbf{K}) = \sum_{k=1}^{r} f_{IJ}(\lambda_k)\, \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* \,. \tag{47}$$

Die Vektoren $\mathbf{v}_k$ sind die zu den Eigenwerten λ_k gehörigen Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{K}$:

Wir müssen also die Spektralzerlegung der Matrix $\mathbf{K}$ durchführen. Durch die Substitution:

$$2 - \lambda = 2 \cos \vartheta$$

ergibt sich für das charakteristische Polynom:

$$|\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2\cos\vartheta-1 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 2\cos\vartheta & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2\cos\vartheta & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2\cos\vartheta \end{vmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (r \end{matrix} =$$

(48)

$$= \frac{\sin(r+1)\vartheta - \sin r\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\cos\left(r+\frac{1}{2}\right)\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta},$$

mithin erhalten wir für ϑ_k aus der charakteristischen Gleichung

(49) $$\cos\left(r+\frac{1}{2}\right)\vartheta = 0$$

den Wert

$$\vartheta_k = \frac{2k-1}{2r+1}\pi \qquad (k=1, 2, \dots, r),$$

und hieraus die Eigenwerte

(50) $$\lambda_k = 2 - 2\cos\vartheta_k = 4\sin^2\left[\frac{2k-1}{2r+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right] \qquad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Die Eigenvektoren der Matrix **K** erhalten wir durch die dyadische Zerlegung der Projektoren

(51) $$L_k(\mathbf{K}) = -\frac{1}{D'(\lambda_k)}\operatorname{adj}[\mathbf{K}-\lambda_k\mathbf{E}],$$

wo die $L_k(z)$ die Lagrange'schen Interpolationspolynome mit den Werten Eins in den Knotenpunkten λ_k sind. (S. z. B. [3].)

Wenn wir in Betracht ziehen, dass

$$\left\{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\cos\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right]}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}\right)\right\}_{\lambda=\lambda_k} = (-1)^k \frac{r+\frac{1}{2}}{2\sin\left[\frac{2k-1}{2r+1}\pi\right]\cos\left[\frac{2k-1}{2r+1}\frac{\pi}{2}\right]},$$

$$\{\operatorname{adj}(\mathbf{K}-\lambda_k\mathbf{E})\}_{ij} = (-1)^{k-1}\frac{\cos\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\vartheta_k\right]\cos\left[\left(j-\frac{1}{2}\right)\vartheta_k\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\vartheta_k\right]\sin\vartheta_k},$$

so erhalten wir durch Substitution in (51):

$$\{L_k(\mathbf{K})\}_{ij} = \frac{4}{2r+1} \cos\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{2k-1}{2r+1}\pi\right] \cos\left[\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{2k-1}{2r+1}\pi\right]. \tag{52}$$

Hieraus bekommen wir die normierten Komponenten der Eigenvektoren in der Form

$$v_{ik} = \frac{2}{\sqrt{2r+1}} \cos\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{2k-1}{2r+1}\pi\right], \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{53}$$

Entwickeln wir nun die rechte Seite der Gleichung (47). Da wir die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix **K** kennen, so können wir die Elemente mit den Indizes (ir) der Matrizen $(\mathbf{Q}^{-1})_{IJ}$ unmittelbar aufschreiben. Wenn nämlich $(\mathbf{Q}^{-1})_{IJ}$ eine Funktion f_{IJ} der Matrix **K** ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(\mathbf{Q}^{-1})_{IJ;ir} = \frac{4}{2r+1} \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} f_{IJ}(\lambda_k) \cos\left[(2i-1)\frac{2k-1}{2r+1}\frac{\pi}{2}\right] \cdot \\ \cdot \sin\left[\frac{2k-1}{2r+1}\pi\right].\end{aligned} \tag{54}$$

Nehmen wir zuerst an, dass $I \leqq m$. In diesem Falle müssen, um die Formel für $\mathbf{u}_{Ii}$ abzuleiten, die Elemente mit den Indices Jr der i-ten Zeilen in den I-ten Blockzeilen der Matrizen **U** und **V** nach J summiert werden ($J = 1, 2, \ldots, m+n$).

Diese Summierung soll zuerst für die Matrix **U** durchgeführt werden. Sie geschieht in zwei Schritten. Es sei zunächst $I \geqq J$. Wenn wir in Betracht ziehen, dass

$$\sum_{J=1}^{I} \mathrm{ch}\left[\left(J - \frac{1}{2}\right)\Theta\right] = \frac{\mathrm{sh}\,(I\Theta)}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{\Theta}{2}}, \tag{55}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{J=1}^{I} \mathbf{U}_{IJ} = \frac{\mathrm{sh}\,(I\Theta)}{X(\Theta,\Phi)\,2\,\mathrm{sh}\,\frac{\Theta}{2}} \Bigg\{ H_1(\Phi)\left[\frac{\mathrm{sh}[(m-I+1)\Theta]}{\mathrm{sh}\,\Theta} + a\,\frac{\mathrm{sh}[(m-I)\Theta]}{\mathrm{sh}\,\Theta}\right] - \\ - 4\beta(1-\beta)\,\mathrm{ch}\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\Phi\right]\frac{\mathrm{sh}[(m-I)\Theta]}{\mathrm{sh}\,\Theta}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{56}$$

Im Falle $I < J$ erhalten wir

$$\sum_{J=I+1}^{m} \mathrm{sh}[(m-J+1)\Theta] = \frac{\mathrm{sh}\left[(m-I)\frac{\Theta}{2}\right]\mathrm{sh}\left[(m-I+1)\frac{\Theta}{2}\right]}{\mathrm{sh}\,\frac{\Theta}{2}} \tag{57}$$

und

$$\sum_{J=I+1}^{m} \mathrm{sh}[(m-J)\Theta] = \frac{\mathrm{sh}\left[(m-I)\frac{\Theta}{2}\right]\mathrm{sh}\left[(m-I-1)\frac{\Theta}{2}\right]}{\mathrm{sh}\,\frac{\Theta}{2}}.$$

Mit Hilfe letzterer Gleichung bekommen wir:

$$\sum_{J=I+1}^{m} \mathbf{U}_{IJ} = \frac{\operatorname{ch}\left[\left(I-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]}{X(\Theta,\Phi)\operatorname{sh}\frac{\Theta}{2}}\left\{H_1(\Phi)\left\{\frac{\operatorname{sh}\left[(m-I)\frac{\Theta}{2}\right]\operatorname{sh}\left[(m-I+1)\frac{\Theta}{2}\right]}{\operatorname{sh}\Theta}+\right.\right.$$

$$(58)\qquad +\alpha\left.\frac{\operatorname{sh}\left[(m-I-1)\frac{\Theta}{2}\right]\operatorname{sh}\left[(m-I)\frac{\Theta}{2}\right]}{\operatorname{sh}\Theta}\right\}-4\,\beta(1-\beta)\operatorname{ch}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\,\frac{\operatorname{sh}\left[(m-I-1)\frac{\Theta}{2}\right]\operatorname{sh}\left[(m-I)\frac{\Theta}{2}\right]}{\operatorname{sh}\Theta}\right\}.$$

Für die Summe der in der I-ten Blockzeile stehenden Blöcke der Matrix $\mathbf{V}$ erhalten wir durch Anwendung der Formel (55) folgenden Ausdruck:

$$(59)\qquad \sum_{J=1}^{n} \mathbf{V}_{IJ} = \frac{\beta}{X(\Theta,\Phi)}\operatorname{ch}\left[\left(I-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]\frac{\operatorname{sh}(n\Phi)}{2\operatorname{sh}\frac{\Phi}{2}}.$$

Im Falle $I > m$, müssen die Elemente mit den Indices Jr der I-ten Blockzeilen der Matrizen $\mathbf{W}$ und $\mathbf{Z}$ nach J $(J = 1, 2, \ldots, m+n)$ summiert werden.

Ähnlicherweise wie vorhin, erhalten wir folgende Beziehungen:

$$(60)\qquad \sum_{J=1}^{m} \mathbf{W}_{IJ} = \frac{(1-\beta)}{X(\Theta,\Phi)}\operatorname{ch}\left[\left(n-I+\frac{1}{2}\right)\Phi\right]\frac{\operatorname{sh}(m\Theta)}{\operatorname{sh}\frac{\Theta}{2}},$$

$$\sum_{J=1}^{I} \mathbf{Z}_{IJ} = \frac{\operatorname{sh}[(n-I)\Phi]}{X(\Theta,\Phi)\,2\operatorname{sh}\frac{\Phi}{2}}\left\{H_2(\Theta)\left[\frac{\operatorname{sh}(I\Phi)}{\operatorname{sh}\Phi}-\alpha\frac{\operatorname{sh}[(I-1)\Phi]}{\operatorname{sh}\Phi}\right]-\right.$$

$$(61)\qquad \left.-\,4\,\beta(1-\beta)\operatorname{ch}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]\frac{\operatorname{sh}[(I-1)\Phi]}{\operatorname{sh}\Phi}\right\},$$

$$\sum_{J=I+1}^{n} \mathbf{Z}_{IJ} = \frac{\operatorname{ch}\left[\left(n-I+\frac{1}{2}\right)\Phi\right]}{X(\Theta,\Phi)\operatorname{sh}\frac{\Phi}{2}}\left\{H_2(\Theta)\left[\frac{\operatorname{sh}\left(I\frac{\Phi}{2}\right)\operatorname{sh}\left[(I+1)\frac{\Phi}{2}\right]}{\operatorname{sh}\Phi}-\right.\right.$$

$$(62)\qquad \left.-\,\alpha\,\frac{\operatorname{sh}\left[(I-1)\frac{\Phi}{2}\right]\operatorname{sh}\left(I\frac{\Phi}{2}\right)}{\operatorname{sh}\Phi}\right]-4\,\beta(1-\beta)\operatorname{ch}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\,\frac{\operatorname{sh}\left[(I-1)\frac{\Phi}{2}\right]\operatorname{sh}\left(I\frac{\Phi}{2}\right)}{\operatorname{sh}\Phi}\right\}.$$

Denjenigen Block, aus dessen mit dem Index ir bezeichneten Elementen — auf Grund der Beziehung (46) — sich die gesuchten $\mathbf{u}_{Ii}$ Elemente ergeben, erhalten wir im Falle $I \leqq m$ durch Summation der Beziehungen (56), (58) und (59) und im Falle $I > m$ durch Summation der Beziehungen (60), (61) und (62). Diese Blöcke sind rationale Funktionen der Matrix $\mathbf{K}$, ihr beliebiges Element kann also durch die bekannte Spektralzerlegung der Matrix $\mathbf{K}$ in expliziter Form angegeben werden. Durch Anwendung der Formel (54) und durch Einführung der Bezeichnungen ϑ_k bzw. φ_k für die Eigenwerte der durch die Summen (33) und (35) definierten Matrizen $\boldsymbol{\Theta}$ bzw. $\boldsymbol{\Phi}$, welche aus den Beziehungen

$$2 \operatorname{ch} \vartheta_k = 4 \sin^2\left[\frac{2k-1}{2r+1}\,\frac{\pi}{2}\right] + 2 + i\omega a_1^2 h^2$$

und

$$2 \operatorname{ch} \varphi_k = 4 \sin^2\left[\frac{2k-1}{2r+1}\,\frac{\pi}{2}\right] + 2 + i\omega a_2^2 h^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

berechnet werden können, erhalten wir endlich folgendes Resultat:

$$u_{1,2}(x_i, y_I, t) \cong \frac{4}{2r+1} A e^{i\omega t} \cdot \tag{63}$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} F_{1,2}(\Theta_k, \Phi_k) \cos\left[(2i-1)\frac{2k-1}{2r+1}\,\frac{\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{2k-1}{2r+1}\,\pi\right],$$

wo

$$F_1(\Theta, \Phi) = \frac{1}{X(\Theta, \Phi)}\left\{\frac{1}{2 \operatorname{sh}\frac{\Theta}{2} \operatorname{sh}\Theta}\left[H_1(\Phi)\left(\operatorname{sh}(I\Theta)\{\operatorname{sh}[(m-I+1)\Theta] +\right.\right.\right.$$

$$+ a \operatorname{sh}[(m-I)\Theta]\} + 2 \operatorname{ch}\left[\left(I-\frac{1}{2}\right)\Theta\right]\left\{\operatorname{sh}\left[(m-I)\frac{\Theta}{2}\right] \operatorname{sh}\left[(m-I+1)\frac{\Theta}{2}\right] +\right.$$

$$\left.\left.+ a \operatorname{sh}\left[(m-I-1)\frac{\Theta}{2}\right] \operatorname{sh}(m-I)\frac{\Theta}{2}\right]\right\}\right) - 4\beta(1-\beta) \operatorname{ch}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Phi\right] \cdot$$

$$\cdot \left\{\operatorname{sh}(I\Theta) \operatorname{sh}[(m-I)\Theta] + 2 \operatorname{ch}\left[\left(I-\frac{1}{2}\right)\Theta\right] \operatorname{sh}\left[(m-I-1)\frac{\Theta}{2}\right] \cdot\right. \tag{64}$$

$$\left.\left.\cdot \operatorname{sh}\left[(m-I)\frac{\Theta}{2}\right]\right\}\right] + \beta \operatorname{ch}\left[\left(I-\frac{1}{2}\right)\Theta\right] \frac{\operatorname{sh}(n\Phi)}{\operatorname{sh}\frac{\Phi}{2}}\right\}$$

und

$$F_2(\Theta, \Phi) = \frac{1}{X(\Theta, \Phi)} \left\{ \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{\Phi}{2}\,\mathrm{sh}\,\Phi} \left[H_2(\Theta) \left(\mathrm{sh}\,[(n - I)\Phi]\, \{\mathrm{sh}\,(I\Phi) - \right.\right.\right.$$

$$- a\,\mathrm{sh}\,[(I-1)\Phi]\} + 2\,\mathrm{ch}\left[\left(n - I + \frac{1}{2}\right)\Phi\right]\left\{\mathrm{sh}\left(I\,\frac{\Phi}{2}\right)\mathrm{sh}\left[(I+1)\,\frac{\Phi}{2}\right] -\right.$$

$$(65) \qquad \left.\left.- a\,\mathrm{sh}\left[(I-1)\,\frac{\Phi}{2}\right]\mathrm{sh}\left(I\,\frac{\Phi}{2}\right)\right\}\right) - 4\,\beta(1-\beta)\,\mathrm{ch}\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\Theta\right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \mathrm{sh}\,[(I-1)\Phi]\,\mathrm{sh}\,[(n-I)\Phi] + 2\,\mathrm{ch}\left[\left(n - I + \frac{1}{2}\right)\Phi\right]\mathrm{sh}\left[(I-1)\,\frac{\Phi}{2}\right] \cdot \right.$$

$$\left.\left. \cdot\, \mathrm{sh}\left(I\,\frac{\Phi}{2}\right)\right\}\right] + (1-\beta)\,\mathrm{ch}\left[\left(n - I + \frac{1}{2}\right)\Phi\right] \frac{\mathrm{sh}\,(n\,\Theta)}{\mathrm{sh}\,\frac{\Theta}{2}} \right\}.$$

Diejenige Lösung, welche an der äusseren Wandfläche der Randbedingung $u = A \cos \omega t$ bzw. $u = A \sin \omega t$ genügt, wird durch den reellen bzw. durch den imaginären Teil der Formel (63) gegeben.

(Eingegangen: 19. Mai, 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] KANTOROWITSCH, L. W.—KRYLOW, W. I.: *Näherungsmethoden der höheren Analysis* Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.

[2] БУЛГАКОВ, Б. В.: *Колебания*. Гос. изд. техн.-теор. лит. Москва, 1954.

[3] EGERVÁRY, J.: „Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkamazásáról." *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417—458.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ ГИПЕРМАТРИЦ

P. KOSIK

Резюме

В этой статье автор отыскивает приближенное решение уравнения теплопроводности при специальных граничных условиях. Он пользуется при этом методом решеток; в результате он получает систему линейных уравнений с многими неизвестными, решение которой дает искомую функцию в приближенном виде. Система уравнений решается путем образования обратной матрицы коэффициентов. Представление элементов обратной матрицы в сравнительно замкнутом виде становится возможным путем расчленения матрицы коэффициентов подходящим образом так, чтобы ее можно было рассматривать как гиперматрицу, блоки которой являются линейными функциями выражения (24). Далее, в явном виде записываются собственные значения и собственные векторы матрицы, при помощи которых — путем использования некоторых специальных теорем теории гиперматриц — получаются искомые выражения обратных элементов.

EIN MATRIZENTHEORETISCHES PROBLEM, UND SEIN ZUSAMMENHANG MIT DER THEORIE DER ORTHOGONALREIHEN

von
F. BALATONI

Einleitung

Es sei Ω_n die Menge derjenigen reellen, symmetrischen Matrizen $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ n-ter Ordnung, die so beschaffen sind, dass für jedes beliebiges Wertsystem der reellen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die quadratischen Formen $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, \xi_j\, \xi_k$ den Ungleichungen

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, \xi_j\, \xi_k \geqq \begin{cases} \xi_1^2 \\ (\xi_1 + \xi_2)^2 \\ \vdots \\ (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)^2 \end{cases} \tag{1}$$

genügen.

In diesem Artikel wird die Grössenordnung des maximalen Hauptdiagonalelements der Matrizen $\mathbf{A} \in \Omega_n$ untersucht. Wir beweisen den folgenden

Satz. *Es existiert eine universelle Konstante $K_1 > 0$ derart, dass für ein beliebiges Element $\mathbf{A}$ von Ω_n die Beziehung*

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} a_{kk} \geqq K_1 (\log n)^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots)\,. \tag{2}$$

gilt, und es existiert in Ω_n eine Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ und eine universelle Konstante $K_2 > 0$ derart, dass

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \tilde{a}_{kk} \leqq K_2 (\log n)^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots)\,. \tag{3}$$

Als eine einfache Folge des Satzes ergibt sich die folgende Version des RADEMACHER—MENSCHOW'schen Lemmas ([1], S. 75):

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_N$ beliebige reelle Zahlen und $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)$ ein beliebiges orthonormiertes Funktionensystem im Raume $L^2_{\mu(x)}$, so ist das Quadrat der Funktion $\delta_N(x)$

$$\delta_N(x) = \max_{\nu \leqq N} \left| \sum_{k=1}^{\nu} a_k\, \psi_k(x) \right| \geqq 0 \tag{4}$$

integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b \delta_N^2(x)\, d\mu(x) \leqq K_2 (\log N)^2 \sum_{k=1}^{N} a_k^2\,.$$

(K_2 ist die in unserem Satz vorkommende universelle positive Konstante.) Wir beweisen den Satz auf matrizentheoretischem Wege, und geben dadurch im wesentlichen einen matrizentheoretischen Beweis des RADEMACHER—MENSCHOW'schen Lemmas.

Eine Folge dieses Lemmas ist der Fundamentalsatz über die Konvergenz der Orthogonalreihen, den zu erst RADEMACHER und MENSCHOW bewiesen haben ([1], S. 76):

Die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

ist unter der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < +\infty$$

fast überall konvergent.

§ 1. Vorbereitung des Beweises

1. Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ bezeichnet einen Spaltenvektor, dessen Transponierter der Reihenvektor $\mathbf{a}^* = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ist.

Demnach ist der Wert des Matrizenproduktes $\mathbf{b}^* \mathbf{a}$ eine skalare Grösse, und $\mathbf{ba}^*$ eine Matrix (Dyade) vom Rang 1.

Es sei $\xi^* = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ ein beliebiger Reihenvektor; $\mathbf{e}_i$ sei ein Vektor dessen i-tes Element gleich 1, alle anderen Elemente gleich 0 sind. Ferner sei $\mathbf{T} = [t_{ik}]$, wobei $t_{ik} = 1$ für $i + k \leqq n + 1$ und $t_{ik} = 0$ für $i + k > n + 1$.

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_{n+1-i} = \mathbf{b}_i \,.$$

Die ersten i Elemente des Vektors $\mathbf{b}_i$ sind gleich 1, die anderen gleich 0. Die Matrix $\mathbf{T}$ ist symmetrisch, d. h. $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$. Schliesslich sei $m(\mathbf{A}) = \max(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Die Bedingung (1) lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\xi^* \mathbf{A} \xi \geqq \xi^* \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^* \xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

oder

$$\xi^* \mathbf{A} \xi \geqq \xi^* \mathbf{T}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{T} \xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{1.1}$$

also besteht $\mathbf{A} \in \Omega_n$ dann und nur dann, wenn die Bedingung (1.1) erfüllt ist.

2. Wir benutzen die Spektralzerlegung

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*$$

der Matrizen

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man bestätigt leicht die Beziehungen:

$$\mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{M}_n \overset{\text{def}}{=} \mathbf{T}^{-2}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

(Siehe: [2].)

Diese Matrix $\mathbf{M}_n$ ist eine Kontinuante mit einer einfachen Struktur, deren Spektralzerlegung mit bekannten Methoden bestimmbar ist (Siehe [3] und [4]). Wir kommen zum Resultat, dass die Eigenwerte und *die normierten Eigenvektoren* der Matrix $\mathbf{M}_n$ die Grössen

$$x_k = 4\sin^2 \frac{2k-1}{2n+1}\,\frac{\pi}{2} \tag{1.3}$$

und

$$\mathbf{u}_k = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \begin{bmatrix} \cos \dfrac{2k-1}{2n+1}\,\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 3\,\dfrac{2k-1}{2n+1}\,\dfrac{\pi}{2} \\ \vdots \\ \cos\,(2n-1)\,\dfrac{2k-1}{2n+1}\,\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{1.4}$$

sind.

Alle Eigenwerte x_k sind verschieden, daher sind die Eigenvektoren der Matrizen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{M}_n$ paarweise gleich. Man kann *die absoluten Beträge der Eigenwerte der Matrix* $\mathbf{T}$ unmittelbar angeben:

$$| \lambda_k | = l_k = \frac{1}{2 \sin \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} . \tag{1.5}$$

Bemerkung. Obwohl die Vorzeichen der Eigenwerte aus dem Zusammenhang:

$$\mathbf{T}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \tag{1.6}$$

bestimmbar sind, lassen wir sie ausser Acht, da wir sie nicht brauchen werden.

Es ergibt sich:

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k-1}}{2 \sin \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) . \tag{1.7}$$

3. Wir benutzen das folgende

Lemma. *Falls* $\mathbf{A}$ *positiv definit ist, so bestehen für beliebige Vektoren* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *die Beziehungen:*

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{y}^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} \geqq (\mathbf{x}^* \mathbf{y})^2 , \tag{1.8}$$

und

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{y}^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} \geqq 2 \mathbf{x}^* \mathbf{y} \tag{1.9}$$

([5], S. 69 und 86.).

4. Auf Grund von (1.1) gilt $\xi^* \mathbf{A} \xi \geqq 0$, jedoch ist der Zusammenhang $\tilde{\xi} \mathbf{A} \xi = 0$ infolge von (1) nur im Falle $\tilde{\xi} = \mathbf{0}$ erfüllt; falls also $\mathbf{A} \in \Omega_n$, so besteht für jedes ξ $(\xi \neq \mathbf{0})$ die Ungleichung $\xi^* \mathbf{A} \xi > 0$. Deshalb ist jedes Element $\mathbf{A}$ von Ω_n positiv definit (was durch die Bezeichung $\mathbf{A} > 0$ ausgedrückt werden soll).

5. Es sei $\mathbf{Q} > 0$ eine beliebige Matrix.

Setzen wir in (1.8)

$$\mathbf{x} = \xi \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{e}_i$$

ein, so erhalten wir:

$$\xi^* \mathbf{T}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{T} \xi \leqq \xi^* \mathbf{Q} \xi \mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{T}\mathbf{e}_i \leqq m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}) \xi^* \mathbf{Q} \xi .$$

Es gilt also für jede Konstante $c \geqq 1$ die Ungleichung

$$cm(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}) \xi^* \mathbf{Q} \xi \geqq \xi^* \mathbf{T}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{T} \xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Daraus ergibt sich, dass *die Matrix*

$$\mathbf{A} = cm(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})\mathbf{Q} \qquad (c \geqq 1) \tag{1.10}$$

ein Element von Ω_n *ist.*

6. Wir zeigen noch, dass *jedes Element* $\mathbf{A}$ *von* Ω_n *in der Form* (1.10) *geschrieben werden kann.*

Wenn wir in (1.1)

$$\xi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}_i$$

einsetzen, so erhalten wir:

$$\mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}_i \geqq (\mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}_i)^2 = (\xi^* \mathbf{A}\xi)^2 > 0\,,$$

da $\mathbf{A} > 0$ und $\xi \neq \mathbf{0}$ ist. Daraus folgt

$$0 < \mathbf{e}_i^* \mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}_i \leqq 1\,,$$

das heisst, es gilt die Beziehung:

$$0 < m\,(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}) \leqq 1\,.$$

Es sei nun

$$c = \frac{1}{m(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T})} \geqq 1\,,$$

also kann $\mathbf{A}$ in der Form

$$\mathbf{A} = c m(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T})\mathbf{A} \tag{1.11}$$

geschrieben werden, was wir auch zeigen wollten.

§ 2. Beweis des Satzes

1. *Unsere Aufgabe besteht in der Untersuchung des Ausdrucks* $m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})\,m(\mathbf{Q})$. Für das Weitere kann man annehmen, dass $c = 1$ und

$$m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}) = m(\mathbf{Q}) \tag{2.1}$$

ist, da sich der Wert von $m(\mathbf{A}) = m(\mathbf{Q})\,m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})$ nicht ändert, wenn man $\lambda\mathbf{Q}$ anstatt $\mathbf{Q}$ nimmt, wobei $\lambda > 0$ ist. Insbesondere kann λ derart gewählt werden, dass (2.1) erfüllt sei.

Es sei $\mathbf{Q}$ eine beliebige positiv definite Matrix unter der Annahme (2.1),

$$\sqrt{m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})m(\mathbf{Q})} = m(\mathbf{Q}) = \frac{m(\mathbf{Q}) + m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})}{2} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2n}(\operatorname{sp}\mathbf{Q} + \operatorname{sp}\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}) = \frac{1}{2n}\operatorname{sp}(\mathbf{Q} + \mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})$$

und es sei

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q} + \mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T} \tag{2.2}$$

mit den Eigenwerten und Eigenvektoren ξ_ν, $\mathbf{x}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Wenden wir nun (1.9) für

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\,,\ \mathbf{x} = \mathbf{u}_k\,,\ \mathbf{y} = |\,\lambda_k\,|\,\mathbf{u}_k$$

an.

Es seien $l_k = |\,\lambda_k\,|$, $\mathbf{u}_k$ und λ_k die in (1.4) und (1.7) vorkommenden Eigenvektoren und Eigenwerte. Dann gelten die Ungleichungen

$$\mathbf{u}_k^*\mathbf{Q}\mathbf{u}_k + \lambda_k^2\mathbf{u}_k^*\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{u}_k \geqq 2\,l_k\,\mathbf{u}_k^*\mathbf{u}_k = 2\,l_k,$$

$$\mathbf{u}_k^*\mathbf{Q}\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k^*\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{u}_k \geqq 2\,l_k$$

also laut der Bezeichnung (2.2):

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{B} \mathbf{u}_k \geqq 2 \sum_{k=1}^{n} l_k . \tag{2.3}$$

Mit Hilfe einiger bekannter Eigenschaften der Eigenvektoren zeigen wir, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{B} \mathbf{u}_k = \mathrm{sp}\, \mathbf{B} \tag{2.4}$$

ist.

Es gilt nämlich:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{B} \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \mathbf{x}_\nu \mathbf{x}_\nu^* \mathbf{u}_k = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_\nu^* \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* \mathbf{x}_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \mathbf{x}_\nu^* \mathbf{E} \mathbf{x}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \mathbf{x}_\nu^* \mathbf{x}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu = \mathrm{sp}\, \mathbf{B} .$$

Damit ist (2.4) nachgewiesen.

Wir zeigen nun, dass

$$\sum_{k=1}^{n} l_k \geqq \sqrt{K_1}\, n \log n \tag{2.5}$$

ist.[1]

Auf Grund von (1.5) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 \sin \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2n+1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \geqq \sqrt{K_1}\, n \log n$$

womit (2.5) bewiesen ist.

Aus den obigen folgt: $m(\mathbf{Q}) \geqq \frac{1}{2n} \mathrm{sp}\, \mathbf{B}$.

Mit Benutzung von (2.3), (2.4) und (2.5) erhalten wir:

$$m(\mathbf{Q}) \geqq \frac{1}{2n} \mathrm{sp}\, \mathbf{B} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^* \mathbf{B} \mathbf{u}_k \geqq \frac{2}{2n} \sum_{k=1}^{n} l_k \geqq \sqrt{K_1} \log n ,$$

also

$$m(\mathbf{Q}) \geqq \sqrt{K_1} \log n .$$

Wegen (2.1) gilt:

$$m(\mathbf{Q})\, m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}) \geqq K_1 (\log n)^2 . \tag{2.6}$$

In (2.6) kann die Bedingung (2.1) weggelassen werden. Also existiert für jede beliebige Matrix $\mathbf{Q} > 0$ eine Konstante $K_1 > 0$, mit welcher (2.) erfüllt ist.

---

[1] Die Eigenwerte und die Eigenwektoren der Matrix **T**, ferner die Beziehung (2.5) siehe auch in [6].

Es sei

$$\mathbf{A} \in \Omega_n .$$

Nach (1.11) folgt:

$$m(\mathbf{A}) = cm(\mathbf{TA}^{-1}\mathbf{T})\, m(\mathbf{A}) \geqq m(\mathbf{TA}^{-1}\mathbf{T}) m(\mathbf{A}) \geqq K_1(\log n)^2 .$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

2. Zum Beweis von (3) wählen wir die Matrix $\mathbf{Q}$ in einer speziellen Art. Es sei

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{n} l_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* , \tag{2.7}$$

$\mathbf{Q} > 0$. $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{T}$ sind vertauschbar, da ihre Eigenvektoren übereinstimmen. Ferner ist

$$\mathbf{Q}^2 = \mathbf{T}^2 , \quad \text{da} \quad l_k = |\lambda_k| .$$

Aus den obigen folgt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}^2 = \mathbf{TQ}^{-1}\mathbf{T} .$$

Für die Matrix $\mathbf{Q}$ ist die Bedingung (2.1) erfüllt. Wegen (1.10) ist $\tilde{\mathbf{A}} = m(\mathbf{TQ}^{-1}\mathbf{T})\,\mathbf{Q} = m(\mathbf{Q})\,\mathbf{Q}$ ein Element von Ω_n. Wir zeigen:

$$m(\tilde{\mathbf{A}}) = m^2(\mathbf{Q}) \leqq K_2(\log n)^2. \tag{2.8}$$

Mit Benutzung von (1.4) und (1.5):

$$\mathbf{e}_i^* \mathbf{Q}\, \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n} l_k\, \mathbf{e}_i^* \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* \mathbf{e}_i = \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 \dfrac{(2i-1)(2k-1)}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}}{2 \sin \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 \sin \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} \leqq \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 \dfrac{2}{\pi} \dfrac{2k-1}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}} ,$$

da $\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi} x$ für $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Des weiteren:

$$\mathbf{e}_i^* \mathbf{Q}\, \mathbf{e}_i \leqq 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \leqq \sqrt{K_2} \log n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

daher

$$m(\mathbf{Q}) \leqq \sqrt{K_2} \log n .$$

Also ist (2.8) verifiziert, und damit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen.

§ 3. Bemerkungen. Probleme

1. Wir beweisen das RADEMACHER—MENSCHOW'sche Lemma. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_N$ beliebige reelle Zahlen, und $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)$ ein ortonormiertes System im Raume $L^2_{\mu(x)}$.

Es seien weiterhin $\xi_k = a_k \psi_k(x)$ und $n = N$, ferner

$$\max_{\nu \leq N} \left| \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k \right| = \max_{\nu \leq N} \left| \sum_{k=1}^{\nu} a_k \psi_k(x) \right| = \delta_N(x) .$$

$\delta_N^2(x)$ ist $L_{\mu(x)}$ integrierbar, da sie die obere Hülle endlich vieler integrierbarer Funktionen ist. Setzen wir die obigen Werte von ξ_k in (1) ein. Dann erhalten wir

$$\sum_{j,k=1}^{N} \tilde{a}_{jk}\, a_j\, a_k\, \psi_j(x)\, \psi_k(x) \geqq \delta_N^2(x) .$$

Nun sollen beide Seiten über dem Basisintervall integriert werden. Auf Grund von (3):

$$\int_a^b \delta_N^2(x)\, d\mu(x) \leqq \sum_{k=1}^{N} \tilde{a}_{kk}\, a_k^2 \leqq m(\tilde{\mathbf{A}}) \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \leqq K_2 (\log N)^2 \sum_{k=1}^{N} a_k^2 ,$$

w. z. b. w.

2. Wir nennen eine Matrix $\mathbf{Q} \in \Omega_n$ optimal, wenn für irgendein Element $\mathbf{A}$ der Menge Ω_n

$$m(\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T})\, m(\mathbf{Q}) \leqq m(\mathbf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T})\, m(\mathbf{A})$$

ausfällt.

Wir haben die einzig mögliche optimale Matrix für nur $n = 2, 3$ gefunden. In diesen Fällen genügt die optimale Matrix $\mathbf{Q}$ den folgenden Bedingungen:

a) $\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{Q}$

und

b) $\mathbf{e}_i^* \mathbf{Q} \mathbf{e}_i = \sigma$ (σ unabhängig von i).

Im Falle $n = 2, 3$ lässt sich $\mathbf{Q}$ aus den obigen beiden Bedingungen eindeutig bestimmen und die so erhaltene Matrix ist optimal. Es wird vermutet, dass die Bedingungen a) und b) im Falle $\mathbf{Q} > 0$ für beliebige n eindeutig die optimale Matrix bestimmen.

(Eingegangen: 21. Mai, 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ALEXITS, G.: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.

[2] EGERVÁRY, J.: „Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie." *Math. Annalen* **99** (1928) 542—561.

[3] EGERVÁRY J.: „Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról." *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.* **3** (1953) 417—458.

[4] GANTMACHER, F. R.—KREIN, M. G.: *Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme.* Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

[5] BECKENBACH, E. F.—BELLMAN, R.: *Inequalities.* Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961.

[6] AITKEN, A. C.: „Two notes on matrices." *Proc. Glasgow math. Assoc.* **5** (1962) 109—113

ПРОБЛЕМА ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ И ЕЕ СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

F. BALATONI

Резюме

Пусть Ω_n множество вещественных симметричных матриц $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ n-го порядка, которые удовлетворяют условия

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\,\xi_j\,\xi_k \geqq \begin{cases} \xi_1^2 \\ (\xi_1+\xi_2)^2 \\ \vdots \\ (\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n)^2, \end{cases}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ любые вещественные числа.

Доказываем следующую теорему:

Существует универсальная константа $K_1 > 0$, такая, что в каждом случае:

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} a_{kk} \geqq K_1(\log n)^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

если $\mathbf{A} \in \Omega_n$, и существует в *Ω_n матрица $\mathbf{A}$ и универсальная константа K_2 такие, что*

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} a_{kk} \leqq K_2(\log n)^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Простое следствие теоремы следующий вариант леммы Радемахера—Меньшова:

Если $a_1, a_2, \ldots, a_N$ любие вещественные числа и $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)$ любая ортонормированная система, то функция

$$\max_{\nu\leqq N}\left|\sum_{k=1}^{\nu} a_k\,\psi_k(x)\right| = \delta_N(x) \geqq 0$$

$L^2_{\mu(x)}$-интегрируемая, и

$$\int_a^b \delta_N^2(x)\,d\mu(x) \leqq K_2(\log N)^2 \sum_{k=1}^{N} a_k^2 .$$

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

G. FREUD и Бл. СЕНДОВ[1]

Обозначим через $\omega(\delta)$ неубывающую функцию для которой

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)=\omega(0)=0\,.$$

Тогда через $BM\omega$ будем обозначать класс 2π—периодических функций $f(x)\in L_2$ удовлетворяющих условиям:

1) Для всех x и $\delta\geqq 0$,

$$|\,f(x+\delta)-f(x)\,|+|\,f(x-\delta)-f(x)\,|-|\,f(x+\delta)-f(x-\delta)\,|\leqq\omega(2\delta)$$

2) $|\,f(x)\,|\leqq B\,,\ (B\geqq 1)\,.$

Не трудно видеть, что если $f(x)\in BM\omega$, то всегда существуют $f(x+0)$ и $f(x-0)$, и для всех x, $f(x)$ находится между $f(x-0)$ и $f(x+0)$ [3].

Пусть $f(x)$ — ограниченная 2π—периодическая функция. Обозначим через $\bar f$ точечное множество — назовём его дополненный график $f(x)$ — которое получается как пересечение всех замкнутых точечных множеств F на плоскости, которые содержат график функции $f(x)$ и выпуклы относительно оси y, т. е. пересечение F прямой паралельной оси y есть либо точка, либо отрезок.

Определим как в [1] и [2] расстояние $r(f,g)$ между двумя функциями $f(x)$ и $g(x)$ следующим образом

$$r(f,g)=\max\,[\max_{X\in\bar f}\ \min_{Y\in\bar g}\,\|\,X-Y\,\|_0\,,\ \max_{X\in\bar g}\ \min_{Y\in\bar f}\,\|\,X-Y\,\|_0]\,,$$

где

$$\|\,X-Y\,\|_0=\|\,X(x_1,y_1)-Y(x_2,y_2)\,\|_0=\max\,[\,|\,x_1-x_2\,|\,,\,|\,y_1-y_2\,|\,]\,.$$

определим линейный оператор $k(f)$ следующим образом

$$\varphi(x)=k(f)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K(t)dt\,, \tag{1}$$

где

$$K(t)\in L_2\,,\ K(t)\geqq 0\,,\ K(t)=K(-t)\ \text{и}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}K(t)dt=1\,.$$

Имеет место [3] следующая теорема.

---

[1] София.

Теорема 1. *Если $f(x) \in BM\omega$ и $\varphi(x)$ определяется равенством* (1), *то для произвольное $\delta \geqq 0$*

$$r(f, \varphi) \leqq \max\left[\delta, \frac{1}{2}\,\omega(4\,\delta) + 4\,B\int\limits_{\delta}^{\pi} K(t)\,dt\right].$$

Рассмотрим далее тригонометрический полиом

$$P_{m,r}(t) = \frac{1}{m^{2r-1}}\left(\frac{\sin\dfrac{mt}{2}}{\sin t/2}\right)^{2r}$$

и обозначим через $c_{m,r}$ константу для которой

$$c_{m,r}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{m,r}(t)\,dt = 1\,. \tag{2}$$

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$c_{m,r} \leqq \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}, \tag{3}$$

где $c_{m,r}$ определяется равенством (2).

Доказательство.

$$\frac{1}{c_{m,r}} = 2\int\limits_{0}^{\pi} P_{m,r}(t)\,dt \geqq 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{m}} P_{m,r}(t)\,dt \geqq \frac{2}{m^{2r-1}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{m}}\left(\frac{\sin\dfrac{mt}{2}}{\sin t/2}\right)^{2r} dt \geqq$$

$$\geqq \frac{2}{m^{2r-1}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{m}}\left(\frac{2\,m}{\pi}\right)^{2r} dt = 2\,\pi\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2r},$$

т. е. имеет место (3).

Обозначим через $\varphi_{m,r}(x)$ тригонометрический полином порядка mr

$$\varphi_{m,r}(x) = \frac{c_{m,r}}{m^{2r-1}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin\dfrac{mt}{2}}{\sin t/2}\right)^{2r} dt\,, \tag{4}$$

где $f(x)$ функция из $BM\omega$.

Докажем следующую

Теорема 2. *Если $f(x) \in BM\omega$ и $\varphi_{m,r}(x)$ определяется равенством* (4), *то*

$$r(f, \varphi_{m,r}) \leqq \omega(C\,m^{-1+\frac{1}{2r}})\,,$$

когда $\omega(\delta) \geqq \delta$ *и*

$$r(f, \varphi_{m,r}) \leqq Cm^{-1+\frac{1}{2r}},$$

когда $\omega(\delta) \leqq \delta$, где $C = 2\,\pi^2 B$.

Доказательство. Согласно лемме 1,

$$c_{m,r}\int\limits_{\delta}^{\pi} P_{m,r}(t)\,dt \leqq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}}{2\pi m^{2r-1}}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dt}{(\sin t/2)^{2r}} \leqq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4r}}{2\pi m^{2r-1}}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{dt}{t^{2r}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4r}}{2\pi(2\,m-1)\,(m\delta)^{2r-1}}\,.$$

Тогда, в силу теоремы 1, для всех $\delta \geqq 0$ имеем

$$r(f, \varphi_{m,r}) \leqq \max\left[\delta, \frac{1}{2}\,\omega(4\,\delta) + \frac{2\,B\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4r}}{\pi(2\,m-1)\,(m\delta)^{2r-1}}\right],$$

и следовательно при

(5) $$\delta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2r}} m^{-1+\frac{1}{2r}}$$

получаем, что

(6) $$r(f, \varphi_{m,r}) \leqq \max\left[\delta, \frac{1}{2}\,\omega(4\,\delta) + \frac{1}{2}\,\delta\right],$$

где δ определяется равенством (5). Из (5) и (6) получаем непосредственно утверждение теоремы 2.

Определим m и r таким образом, чтобы $mr = n$ и полином (4) осуществлял возможно ближайшее приближение функции $f(x)$. Для этого нужно найти минимум функции

$$\psi(m,r) = m^{-1+\frac{1}{2r}},$$

при условии $mr = n$. Не трудно видеть, что минимум функции достается для

(7) $$m = \frac{2\,n}{\ln n}, \quad r = \frac{1}{2}\ln n\,.$$

Из теореме 2 получаем теорему.

Теорема 3. *Если* $f(x) \in BM\omega$ *и* $\varphi_{m,r}(x)$ *определяется равенством* (4), *то для* $\varphi_n(x) = \varphi_{m,r}(x)$ *при* $m = \left[\frac{2\,n}{\ln n}\right]$, $r = \frac{n}{m}$

$$r(f, \varphi_n) \leqq \omega\left(C_1\,\frac{\ln n}{n}\right),$$

если $\omega(\delta) \geqq \delta$, *и*

$$r(f, \varphi_n) \leqq C_1 \frac{\ln n}{n},$$

если $\omega(\delta) \leqq \delta$, *где* $C_1 = 4\, e\, \pi^2 B$.

Доказательство. Имея в виду теорему 2, нужно обратить только внимание на того, что $m^{-1+\frac{1}{2r}} \approx \left(\frac{2\,n}{\ln n}\right)^{-1+\frac{1}{\ln n}} \leqq 2\, e \frac{\ln n}{n}$.

Имея в виду результаты в [2], не трудно видеть, что для $\sigma(x) = \operatorname{sgn} \sin x$ имеем

$$r(\sigma, T_n) \geqq a \frac{\ln n}{n}$$

где $T_n(x)$ любой тригонометрический полином порядка n, а a констант независящая от n. В этом случае порядок приближения рассмотреного метода равняется порядка найлучшего приближения.

(Поступила: 11. июня, 1964 г.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Сендов, Бл. и Пенков, Б.: «ε-ентропия и ε-капацитет на пространство от непрекъснатите функции». *Изв. на Мат. инст. БАН*, **11** (1961) 27—50.
[2] Сендов, Бл.: «Върху най-доброто приближение с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорффовски тип.» *Год. Соф. унив., Физ.-мат. ф.* **55** (1960/61) 1—39.
[3] Сендов, Бл.: «Линейные методы приближения периодических функций относительно одной метрике хаусдорффовского типа» (в печати).

ÜBER EIN VERFAHREN DER APPROXIMATION PERIODISCHER FUNKTIONEN DURCH TRIGONOMETRISCHE POLYNOME

von

G. FREUD und Bl. SENDOV

Zusammenfassung

Die 2π-periodische Funktion $f \in L_2$ soll die Ungleichungen

$$|f(x+\delta) - f(x)| + |f(x-\delta) - f(x)| - 2\,|f(x+\delta) - f(x-\delta)| \leqq \omega(2\,\delta)$$

befriedigen, wobei $\omega(\delta)$ eine nichtabnehmende Funktion mit $\omega(0) = 0$ ist. Der Abstand zweier Funktionen sei durch den Ausdruck $r(f, g)$ definiert (vgl. Formeln im Text). Dabei ist $\bar{f}$ die kleinste ebene Punktmenge mit folgenden Eigenschaften:

a) es enthält den Graph von $f(x)$; b) es ist in der y-Richtung konvex; c) es ist abgeschlossen.

Es wird die Existenz einer Folge trigonometrischer Polynome $\varphi_n(x)$ für jedes f gezeigt, so dass die Ordnung von φ_n höchstens n beträgt und

$$r(f, \varphi_n) \leqq \max\left\{C_1 \frac{\log n}{n},\ \omega\left(C_1 \frac{\log n}{n}\right)\right\}$$

gültig ist.

ON THE CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS I

by

P. SZÜSZ and P. TURÁN

1. In a recent very interesting note[1] D. J. NEWMAN made the observation that the $|x|$-function, which plays an essential rôle in the theory of polynomial-approximation shows an unexpected behavior when turning to approximation by rational functions. While it is well-known that for suitable positive numerical c_1 and c_2 (and later c_3) and for all $n \geqq 1$ there exists a polynomial[2] $\pi_n^*(x)$ such that for $-1 \leqq x \leqq 1$

$$(1.1) \qquad \left| |x| - \pi_n^*(x) \right| \leqq \frac{c_1}{n}$$

but for all $\pi_n(x)$

$$(1.2) \qquad \max_{-1 \leqq x \leqq 1} \left| |x| - \pi_n(x) \right| \geqq \frac{c_2}{n},$$

he proved that for suitable $p_n^*(x)$, $q_n^*(x)$ for $n \geqq 4$, $-1 \leqq x \leqq 1$ the inequality

$$(1.3) \qquad \left| |x| - \frac{p_n^*(x)}{q_n^*(x)} \right| \leqq 3\, e^{-\sqrt{n}}$$

holds, which is much stronger than (1.1). He proved moreover that the order $e^{-\sqrt{n}}$ is „essentially" best possible. Whether or not this is only an isolated fact or there is a general theorem behind, he expresses no opinion; his words „— Now it is known that in some overall sense rational approximation is essentially not better than polynomial approximation . . ." reflect perhaps a more pessimistic than optimistic opinion about it. A more definit such opinion is formulated in a letter of Prof. NEWMAN; he shows here that for *all* $0 < a < 1$ the function

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_{m!}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{m!^a} \qquad T_k(\cos \vartheta) = \cos k\vartheta$$

(which belongs to $\mathrm{Lip}_a(-1, 1)$) cannot be approximated for all n's better than $O\left(\dfrac{1}{n^a \log n}\right)$ by a rational function of degree[3] n, uniformly in $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ say.

---

[1] „Rational approximation to $|x|$." *The Michigan Mathem. Journal* **11** (1964) 11—14.

[2] $\pi_n^*(x)$, $\pi_n(x)$, $p_n^*(x)$, $p_{n\nu}(x)$, $p_{n,\nu}(x, a)$, $q_n(x)$, $q_n^*(x)$ etc. stand for polynomials in x of degree $\leqq n$ (a will be a parameter).

A still more definit opinion is expressed in the paper of S. H. SHAPIRO[4] suggesting that ,, . . . if one wishes to approximate functions of class Lip_α then the nonlinear methods considered do not enable one to improve the order of magnitude of the approximation beyond what is possible by polynomial approximation having the same number of parameters". With respect to NEWMAN's result he remarks however that ,, . . . one might surmise that the main strength of rational approximation lies in the approximation of functions with special analytic properties". In what follows we are going to show that ,,not very remote" analytic properties suffice already; we are going to give a general *class* of functions (perhaps the first one in the literature) for which the approximation by rational functions of degree $\leq n$ is *essentially* better than by polynomials of degree n. This class $K(A)$ consists of functions $f(x)$ which are convex e.g. from above in $[-1, 1]$ and satisfy here the inequality

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leq A \quad \text{if} \quad -1 \leq x_1 < x_2 \leq 1\,. \tag{1.4}$$

Obviously this restriction (1.4) is rather a matter of convenience [inside of $(-1, 1)$ it is automatically satisfied]. Then we assert the

Theorem. *For the functions of the class $K(A)$ and for all $N \geq 1$ one can find a suitable rational function $\frac{u_N(x)}{v_N(x)}$ of degree N such that for $-1 \leq x \leq 1$ the inequality*

$$\left|f(x)-\frac{u_N(x)}{v_N(x)}\right| < c_3\,\frac{(1+A)\log^4 N}{N^2}$$

holds.

(1,1) — (1.2) shows that for polynomial approximation we have in general only the order $\frac{1}{N}$. To which extent the quantity $\frac{\log^4 N}{N^2}$ on the right is best possible, we do not know at present; possibly the log-factor can be dropped. As Prof. NEWMAN remarked in his letter, the function

$$f(x) = -Bx^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_{m!}\left(\frac{x}{2}\right)}{m^2\, m!^2}$$

with a suitably large positive constant B belongs to the class $K(A)$ and its approximability by a rational function of degree n cannot surpass $O\left(\frac{1}{n^2 \log n}\right)$. Hence our upper bound is ,,not far" from being best-possible.

The theorem could have been announced for the function-class $K_1(A)$ whose members satisfy (1.4) and are indefinite integrals of functions of bounded variation. Representing namely these functions as difference of two mono-

---

[3] A rational function $\frac{p(x)}{q(x)}$ we call of n^{th} degree, if $q(x)$ and $p(x)$ are polynomials with degree $\leq$ n.

[4] ,,Some negative theorems of approximation theory." *Mich. Math. Journ* **11.** (1964) 211- 217.

tonic functions it means that $f(x)$ is the difference of two convex functions and the theorem applies at once.

The point of the theorem is of course the uniformity of the approximation; replacing it by L_1-metric the corresponding theorem has been proved by G. FREUD[5] even for polynomial-approximation and without the log-factor. FREUD extended his theorem to the class, whose elements are k^{th} integral of functions of bounded variation; an analogous extension of our theorem is also possible and will be given in the second paper. We shall return to study the connection between approximability by rational functions of N^{th} degree and structural properties of continuous functions. Generally speaking the approximation by rational functions seems to be advantageous over the approximation by polynomials if the function is „nasty only locally on a thin set".

This new branch of the approximation-theory seems to have a significance also for the numerical analysis, since the computational problems with polynomials are essentially identical with those of rational functions.

2. Now we turn to the proof of our theorem. Let $-1 < a < 1$ and we replace x by $\dfrac{t-a}{1-at}$ in NEWMAN's inequality (1.2). This gives for $n \geqq 4$, $-1 \leqq t \leqq 1$ the inequality

$$\left|\left|\frac{t-a}{1-at}\right| - \frac{p_n^*\left(\dfrac{t-a}{1-at}\right)}{q_n^*\left(\dfrac{t-a}{1-at}\right)}\right| \leqq 3\, e^{-\sqrt{n}},$$

which we prefer to write in the form

$$\left|\left|\frac{t-a}{1-at}\right| - 1 - \frac{p_{n,1}(t,\, a)}{q_{n,1}(t,\, a)}\right| \leqq 3\, e^{-\sqrt{n}}.$$

Since for our t's $1 - at \geqq 0$, this can be written in the form

$$\left|(1-at) - |\, t-a\,| - \frac{p_{n+1,2}(t,\, a)}{q_{n,1}(t,\, a)}\right| \leqq 6\, e^{-\sqrt{n}}. \tag{2.1}$$

Putting

$$h(t,\, a) \overset{\text{def}}{=} (1-at) - |\, t-a\,| \tag{2.2}$$

$h(t,\, a)$ represents a „roof" consisting of two straight segments with

$$\begin{gathered} h(1,\, a) = h(-1,\, a) = 0 \\ h(a,\, a) = 1 - a^2 \end{gathered} \tag{2.3}$$

and (2.1) takes the form

$$\begin{gathered} \left|h(t,\, a) - \frac{p_{n+1,2}(t,\, a)}{q_{n,1}(t,\, a)}\right| \leqq 6\, e^{-\sqrt{n}}, \\ -1 \leqq t \leqq +1\,. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Here we had for the parameter a the restriction $-1 < a < 1$.

[5] »Über einseitige Approximation durch Polynome I.« *Acta Litt. ac Scient. Szeged* **16** (1955) 12—28.

3. Let us consider now our $f(t)$ and let $f_1(t)$ be defined by

$$f_1(t) = f(t) - f(1) - \frac{f(1) - f(-1)}{2}(t-1). \tag{3.1}$$

Obviously $f_1(t)$ is again nonnegative, convex from above in $[-1, 1]$ and moreover

$$f_1(1) = f_1(-1) = 0. \tag{3.2}$$

Further we have for $-1 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$

$$\left|\frac{f_1(t_2) - f_1(t_1)}{t_2 - t_1}\right| = \left|\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{f(1) - f(-1)}{2}\right| \leqq 2A, \tag{3.3}$$

from (1.3). Let now $m \geqq 2$ and

$$a_0 = 1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{m-1} > -1 = a_m, \tag{3.4}$$

and we consider the function $g_m(t)$ which is represented by an m-gon with the vertices at the points

$$(a_\nu, f_1(a_\nu)) \qquad \nu = 0, 1, \ldots, m. \tag{3.5}$$

This is obviously nonnegative and convex from above in $[-1, 1]$ for which owing to (3.3) the inequality

$$\frac{g_m(t_2) - g_m(t_1)}{t_2 - t_1} \leqq 2A \tag{3.6}$$

holds, if only

$$-1 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1.$$

Owing to a well-known theorem of BLASCHKE—PICK[6] $g_m(t)$ can be represented in the form

$$f_1(t) = \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu h(t, a_\nu) \tag{3.7}$$

with $\lambda_\nu > 0$. Then using (2.4) we get for $-1 \leqq t \leqq 1$ the inequality

$$\left| g_m(t) - \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu \frac{p_{n+1,2}(t, a_\nu)}{q_{n,1}(t, a_\nu)} \right| = \tag{3.8}$$

$$= \left| \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu \left(h(t, a_\nu) - \frac{p_{n+1,2}(t, a_\nu)}{q_{n,1}(t, a_\nu)} \right) \right| \leqq 6\, e^{-\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu.$$

In order to estimate the remaining sum we replace t in (3.7) by a_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m-1$). This gives from (2.3) and (3.5)

$$f_1(a_\mu) = \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu h(a_\mu, a_\nu) > \lambda_\mu(1 - a_\mu^2).$$

[6] »Distanzabschätzungen in Funktionenräumen II.« *Math. Ann.* Bd **77** (1916) p. 277—300.

If e.g. $a_\mu \geqq 0$, this gives from (3.3)

$$\lambda_\mu < \frac{f_1(a_\mu)}{1-a_\mu^2} = \frac{f_1(a_\mu)-f_1(1)}{1-a_\mu}\,\frac{1}{1+a_\mu} = \left|\frac{f_1(a_\mu)-f(1)}{1-a_\mu}\right|\frac{1}{1+a_\mu} \leq 2A$$

and analogously for $a_\mu < 0$. Hence from (3.8)

$$\left| g_m(t) - \sum_{\nu=1}^{m-1} \lambda_\nu \frac{p_{n+1,2}(t, a_\nu)}{q_{n,1}(t, a_\nu)} \right| \leq 12\, A m\, e^{-\sqrt{n}}$$

or rather

$$\left| g_m(t) - \frac{p_{(m-1)n+1}(t)}{q_{(m-1)n}(t)} \right| \leqq 12\, A m e^{-\sqrt{n}} \tag{3.9}$$

for $-1 \leqq t \leqq 1$.

4. In order to estimate $|f_1(t) - g_m(t)|$ for $[-1, 1]$ we shall need the following

Lemma. *For the above-defined $f_1(t)$-function and $m \geqq 4$ for a suitable $g_{2m}(t) = g^*_{2m}(t)$ we have for $-1 \leqq t \leqq +1$ the inequality*

$$|f_1(t) - g^*_{2m}(t)| \leqq \frac{(1+2A)4\pi}{m^2}.$$

For the proof we remark first that $f_1(t)$ is approximable by a $g_s(t)$-polygon, convex from above and then ,,rounding off" the corners and adjusting slightly the sides we get a function $k(t)$ nonnegative and convex from above, everywhere derivable with strictly decreasing derivative, satisfying in $-1 \leqq t \leqq +1$ the inequality

$$|f_1(t) - k(t)| \leqq \frac{1}{2m^2} \tag{4.1}$$

moreover we have

$$|k'(t)| \leqq 2A. \tag{4.2}$$

Drawing the tangents of $y = k(t)$ which have with the positive t-axis an angle of the form $\nu\frac{2\pi}{m}$ $(\nu = 0, \pm 1, \ldots)$ they form an open polygonal line, convex from above, consisting of $l < m$ sides. Considering the projections P_ν of the tangential points on the t-axis with addition of at most m further equidistant P-points we can attain that the distance of any two consecutive P's (including the points ± 1) is

$$\leqq \frac{2}{m}. \tag{4.3}$$

Drawing the tangents also in the Q-points, corresponding to the new P-points, we obtain an r-gon with $r \leqq 2m$, tangential to the graph of $y = k(t)$ with the property (4.3); this will be $g^*_{2m}(t)$. Moreover owing to the convexity of $k(t)$ the angle of any two consecutive sides is $\geqq \pi - \frac{2\pi}{m}$. We enumerate the new and old tangential points in decreasing order again by $Q_1, \ldots, Q_r$, their projections by $P_1, \ldots, P_r$; in addition, if necessary, take also the points $Q_0(1, k(1))$

and $Q_{r+1}(-1, k(-1))$ and denote the point of intersection of the tangents in Q_ν and $Q_{\nu+1}$ by R_ν. Then the triangles Q_ν, $Q_{\nu+1} R_\nu$ contain the whole graph of $y = k(t)$ and if the perpendicular from R_ν to the t-axis cuts $Q_\nu Q_{\nu+1}$ in the point S_ν then we have

$$(4.4) \qquad | \max_{-1\leq t\leq 1} g_{2m}^*(t) - k(t) | \leq \max_\nu \overline{R_\nu S_\nu}\,.$$

Denoting the inclination of $Q_\nu Q_{\nu+1}$ by φ, so that from (4.2)

$$(4.5) \qquad | \operatorname{tg} \varphi | \leq 2\,A\,,$$

the angle $Q_\nu R_\nu Q_{\nu+1}$ by $(\pi - \beta)$, where from the construction

$$(4.6) \qquad 0 < \beta \leq \frac{2\,\pi}{m},$$

and the angle $Q_\nu Q_{\nu+1} R_\nu$ by α, so that

$$(4.7) \qquad 0 < \alpha < \beta\,,$$

simple trigonometry gives

$$\overline{R_\nu S_\nu} = \overline{P_\nu P_{\nu+1}} \frac{\sin(\beta - \alpha)\{\sin(\alpha + \varphi) - \sin\varphi\}}{\cos\varphi \sin\beta}\,.$$

From this one gets easily

$$\overline{R_\nu S_\nu} < \frac{2}{m} \cdot \frac{\beta}{\cos\varphi} < \frac{4\,\pi}{m^2} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \leq \frac{4\,\pi}{m^2}\sqrt{1 + 4A^2} \leq \frac{4\,\pi}{m^2}(1 + 2\,A)\,.$$

This, (4.4) and (4.1) prove the lemma.

5. Now we can complete the proof of our theorem. Applying (3.9) with $2\,m$ instead of m and also the lemma we get for $-1 \leq t \leq 1$

$$\left| f_1(t) - \frac{p_{(2m-1)n+1}(t)}{q_{(2m-1)n}(t)} \right| \leq 24\,mAe^{-\sqrt{n}} + \frac{(1 + 2\,A)\,4\pi}{m^2}\,.$$

Using (3.1) we get for $-1 \leq t \leq +1$ the inequality

$$(5.1) \qquad \left| f(t) - \frac{p_{(2m-1)n+1}(t)}{q_{(2m-1)n}(t)} \right| \leq 24\,Ame^{-\sqrt{n}} + \frac{(1 + 2\,A)\,4\pi}{m^2}\,.$$

So far m and n were arbitrary integers ≥ 4. Now we want approximate $f(t)$ by rational functions of degree $\leq N$. We choose for $N \geq 100$

$$(5.2) \qquad m = \left[\frac{N}{20\log^2 N}\right]$$

$$n = [9 \log^2 N]\,.$$

Then we have

$$(2m-1)n+1<2mn<N\,,$$

further

$$me^{-\sqrt{n}}<\frac{1}{N^2\log^2 N}$$

and

$$\frac{1}{m^2}<\frac{10^4\log^4 N}{N^2}\,.$$

This and (5.1) prove our theorem.

(Received July 16, 1964)

О КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ I

P. SZÜSZ и P. TURÁN

Резюме

Пусть $\pi_n(x)$ многочлен степени $n, r_n(x)=\dfrac{\pi_n^*(x)}{\pi_n^{**}(x)}$ рациональная функция степени n, $E_n(f)$ соотв. $R_n(f)$ наилучшее приближение, в смысле Чебышева, непрерывной функции $f(x)$ в $[-1,1]$, с помощью многочленов степени n, соотв. рациональными функциями степени n, и если C какой-нибудь подкласс непрерывных функций, то

$$\sup_{f\in C} E_n(f)=E_n(C)$$

$$\sup_{f\in C} R_n(f)=R_n(C)\,.$$

Распространено, что $R_n(C)$ не может быть «существенно» лучше, чем $E_{2n+1}(C)$, количественной формой этого утверждения является тот факт, сообщенный Newman -ом, что если $0<\alpha<1$, то с одной стороны

$$E_n(\mathrm{Lip}\ \alpha)<\frac{c_1(\alpha)}{n^\alpha} \qquad \text{(С. Бернштейн)}$$

с другой стороны

$$R_n(\mathrm{Lip}\ \alpha)>\frac{c_2(\alpha)}{n^\alpha\log n}$$

В первой заметке наших сообщений мы покажем, что если K является в $[-1,+1]$ выпуклым и ε любое положительное число, тогда в $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ для $f\in K$

$$R_n(f)<\frac{c_3(\varepsilon,f)\log^4 n}{n^2}$$

когда для подходящего $f^* \in K$ в $[-1/_2, 1/_2]$

$$R_n(f^*) > \frac{1}{n^2 \log^2 n}.$$

Для ориентации заметим, что $|x| \in K$ и в $[-1/_2, 1/_2]$

$$E_n(|x|) > \frac{c_4}{n}$$

по С. Бернштейну, значит в $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ для класса K приближение с помощью рациональных функций в *порядке* лучше чем с многочленами. В дальнейших статьях мы показываем подобное явление на других известных классах функций, у некоторых классов приближение намного лучше, чем у K.

CONVERGENCE ET REPRÉSENTATION CONFORME

par

László ALPÁR

§ 1. Introduction

Soit ζ_0 $(0 < | \zeta_0 | < 1)$ un point fixe, τ_0 un angle constant,

$$h_1(z) = e^{i\tau_0} \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \tag{1.1}$$

une transformation homographique applicant le cercle unité sur lui-même, et

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1.2}$$

une fonction holomorphe pour $| z | < 1$. La fonction

$$f_1[h_1(z)] = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu \tag{1.3}$$

est alors également holomorphe dans le cercle $| z | < 1$. Supposons de plus qu'il existe un point z', $| z' | = 1$, où $f_1(z)$ est encore définie et la série (1.2) converge, et posons $z' = h_1(z'')$, donc $| z'' | = 1$. Il vient alors de (1.3) que $f_1(z') = f_2(z'')$. Mais il est une question à examiner si la convergence de la série (1.2) en z' entraîne-t-elle la convergence de la série (1.3) en z''? Ce problème a été soulevé et résolu par P. TURÁN [10] qui a démontré l'existence des fonctions $f_1(z)$ telles que, malgré la convergence de la série (1.2) en z', la série (1.3) est divergente en z''.

En généralisant le résultat de TURÁN nous avons montré [1] que la sommabilité (C, k) $(k \geq 0)$ de la série (1.2) en z' assure la sommabilité $(C, k + 1/2)$ de la série (1.3) en z'', mais qu'elle n'implique pas la sommabilité $(C, k + \delta)$ de (1.3) en z'' si $0 \leq \delta < 1/2$. Nous avons établi ensuite [2] que pour $| z | = 1$ la convergence absolue de la série (1.2) entraîne la convergence uniforme, mais non la convergence absolue de la série (1.3) sur la circonférence $| z | = 1$.

Plus récemment nous avons étendu ces investigations à certaines transformations des séries de Faber [3]. Une série de Faber constitue une sorte de représentation d'une fonction analytique dans un domaine différent d'un cercle dont la frontière est formée d'un seul arc analytique régulier. La circonstance que le domaine de convergence d'une série de Faber n'est pas un cercle soulève la question: comment faut-il choisir la transformation à employer, car $h_1(z)$ utilisée pour les séries de Taylor a deux propriétés particulières qu'on ne peut pas simultanément conserver. $h_1(z)$ est d'une part *une fonction homographique qui ne se réduit pas à une rotation*, d'autre part *elle applique sur lui-même le cercle unité*, c'est-à-dire *le domaine de convergence des séries de Taylor envisagées*. Si, dans le cas des séries de Faber, on fait la transformation par une fonction homographique, elle n'applique pas en générale le domaine en question sur lui-même; par contre si l'on effectue une représentation conforme du domaine considéré sur lui-même, la fonction qui réalise cette transformation n'est pas en générale homographique. Nous avons examiné toutes les deux éventualités.

Soient C_1 une courbe fermée simple dans le plan des z_1 formée d'un seul arc analytique régulier, $F_1(z_1)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de C_1, et

$$z_1 = h(z_2) = \frac{pz_2 + q}{z_2 - z_2^*} \qquad (pz_2^* + q \neq 0)$$

une transformation homographique qui applique l'intérieur de C_1 sur celui d'une courbe C_2 du plan des z_2 telle que z_2^* soit à l'extérieur de C_2. La courbe C_2 est alors de la même nature que C_1 et la fonction

$$F_1[h(z_2)] = F_2(z_2)$$

est holomorphe à l'intérieur de C_2. $F_1(z_1)$ resp. $F_2(z_2)$ est ainsi développable en série de Faber à l'intérieur de C_1 resp. C_2, soit

$$F_1(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu^{(1)}(z_1)\,, \tag{1.4}$$

$$F_2(z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu^{(2)}(z_2)\,, \tag{1.5}$$

où $\Phi_\nu^{(j)}(z_j)$ $(j = 1, 2)$ désigne le ν-ième polynome de Faber associé à C_j. Soient de plus $\tilde{z}_1 \in C_1$, $\tilde{z}_2 \in C_2$ deux points liés par l'égalité $\tilde{z}_1 = h(\tilde{z}_2)$. Il est établi qu'il existe de fonctions $F_1(z_1)$ telles que les phénomènes constatés au cas des séries de Taylor (1.2) et (1.3) aient lieu sans aucun changement pour les séries de Faber (1.4) et (1.5), c'est-à-dire la sommabilité (C, k) de la série (1.4) en $\tilde{z}_1$, entraîne la sommabilité $(C, k + {}^1\!/_2)$ de la série (1.5) en $\tilde{z}_2$, mais non la sommabilité $(C, k + \delta)$ de cette série, et la convergence absolue pour $z_1 \in C_1$ de la série (1.4) implique pour $z_2 \in C_2$ la convergence uniforme, mais non la convergence absolue de la série (1.5). En outre *les théorèmes respectifs peuvent être déduits directement de leurs analogues valables pour les séries de Taylor* ([3], théorèmes 1—5).

Considérons ensuite une courbe C du plan des z différente d'une circonférence et ayant les mêmes propriétés que C_1. Soit $k(z)$ une fonction faisant la transformation conforme biunivoque et non identique de l'intérieur de C sur lui-même, et admettons que $k(z)$ n'est pas homographique. Toutefois la fonction $F_1[k(z)] = F_2(z)$ est holomorphe et développable en série de Faber à l'intérieur de C. Or, dans la note [3] nous avons démontré seulement que *le comportement de la série de Faber de $F_2(z)$ sur la courbe C ne résulte pas directement des propositions homologues établies pour les séries de Taylor* ([3], théorème 6). On ne peut donc pas exclure à priori l'existence des courbes particulières pour lesquelles certains des théorèmes invoqués ne subsistent plus.

Dans cet ouvrage nous allons donner une réponse partielle aux questions restées ouvertes dans la note [3]. Sans pouvoir résoudre tous les problèmes mentionnés plus haut, nous sommes parvenus à généraliser la proposition initiale de TURÁN, à condition que $k(z)$ ne soit pas équivalente à une rotation. Le sens de cette notion sera précisé dans le § 2.

Théorème. — *La convergence des séries de Faber en un point de leur courbe de convergence n'est pas un invariant conforme. Plus exactement, soient* C *une courbe fermée simple formée d'un seul arc analytique régulier,* $k(z)$ *une application conforme biunivoque de l'intérieur de* C *sur lui-même, non équivalente à une rotation, et* $z' \in C$, $z'' \in C$ *deux points tels que* $z' = k(z'')$, *il existe alors de fonctions*

$$F_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu(z) \tag{1.6}$$

holomorphes à l'intérieur de C, *dont les séries de Faber convergent en* z' *et, malgré cela, les séries de Faber des fonctions*

$$F_1[k(z)] = F_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu(z)\ , \tag{1.7}$$

holomorphes également à l'intérieur de C, *sont divergentes en* z''.

Cette proposition est susceptible de la généralisation ci-après:

Corollaire. — *Étant données deux courbes* C_1 *et* C_2 *fermées simples chacune formée d'un seul arc analytique régulier, une transformation* $z_1 = k^*(z_2)$ *non équivalente à une rotation, faisant la représentation conforme biunivoque de l'intérieur de* C_1 *sur celui de* C_2, *et* $\tilde{z}_1 \in C_1$, $\tilde{z}_2 \in C_2$ *deux points tels que* $\tilde{z}_1 = k^*(\tilde{z}_2)$, *il existe alors de fonctions*

$$F_1(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu^{(1)}(z_1)$$

holomorphes à l'intérieur de C_1, *dont les séries de Faber convergent en* $\tilde{z}_1$ *et, malgré cela, les séries de Faber des fonctions*

$$F_1[k^*(z_2)] = F_2(z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu^{(2)}(z_2)$$

holomorphes à l'intérieur de C_2 *divergent en* $\tilde{z}_2$.

* * *

On désignera par c, c_i $(i = 0, 1, \ldots)$ des constantes numériques positives.

§ 2. Remarques sur les polynomes et les séries de Faber

Nous allons exposer sans démonstration certaines propriétés des polynomes et des séries de Faber que nous utiliserons par la suite (cf. [4], [5], [6], [7], [9], [11], [12]).

Soit C une courbe fermée simple dans le plan des z formée d'un seul arc analytique régulier avec l'intérieur $I(C)$, l'extérieur $E(C)$. $\bar{I}(C)$ et $\bar{E}(C)$ désignent les domaines correspondants fermés.

Il existe une fonction, et une seul $\varphi(z)$ qui, pour des $|z|$ assez élevées, s'écrit sous la forme

$$w = \varphi(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \tag{2.1}$$

et qui fait la représentation conforme biunivoque de $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{C})$ sur $\overline{\mathrm{E}}(\mathsf{K}_R)$, où l'on note par K_R la circonférence $|w| = R$. Les quantités R, a_0, $a_1, \dots$ sont déterminées univoquement par les conditions imposées à $\varphi(z)$.

Les images des circonférences $\mathsf{K}_\varrho : |w| = \varrho$ par $\varphi(z)$ sont les courbes de niveaux $\mathsf{C}_\varrho : |\varphi(z)| = \varrho$; nous écrirons aussi C_R au lieu de C.

Désignons par

$$z = \psi(w) = w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \frac{\beta_2}{w^2} + \dots \tag{2.2}$$

la fonction inverse de $\varphi(z)$. La série (2.2) est convergente pour $|w| > r$, avec un $r < R$.

L'anneau circulaire limité par K_R et K_r et le domaine annulaire limité par C_R et C_r jouent un rôle important dans la théorie des séries de Faber.

Si $\varphi(z)$ est représentée par la série (2.1), $\Phi_n(z)$, le n-ième polynome de Faber associé à C_R, est la partie polynomiale de l'expression

$$[\varphi(z)]^n = \Phi_n(z) + R_n(z)\,, \tag{2.3}$$

$R_n(z)$ ne contenant que les puissances négatives de z. On démontre aussi que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)^n}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases}\Phi_n(z) & \text{pour } n \geqq 0\\ 0 & \text{pour } n < 0\end{cases} \quad z \in \mathrm{I}(\Gamma)\,, \tag{2.4}$$

où Γ est une courbe fermée simple telle que $\mathrm{I}(\mathsf{C}_r) \subset \mathrm{I}(\Gamma)$. On voit de (2.3) que $\Phi_0(z) \equiv 1$. L'expression (2.4) peut être interprétée comme celle qui donne $\Phi_n(z)$ pour chaque n et $\Phi_n(z) \equiv 0$ si $n < 0$.

La fonction génératrice des $\Phi_n(z)$ est donnée par la formule

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}}\,. \tag{2.5}$$

Toute fonction $F(z)$ holomorphe dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_R)$ peut être représentée par sa série de Faber unique:

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \Phi_\nu(z) \tag{2.6}$$

qui est uniformément et absolument convergente sur chaque sous-ensemble fermé de $\mathrm{I}(\mathsf{C}_R)$. Les coefficients a_n s'expriment par l'intégrale:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_\varrho} \frac{F[\psi(w)]}{w^{n+1}}\,dw\,, \quad r < \varrho < R\,, \quad n \geqq 0\,. \tag{2.7}$$

Si $F(z)$ a de singularités sur C_R, on dit que C_R est la courbe de convergence de la série (2.6).

Inversement, étant donnée une suite de nombres $\{a_n\}$ telle que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mid a_n \mid^{1/n} \leqq \frac{1}{R}, \tag{2.8}$$

alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$ est convergente dans $\mathrm{I}(C_R)$ où elle représente une fonction holomorphe; cette série est divergente dans $\mathrm{E}(C_R)$.

Il subsiste de plus la relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_n(z)}{\varphi(z)^n} = 1 \tag{2.9}$$

uniformément sur chaque sous-ensemble fermée de $\mathrm{E}(C_r)$. Plus exactement, soient $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, $\varrho \geqq r + \varepsilon$, $z \in C_\varrho$, on a alors

$$\left| \frac{\Phi_n(z)}{\varphi(z)^n} - 1 \right| \leqq c_0 \left(\frac{r}{\varrho} \right)^n \leqq c_0 \left(\frac{r}{r+\varepsilon} \right)^n. \tag{2.10}$$

Il en résulte que

$$\lambda \mid \varphi(z) \mid^n < \mid \Phi_n(z) \mid < \mu \mid \varphi(z) \mid^n \tag{2.11}$$

sur chaque sous-ensemble fermée de $\mathrm{E}(C_r)$ où $\lambda > 0$, $\mu > 0$ sont des constantes indépendantes de z.

Il découle en outre de (2.9) que, z étant fixé, la série (2.5) est convergente pour $\mid w \mid > \mid \varphi(z) \mid$.

* * *

Nous sommes maintenant en mesure de définir le sens de la phrase que la transformation $k(z)$ n'est pas équivalente à une rotation. Considérons les points $z' \in C_R$, $z'' \in C_R$ satisfaisant à l'égalité $z' = k(z'')$ et posons $w' = \varphi(z')$, $w'' = \varphi(z'')$, avec $\mid w' \mid = \mid w'' \mid = R$. Si $w'/w'' = e^{i\omega_0}$ reste constante lorsque z' et z'' parcourent C_R, nous disons que $k(z)$ est équivalente à une rotation; si par contre w'/w'' varie avec z' et z'', nous disons que $k(z)$ n'est pas équivalente à une rotation. Cette notion s'étend sans peine au cas où la transformation n'applique pas le domaine considéré sur lui-même.

§ 3. Démonstration du théorème

Nous admettons dans ce qui suit que $k(z)$ a un point double $z_0 = k(z_0)$ sur C_R, ce qui assure que $k(z)$ ne soit pas équivalente à une rotation. Soit $z' = z'' = z_0$. Ces conditions ne restreignent pas la généralité, mais permettent certaines simplifications des calculs. Dès lors $F_1(z_0) = F_2(z_0)$ et il est à prouver que malgré la convergence de la série (1.6) en z_0, la série (1.7) peut être divergente en z_0.

On a, en vertu de (2.7), (1.6) et (1.7),

$$\begin{aligned} a_n^{(2)} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_\varrho} F_1(k[\psi(w)]) \frac{dw}{w^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \int\limits_{K_\varrho} \Phi_\nu(k[\psi(w)]) \frac{dw}{w^{n+1}}, \qquad r < \varrho < R,\ n \geqq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Posons

$$\Phi_\nu(k[\psi(w)]) = \Phi_\nu(k)\,, \quad \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu^{(1)}\,\Phi_\mu(z_0) = A_\nu^{(1)}(z_0)\,. \tag{3.2}$$

Comme $|\,\varphi(z_0)\,| = R$, on tire de (2.11) que $\Phi_\nu(z_0) \neq 0$. On peut donc écrire, vu (3.1) et (3.2),

$$\begin{aligned} A_m^{(2)}(z_0) &= \sum_{n=0}^{m} a_n^{(2)}\,\Phi_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)}\,\Phi_\nu(z_0)\int_{K_\varrho}\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)}\sum_{n=0}^{m}\frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}}\,dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(1)}(z_0)\int_{K_\varrho}\left\{\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)} - \frac{\Phi_{\nu+1}(k)}{\Phi_{\nu+1}(z_0)}\right\}\sum_{n=0}^{m}\frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}}\,dw\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

c'est que

$$A_m^{(2)}(z_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{m\nu}\,A_\nu^{(1)}(z_0)\,, \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{aligned} c_{m\nu} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varrho}\left\{\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)} - \frac{\Phi_{\nu+1}(k)}{\Phi_{\nu+1}(z_0)}\right\}\sum_{n=0}^{m}\frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}}\,dw = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varrho} D_\nu(w)\sum_{n=0}^{m}\frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}}\,dw\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

La suite $\{A_\nu^{(1)}(z_0)\}$ étant convergente, le théorème est établi, selon (3.4), si l'on vérifie que la matrice $[c_{m\nu}]$ n'est pas régulière, et si l'on montre que $\{u_\nu\}$ étant une suite convergente qui se transforme par $[c_{m\nu}]$ en une suite divergente $\{v_m\}$, alors, en posant $A_\nu^{(1)}(z_0) = u_\nu$, $A_m^{(2)}(z_0) = v_m$, on peut déterminer les suites des coefficients $\{a_\nu^{(1)}\}$, $\{a_m^{(2)}\}$, dont chacune satisfait à la relation (2.8) tels que $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)}\Phi_\nu(z) = F_1(z)$ et $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)}\,\Phi_\nu(z) = F_2(z)$ soient des fonctions holomorphes dans $\mathrm{I}(C_R)$.

Nous établirons en premier lieu que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}|\,c_{m\nu}\,| = \infty\,. \tag{3.6}$$

Dans ce but nous allons transformer l'expression (3.5) de $c_{m\nu}$, introduire les quantités $\gamma_{m\nu}^*$, $\gamma_{m\nu}$ et démontrer d'une part que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{\nu=0}^{\infty}(\,|\,c_{m\nu}\,| - |\,\gamma_{m\nu}\,|\,)\right| &\leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}|\,c_{m\nu} - \gamma_{m\nu}\,| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}|\,c_{m\nu} - \gamma_{m\nu}^*\,| + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\infty}|\,\gamma_{m\nu}^* - \gamma_{m\nu}\,| = o(1) \quad (m\to\infty), \end{aligned} \tag{3.7}$$

d'autre part que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}|\,\gamma_{m\nu}\,| = \infty\,. \tag{3.8}$$

1° C_R étant formée d'un seul arc analytique régulier, $k(z)$ est prolongeable au delà de C_R dans un domaine partiel de $\mathrm{E}(\mathsf{C}_R)$. Par conséquent si $R_0 > R$ désigne le plus grand nombre pour lequel $k(z)$ est encore holomorphe dans $\mathrm{I}(\mathsf{C}_{R_0})$, on peut remplacer dans (3.5) le contour d'intégration K_ϱ par $\mathsf{K}_{\varrho'}$, avec $R < \varrho' < R_0$.

De l'autre côté $|\varphi(z_0)| = R < \varrho'$, donc, vu (2.9), la série (2.5) est convergente pour $|w| = \varrho'$, et l'on a

$$I_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}}\,dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w)\frac{\psi'(w)\,dw}{\psi(w)-z_0},$$

d'où, avec le changement de variable $\zeta = \psi(w)$, et en tenant compte du fait que $\Phi_\nu[k(\zeta)]$ est holomorphe dans $\overline{\mathrm{I}}(\mathsf{C}_{\varrho'})$,

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{C}_{\varrho'}}\left\{\frac{\Phi_{\nu+1}[k(\zeta)]}{\Phi_{\nu+1}(z_0)} - \frac{\Phi_\nu[k(\zeta)]}{\Phi_\nu(z_0)}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 0. \tag{3.9}$$

En effet, $k(z_0) = z_0$, donc $\Phi_{\nu+1}[k(z_0)]/\Phi_{\nu+1}(z_0) - \Phi_\nu[k(z_0)]/\Phi_\nu(z_0) = 0$. Nous obtenons ainsi de (3.5) et (3.9)

$$c_{m\nu} - I_\nu = c_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\Phi_n(z_0)}{w^{n+1}}\,dw.$$

2° Posons maintenant

$$\gamma^*_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\varphi(z_0)^n}{w^{n+1}}\,dw = \frac{\varphi(z_0)^{m+1}}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho}}\frac{D_\nu(w)\,dw}{w^{m+1}[w-\varphi(z_0)]}, \tag{3.10}$$

et formons la différence

$$c_{m\nu} - \gamma^*_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathsf{K}_{\varrho'}} D_\nu(w)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\Phi_n(z_0) - \varphi(z_0)^n}{w^{n+1}}\,dw. \tag{3.11}$$

On a, d'après (2.10),

$$|\Phi_n(z_0) - \varphi(z_0)^n| \leqq c_0\left(\frac{r}{R}\right)^n |\varphi(z_0)|^n = c_0 r^n. \tag{3.12}$$

En changeant donc dans (3.11) $\mathsf{K}_{\varrho'}$ en K_ϱ $(r < \varrho < R)$, la somme qui y figure reste uniformément convergente étant majorée par la série

$$\frac{c_0}{\varrho}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left|\frac{\varphi(z_0)}{w}\right|^n = \frac{c_0}{\varrho}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n = \frac{c_1}{\varrho}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1}. \tag{3.13}$$

L'évaluation de $|D_\nu(w)|$ se fait maintenant au moyen de (2.11). Comme $k(z)$ applique C_R sur elle-même et φ, ψ, k sont univalentes, on a, si $R - \varrho$ est suffisamment petit,

$$R > \max_{|w|=\varrho} |\varphi(k[\psi(w)])| = \varrho_0 > r \tag{3.14}$$

et, par suite,

$$(3.15)\qquad |\,D_\nu(w)\,| \leqq \left|\frac{\Phi_{\nu+1}(k)}{\Phi_{\nu+1}(z_0)}\right| + \left|\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)}\right| \leqq \frac{\mu}{\lambda}\left|\frac{\varphi(k)}{\varphi(z_0)}\right|^\nu \left(\left|\frac{\varphi(k)}{\varphi(z_0)}\right| + 1\right) \leqq 2\,\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\varrho_0}{R}\right)^\nu,$$

avec $\varphi(k) = \varphi\big(k[\psi(w)]\big)$. On obtient ainsi de (3.11), (3.12), (3.13) et (3.15)

$$(3.16)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |\,c_{m\nu} - \gamma^*_{m\nu}\,| \leqq 2\,c_1\frac{\mu}{\lambda}\,\frac{1}{1-\dfrac{\varrho_0}{R}}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1} = c_2\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{m+1}.$$

3° Soit ensuite

$$(3.17)\qquad \begin{aligned}\gamma_{m,\nu} &= \frac{\varphi(z_0)^{m+1}}{2\,\pi\,i}\int\limits_{K_{\varrho'}}\left(\frac{\varphi(k)^{\nu+1}}{\varphi(z_0)^{\nu+1}} - \frac{\varphi(k)^\nu}{\varphi(z_0)^\nu}\right)\frac{dw}{w^{m+1}[w-\varphi(z_0)]} = \\ &= \frac{\varphi(z_0)^{m+1}}{2\pi i}\int\limits_{K_{\varrho'}}\frac{d_\nu(w)\,dw}{w^{m+1}[w-\varphi(z_0)]}\end{aligned}$$

où $\psi(w_0) = z_0$ et $\varphi\big(k[\psi(w_0)]\big) = \varphi[k(z_0)] = \varphi(z_0)$. Il suit alors de la seconde expression de $\gamma^*_{m\nu}$ [cf. (3.10)] et de (3.17)

$$(3.18)\qquad \gamma^*_{m\nu} - \gamma_{m\nu} = \frac{\varphi(z_0)^{m+1}}{2\,\pi\,i}\int\limits_{K_{\varrho'}}\frac{D_\nu(w) - d_\nu(w)}{w^{m+1}[w-\varphi(z_0)]}\,dw\,.$$

A fin de majorer

$$(3.19)\qquad |\,D_\nu(w) - d_\nu(w)\,| \leqq \left|\frac{\Phi_{\nu+1}(k)}{\Phi_{\nu+1}(z_0)} - \frac{\varphi(k)^{\nu+1}}{\varphi(z_0)^{\nu+1}}\right| + \left|\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)} - \frac{\varphi(k)^\nu}{\varphi(z_0)^\nu}\right|,$$

écrivons (2.10) sous la forme suivante

$$(3.20)\qquad \Phi_n(z) = \left[1 + c_0\left(\frac{r}{|\,\varphi(z)\,|}\right)^n t_n(z)\right]\varphi(z)^n$$

où $|\,t_n(z)\,| \leqq 1$. Puis nous obtenons, pour la même raison que (3.14),

$$(3.21)\qquad R < \min_{|w|=\varrho'} |\,\varphi\big(k[\psi(w)]\big)\,| = \varrho'_* < \max_{|w|=\varrho'} |\,\varphi\big(k[\psi(w)]\big)\,| = \varrho'_0\,,$$

et nous aurons, en vertu de (2.11), (3.20) et (3.21),

$$(3.22)\qquad \left|\frac{\Phi_\nu(k)}{\Phi_\nu(z_0)} - \frac{\varphi(k)^\nu}{\varphi(z_0)^\nu}\right| \leqq \frac{c_0}{\lambda}\left[\left(\frac{r}{\varrho'_*}\right)^\nu |\,t_\nu(k)\,| + \left(\frac{r}{R}\right)^\nu |\,t_\nu(z_0)\,|\right]\left|\frac{\varphi(k)}{\varphi(z_0)}\right|^\nu \leqq \frac{2\,c_0}{\lambda}\left(\frac{r\,\varrho'_0}{R^2}\right)^\nu.$$

Si $\varrho' - R$ est assez petit, on a $R < \varrho'_0 < R^2/r$ et $r\,\varrho'_0/R^2 < 1$. On conclut donc de (3.19) et (3.22)

$$(3.23)\qquad |\,D_\nu(w) - d_\nu(w)\,| \leqq c_3\left(\frac{r\,\varrho'_0}{R^2}\right)^\nu.$$

Il vient enfin de (3.18) et (3.23)

$$(3.24)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |\,\gamma^*_{m\nu} - \gamma_{m\nu}\,| \leq \frac{c_3}{\varrho' - R} \frac{\varrho'}{1 - \dfrac{r\,\varrho_0'}{R^2}} \left(\frac{R}{\varrho'}\right)^{m+1} = c_4 \left(\frac{R}{\varrho'}\right)^{m+1}.$$

(3.16) et (3.24) entraînent (3.7).

4° Il reste à établir (3.8). À cet effet remarquons que dans (3.17) la fonction à intégrer n'a pas de pôle en $w_0 = \varphi(z_0)$, puisque w_0 est un zéro de $d_\nu(w)$. En conséquence on peut changer le contour d'intégration $K_{\varrho'}$ en K_R et mettre (3.17) sous la forme

$$(3.25)\qquad \gamma_{m\nu} = \frac{\varphi(z_0)^{m-\nu}}{2\pi i} \int_{K_R} \frac{\varphi(k)^\nu}{w^{m+1}} \frac{\varphi(k) - \varphi(z_0)}{w - \varphi(z_0)} dw\,.$$

Posons, pour $|\,w\,| = R$,

$$(3.26)\qquad \varphi\big(k[\psi(w)]\big) = Re^{i\vartheta}\,,\ \varphi(z) = w = Re^{i\omega(\vartheta)}\,,\ \varphi(z_0) = w_0 = Re^{i\omega(\vartheta_0)} = Re^{i\vartheta_0}\,,$$

c'est que $\omega(\vartheta_0) = \vartheta_0$. Nous pouvons ainsi écrire

$$(3.27)\qquad \gamma_{m\nu} = e^{i(m-\nu)\vartheta_0} g_{m\nu}\,,$$

avec

$$(3.28)\qquad g_{m\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[\nu\vartheta - m\omega(\vartheta)]} \frac{e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}}{e^{i\omega(\vartheta)} - e^{i\vartheta_0}} \omega'(\vartheta)\, d\vartheta\,.$$

φ, ψ, k étant des fonctions analytiques univalentes dans les domaines envisagés, $\omega(\vartheta)$ est également analytique et $\omega'(\vartheta) > 0$. $e^{i\omega(\vartheta)}$ est en outre périodique de période 2π. La périodicité de $e^{i\omega(\vartheta)}$ entraîne $\omega(\vartheta + 2\,\pi) = \omega(\vartheta) + 2\,\pi$; ainsi, en écrivant

$$(3.29)\qquad \omega(\vartheta) = \tau(\vartheta) + \vartheta\,,$$

on voit que $\tau(\vartheta) = \tau(\vartheta + 2\,\pi)$ est une fonction analytique, et $\tau(\vartheta_0) = 0$. Admettons pour un instant, contrairement à l'hypothèse initiale, que $z' \neq z''$ et posons $\varphi(z') = w' = Re^{i\omega(\vartheta')}$, $\varphi(z'') = w'' = Re^{i\omega(\vartheta'')}$, nous aurons, d'après (3.26) et (3.29), $\omega(\vartheta') = \vartheta'' = \tau(\vartheta') + \vartheta'$. Il s'ensuit que si $\tau(\vartheta)$ se réduisait à une constante $\tau_0 = \vartheta'' - \vartheta'$, $k(z)$ serait équivalente à une rotation, cas exclus par les conditions adoptées. Lorsque $z' = z'' = z_0$ et $\tau(\vartheta)$ est constante, on a $\tau_0 = \tau(\vartheta_0) = 0$, ou $\tau(\vartheta) \equiv 0$; $\tau(\vartheta)$ est alors une identité, c'est-à-dire équivalente à une rotation d'un angle zéro.

Posons, en tenant compte de (3.28) et (3.29),

$$(3.30)\qquad g_{m\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\nu\vartheta} p(\vartheta;\, m)\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[(\nu-m)\vartheta - m\tau(\vartheta)]}\, q(\vartheta)\, d\vartheta\,,$$

et désignons par **A** l'ensemble des fonctions

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}, \quad \text{avec} \quad \| f \| = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} | a_\nu | < \infty .$$

$q(\vartheta)$ étant analytique, $q(\vartheta) \in \mathbf{A}$; et comme $q(\vartheta) \neq 0$, $q(\vartheta)^{-1}$ est aussi analytique et $q(\vartheta)^{-1} \in \mathbf{A}$, avec $\| q^{-1} \| = c$. D'autre part, selon une proposition de J. P. Kahane ([8], Théorème V, p. 254), $\tau(\vartheta)$ *étant réelle, analytique, périodique et de période* 2π, *et non constante, il existe deux constantes* λ_1 *et* λ_2 *telles que* $\lambda_1 \sqrt{|n|} < \| e^{in\tau} \| < \lambda_2 \sqrt{|n|}$ $(-\infty < n$ *entier* $< \infty)$.[1] En conséquence, $p(\vartheta; m)$ étant le produit de fonctions appartenant à **A**, $p(\vartheta; m) \in \mathbf{A}$, et

$$\lambda_1 \sqrt{m} < \| e^{-im\tau} \| \leqq \| e^{im\vartheta} \| \cdot \| q^{-1} \| \cdot \| p \| = c \| p \| . \tag{3.31}$$

Soit

$$p(\vartheta; m) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu^{(m)} e^{i\nu\vartheta} .$$

La relation (3.30) exprime alors que $g_{m\nu} = p_{-\nu}^{(m)}$, où l'on avait admis que $\nu \geqq 0$. Mais $g_{m\nu}$ a un sens même si $\nu < 0$. Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} | g_{m\nu} | = O(1) \qquad (m \to \infty). \tag{3.32}$$

On a, par la définition (3.27), $| g_{m\nu} | = | \gamma_{m\nu} |$ même lorsque $\nu < 0$. Changeons en (3.25) K_R en $K_{\varrho'}$ $(R < \varrho' < R_0)$, nous aurons, vu (3.21), pour $\nu < 0$

$$| \gamma_{m\nu} | \leqq c_5 \left(\frac{R}{\varrho'}\right)^m \left(\frac{R}{\varrho'_*}\right)^{-\nu},$$

d'où

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} | \gamma_{m\nu} | \leqq c_6 \left(\frac{R}{\varrho'}\right)^m \to 0 , \qquad m \to \infty. \tag{3.33}$$

(3.32) est donc établi. (3.31) et (3.32) entraînent déjà (3.8).

La relation (3.32) n'est pas inattendue. Nous avons remarqué dans le § 2 que la formule (2.4) peut être interprétée telle que $\Phi_\nu(z) \equiv 0$, pour $\nu < 0$. Il s'ensuit, d'après (3.5), que $c_{m\nu} \equiv 0$ pour $\nu < 0$.

5° Ceci posé considérons une suite convergente $\{u_\nu\}$ qui se transforme par $[c_{m\nu}]$ en une suite divergente $\{v_m\}$. z_0 comme un point double de la transformation $k(z)$ (il en a deux au plus) est bien déterminé. Soit $u_\nu = A_\nu^{(1)}(z_0)$, $v_m = A_m^{(2)}(z_0)$. On a alors, d'après (3.2) et (3.3),

$$a_\nu^{(1)} = \frac{u_\nu - u_{\nu-1}}{\Phi_\nu(z_0)}, \quad a_m^{(2)} = \frac{v_m - v_{m-1}}{\Phi_m(z_0)}$$

$\left(\Phi_\nu(z_0) \neq 0, \ \nu = 0, 1, \ldots\right)$. Il en découle, grâce à (2.9),

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \, | a_\nu^{(1)} |^{1/\nu} \leqq \frac{1}{R} . \tag{3.34}$$

[1] C'est pourquoi que nous avons supposè que $k(z)$ n'est pas équivalente à une rotation; autrement $\tau(\vartheta)$ était constant et la proposition de Kahane ainsi que notre théorème n'aurait pas lieu.

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu(z)$ représente donc une fonction $F_1(z)$ holomorphe dans $\mathrm{I}(C_R)$. On obtient pour $a_m^{(2)}$ la relation analogue à (3.34) en déduisant de (3.2) et (3.3) la formule (3.1) qui a lieu pour chaque $\varrho = R - \eta$, avec un $\eta > 0$ arbitrairement petit. On en tire

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \mid a_m^{(2)} \mid^{1/m} \leqq \frac{1}{R}.$$

$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(2)} \Phi_m(z) = F_2(z)$ est ainsi également holomorphe dans $\mathrm{I}(C_R)$.

6° La démonstration du corollaire ne sera pas détaillée. Notons seulement qu'en utilisant les notations (façile à comprendre) r_j, R_j, C_{R_j}, K_{R_j}, $w_j = \varphi_j(z_j)$, $z_j = \psi_j(w_j)$ $(j = 1, 2)$ et en rappelant que $z_1 = k^*(z_2)$ est à présent une application de $\bar{\mathrm{I}}(C_{R_1})$ sur $\bar{\mathrm{I}}(C_{R_2})$, nous pouvons montrer avec des modifications insignifiantes des raisonnements précédents que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\mid \tilde{c}_{m\nu} \mid - \mid \tilde{\gamma}_{m\nu} \mid) = o(1) \qquad (m \to \infty),$$

où

$$\tilde{\gamma}_{m\nu} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi_2(\tilde{z}_2)^{m+1}}{\varphi_1(\tilde{z}_1)^{\nu+1}} \int_{K_{R_2}} \frac{\varphi_1(k^*)^\nu}{w_2^{m+1}} \frac{\varphi_1(k^*) - \varphi_1(\tilde{z}_1)}{w_2 - \varphi_2(\tilde{z}_2)} dw_2 = \frac{R_1}{R_2} e^{i\theta_{m\nu}} \gamma_{m\nu},$$

$\varphi_1(k^*) = \varphi_1\bigl(k^*[\psi_2(w_2)]\bigr)$ et $\tilde{c}_{m\nu}$, $\tilde{\gamma}_{m\nu}$ sont des quantités analogues à $c_{m\nu}$ et $\gamma_{m\nu}$.

(Reçu le 23 Juillet 1964)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alpár, L.: „Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercle de convergence, III." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) 97—152.

[2] Alpár, L.: „Sur certaines transformées des séries de puissances absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **7** (1962) 287—316.

[3] Alpár, L.: „Sur certaines transformations des séries de Faber." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **9** (1964) 283—296.

[4] Faber, G.: „Über polynomische Entwickelungen." *Mathematische Annalen* **57** (1903) 389—408.

[5] Faber, G.: „Über polynomische Entwickelungen II." *Mathematische Annalen* **64** (1907) 116—135.

[6] Faber, G.: „Über Tschebischeffsche Polynome." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **150** (1919—20) 79—105.

[7] Ilieff, L.: *Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.

[8] Kahane, J. P.: „Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes." *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **35** (1956) 349—359.

[9] Montel, P.: *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe.* Gauthier-Villars, Paris 1910.

[10] Turán, P.: „A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence-circle." *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1958) 19—26.

[11] Ullman, J. L.: „On Faber séries, 1. A problem of transfer." *The Michigan Mathematical Journal* **2** (1953—54) 109—114.

[12] Ullman, J. L.: „Studies on Faber polynomials I." *Transactions of the American Mathematical Society* **94** (1960) 515—528.

СХОДИМОСТЬ И КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

L. ALPÁR

Резюме

Пусть означают $\Phi_\nu(z)$ многочлен Фабера, ассоциированный с кривой C и $\Phi_\nu^{(j)}(z)$ многочлен Фабера, ассоциированный с кривой $C_j (j = 1, 2)$. В работе доказываются следующие:

Теорема. *Сходимость рядов Фабера в одной точке своих кривых сходимости не является конформно инвариантной. Точнее, пусть C простая, замкнутая кривая, которая состоит из единственной аналитической дуги, $k(z)$ — конформное, однолистное отображение внутренности C на себя, не является эквивалентным ротации, и пусть $z' \in C$, $z'' \in C$ две точки, такие, что $z' = k(z'')$, тогда существует функция*

$$F_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu(z)$$

аналитическая внутри C, ряд Фабера, которой сходится в z', но функция

$$F_1(k(z)) = F_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu(z)$$

которая также является аналитической внутри C, имеет ряд Фабера, расходящийся в z''.

Следствие. *Если C_1 и C_2 простые, замкнутые кривые (в плоскостях z_1 ссотв. z_2) каждая которых состоит из единственной аналитической дуги, $z_1 = k^*(z_2)$ отображение внутренности C_1 на внутренность C_2, конформное, однолистное, не эквивалентное ротации, и если $\tilde{z}_1 \in C_1$, $\tilde{z}_2 \in C_2$, две точки, такие что $\tilde{z}_1 = k^*(\tilde{z}_2)$ тогда существует функция*

$$F_1(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(1)} \Phi_\nu^{(1)}(z_1)$$

аналитическая внутри C_1, ряд Фабера которой сходится в $\tilde{z}_1$, но ряд Фабера *функции*

$$F_1(k^*(z_2)) = F_2(z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(2)} \Phi_\nu^{(2)}(z_2)$$

являющейся аналитической внутри C_2 расходится в $\tilde{z}_2$.

ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

O. KIS

1. В настоящей заметке изучаются условия сходимости тригонометрических интерполяционных многочленов к элементам некоторых множеств функций. Сначала мы введем необходимые обозначения (**1**) и приведем результаты, к которым примыкает содержание этой статьи (**2—4**). Затем формулируются результаты настоящей работы (**5**) и приводятся их доказательства (**6—17**).

Обозначим через C множество вещественных, непрерывных и 2π-периодических на вещественной оси функций. Если $f(x) \in C$, то

$$\| f(x) \| = \max_{-\infty < x < \infty} | f(x) |$$

ее норма, а

$$\omega(t, f) = \max_{\substack{0 \leqq h \leqq t \\ -\infty < x < \infty}} | f(x + h) - f(x) | \qquad (0 \leqq t < \infty)$$

ее модуль непрерывности.

Пусть $\omega(t)$ есть модуль непрерывности некоторой непостоянной фиксированной функции из C. Подмножество тех функций множества C, для которых существует такая зависящая лишь от $f(x)$ постоянная $a(f)$, что выполняется условие

$$\omega(t, f) \leqq a(f)\, \omega(t) \qquad (0 \leqq t < \infty)\,,$$

обозначается через $C(\omega)$. Эти множества функций ввел С. М. Лозинский в работе [1].

Пусть X есть бесконечная треугольная матрица вещественных чисел

$$\begin{array}{ccccc} & & x_{00} & & \\ & x_{01}, & x_{11}, & x_{21} & \\ x_{02}, & x_{12}, & x_{22}, & x_{32}, & x_{42} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

удовлетворяющих условиям

$$0 \leqq x_{kn} < 2\,\pi\,,\ x_{in} \neq x_{kn}\ (0 \leqq i \leqq 2\,n\,,\ 0 \leqq k \leqq 2\,n,\ i \neq k,\ n = 0, 1, 2, \dots),$$

а функции

$$l_{kn}(x, X) \quad (k = 0, 1, \dots, 2\,n;\ n = 0, 1, 2, \dots)$$

суть фундаментальные многочлены тригонометрического интерполирования по узлам X, т. е. тригонометрические многочлены n-ого порядка, удовлетворяющие условиям

$$l_{kn}(x_{in}, X) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases} \quad (0 \leqq i \leqq 2n\,,\ 0 \leqq k \leqq 2n\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Обозначим через $M_n(X)$ последовательность постоянных Лебега, соответствующих матрице X:

$$M_n(X) = \max_{-\infty < x < \infty} \sum_{k=0}^{2n} |\, l_{kn}(x, X) \,| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

а через $L_n(x, X, f)$ тригонометрический интерполяционный многочлен n-ого порядка функции $f(x)$ по узлам X:

$$L_n(x, X, f) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_{kn})\, l_{kn}(x, X) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \text{ в}$$

Чтобы упростить запись, часть индексов и переменных часто буде. опускаться.

2. Известно, что последовательность интерполяционных многоченот $L_n(x, X, f)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ из C, если

$$\lim_{n \to \infty} M_n(X)\, \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) = 0\,.$$

Поэтому последовательность $L_n(x, X, f)$ равномерно сходится к любой

$$f(x) \in C(\omega)\,,$$

если

(2.1) $$\lim_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) M_n(X) = 0\,.$$

Является ли это достаточное условие равномерной сходимости необходимым? На этот вопрос отвечают следующие теоремы, которые С. М. Лозинский опубликовал без доказательства в работе [1]:

1) *Пусть*

(2.2) $$\limsup_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0$$

или

$$\liminf_{t = +0} \frac{\omega[t\omega(t)]}{\omega(t)} > 0\,.$$

Тогда условие (2.1) *необходимо: если*

(2.3) $$\limsup_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) M_n(X) > 0\,,$$

то найдется такая функция $f(x)$ из $C(\omega)$, для которой $L_n(x, X, f)$ не сходится равномерно к $f(x)$. (С. Н. Бернштейн доказал, что в случае любой матрицы узлов

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n(X)}{\ln n} > 0 .$$

Поэтому из (2.2) следует (2.3))

2) *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0 \tag{2.4}$$

и

$$\liminf_{t=+0} \frac{\omega[t\omega(t)]}{\omega(t)} = 0 . \tag{2.5}$$

Тогда существуют такие матрицы узлов X и Y, что

$$M_n(X) = M_n(Y) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) ,$$

последовательность $L_n(x, X, f)$ равномерно сходится к $f(x)$ для любой функции $f(x)$ из $C(\omega)$, а последовательность $L_n(x, Y, f)$ неограниченна для некоторой функции $f(x)$ из $C(\omega)$ (т. е. не существует выраженного только через $M_n(X)$ и $\omega(t)$ условия, необходимого и достаточного для равномерной сходимости $L_n(x, X, f)$ к $f(x)$ для любой $f(x)$ из $C(\omega)$).

3. Пусть выполняются условия (2.4) и (2.5). Нельзя ли заменить достаточное условие (2.1) более слабым условием? Можно ли получить необходимое условие равномерной сходимости последовательности $L_n(x, X, f)$ к $f(x)$ для всех $f(x) \in C(\omega)$? Аналогичные вопросы для Лагранжева интерполирования исследовали P. Erdős и P. Turán в работе [2].

Чтобы сформулировать доказанные в статье [2] теоремы, введём следующие обозначения: $\mathrm{Lip}\,\alpha$ есть множество функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1, +1]$ условию Липшица с показателем α $(0 < \alpha < 1)$; A — бесконечная треугольная матрица чисел

$$\begin{matrix} & & x_{00} & & \\ & x_{01}, & & x_{11} & \\ x_{02}, & & x_{12}, & & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots , \end{matrix}$$

удовлетворяющих неравенствам

$$-1 \leqq x_{0n} < x_{1n} < \ldots < x_{nn} \leqq +1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) ;$$

$\lambda_n(A)$ — последовательность постоянных Лебега Лагранжева интерполирования по узлам A; если $0 < \beta < 1$, то $A(\beta)$ есть множество матриц, для которых при любом положительном ε выполняются неравенства

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n(A)\, n^{-\beta-\varepsilon} < a(\varepsilon) ,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n(A)\, n^{-\beta+\varepsilon} > b(\varepsilon) .$$

где $a(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ — зависящие лишь от ε положительные постоянные; $P_n(x, A, f)$ — Лагранжев интерполяционный многочлен n-той степени функции $f(x)$ по узлам A.

P. Erdős и P. Turán в работе [2] доказали следующие теоремы: *если* $\alpha < \beta$, *то существует матрица* $A \in A(\beta)$ *и функция* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *такие, что последовательность* $P_n(x, A, f)$ *не ограниченна на отрезке* $[-1, +1]$; *если* $\alpha < \dfrac{\beta}{\beta+2}$ *и* $A \in A(\beta)$, *то существует* $f(x) \in \mathrm{Lip}\ \alpha$, *для которой* $P_n(x, A, f)$ *не ограниченна на* $[-1, +1]$; *если* $\alpha > \dfrac{\beta}{\beta+2}$, *то существует* $A \in A(\beta)$ *такая, что* $P_n(x, A, f)$ *равномерно сходится к* $f(x)$ *на* $[-1, +1]$ *для всякой* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

Множеству $\mathrm{Lip}\,\alpha$ принадлежат те определенные на отрезке $[-1, +1]$ функции, модули непрерывности которых $\leqq a(f)\, t^{\alpha}$. Мы видим, что в случае этого множества достаточное условие равномерной сходимости $P_n(x, A, f)$ к $f(x)$ для всех $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, т. е. условие

$$\lambda_n(A) = o(n^{\alpha}) ,$$

не может быть существенно ослабленно; выполнение условия $A \notin A(\beta)$, если $\beta < \dfrac{2\,\alpha}{1-\alpha}$, необходимо для равномерной сходимости $P_n(x, A, f)$ к $f(x)$, для любой $f(x)$ из $\mathrm{Lip}\,\alpha$; это условие не может быть существенно усиленно.

4. В работе [3] были доказанны следующие теоремы:

Теорема 1. *Если модуль непрерывности* $\omega(t)$ *и матрица узлов* X *таковы, что*

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{nM_n(X)}\right) M_n(X) > 0 ,$$

то для некоторой функции $f(x)$ *из* $C(\omega)$ *последовательность интерполяционных многочленов* $L_n(x, X, f)$ *не сходится равномерно к* $f(x)$ (*т. е. выполнение условия*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{nM_n(X)}\right) M_n(X) = 0 \tag{4.1}$$

необходимо для равномерной сходимости $L_n(x, X, f)$ *к* $f(x)$ *для всех* $f(x)$ *из* $C(\omega)$).

Теорема 2. *Обозначим через* Y *матрицу равноотстоящих узлов*

$$\frac{2\,\pi k}{2\,n+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2\,n;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если модуль непрерывности $\omega(t)$ *и числовая последовательность* M_n *таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0 , \tag{4.2}$$

$$M_n \geqq M_n(Y) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) , \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{nM_n}\right) M_n = 0 ,$$

то существует матрица узлов X, для которой

$$M_n(X) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и последовательность $L_n(x, X, f)$ равномерно сходится к $f(x)$ для любой функции $f(x)$ из $C(\omega)$, т. е. необходимое условие (4.1) *не может быть усиленно.* (В силу теоремы 1 из [1] ограничение (4.2) в формулировке теоремы необходимо. Условие (4.3) также необходимо, если справедлива следующая гипотеза: для всякой матрицы узлов X выполняется неравенство

$$M_n(X) \geqq M_n(Y) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).)$$

В работе [4] было доказанно, что имеет место следующая

Теорема 3. *Если модуль непрерывности $\omega(t)$ и числовая последовательность M_n таковы, что*

$$M_n \geqq M_n(Y) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) M_n > 0,$$

$$\lim_{t=+0} \frac{t}{\omega(t)} = 0, \tag{4.4}$$

то существует матрица узлов X и функция $f(x) \in C(\omega)$ такие, что

$$M_n(X) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и последовательность $L_n(x, X, f)$ не сходится равномерно к $f(x)$ (т. е. достаточное условие равномерной сходимости

$$\lim_{n\to\infty} M_n(X)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

не может быть ослабленно).

Условие (4.4) теоремы 3 в силу одной из лемм работы [1] не выполняется лишь в том случае, когда $C(\omega)$ совпадает с множеством 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица с показателем 1. Для этого случая в [4] утверждение теоремы 3 удалось доказать лишь для последовательностей M_n, удовлетворяющих условиям (4.3) и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = \infty.$$

5. В **6—8** мы докажем, что имеет место следующая

Теорема 4. *Существует матрица узлов X и 2π-периодическая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица с показателем* 1, *такие, что*

$$M_n(X) = O(n)$$

и последовательность $L_n(x, X, f)$ не сходится всюду к $f(x)$ (т. е. достаточное условие равномерной сходимости для 2π-периодических функций из Lip 1 — *условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(X)}{n} = 0$$

— *также не может быть улучшенно).*

Мы докажем также следующие теоремы:

Теорема 5. *Если модуль непрерывности $\omega(t)$ и матрица узлов X таковы, что*

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{nM_n(X)}\right) M_n(X) = \infty,$$

то существует функция $f(x) \in C(\omega)$, для которой последовательность $L_n(x, X, f)$ неограниченна (**9—11**).

Теорема 6. *Если модуль непрерывности $\omega(t)$ и числовая последовательность M_n таковы, что*

$$M_n \geqq M_n(Y) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) M_n = \infty,$$

то существует матрица узлов X и функция $f(x) \in C(\omega)$ такие, что

$$M_n(X) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и последовательность $L_n(x, X, f)$ неограниченна (**12—14**).

Мы докажем, что цитированные в **2** теоремы 1 и 2 из [1] являются следствиями наших теорем (**15—16**).

Наконец, мы исследуем в **17** с помощью наших теорем некоторые конкретные множества $C(\omega)$.

6. Чтобы доказать теорему 4, мы рассмотрим матрицу X следующих узлов тригонометрического интерполирования:

$$x_{kn} = \frac{2k\pi}{N} \; (k = 0, 1, \ldots, N-1), \quad x_{Nn} = \frac{\pi}{N}, \quad x_{N+1,n} = 2\pi - \frac{\pi}{N}, \tag{6.1}$$

где n любое натуральное число и $N = 2n - 1$. Мы покажем, что, с одной стороны,

$$M_n(X) = O(n), \tag{6.2}$$

а, с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} |L_n(\pi, X, |\sin x|)| = 2 - \frac{4}{\pi}.$$

Так как функция $|\sin x|$ 2π-периодична, удовлетворяет условию Липшица с показателем 1 и $\sin \pi = 0$, то отсюда следует утверждение теоремы 4.

Чтобы доказать (6.2), запишем фундаментальные многочлены тригонометрического интерполирования по узлам X:

$$l_k(x) = \frac{\sin N\frac{x-x_k}{2}}{N\sin\frac{x-x_k}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2N}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{x_k}{2}-\frac{\pi}{2N}\right)\sin\left(\frac{x_k}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)} \quad (0 \leqq k \leqq N-1), \tag{6.3}$$

$$l_N(x) = \sin\frac{Nx}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\frac{\pi}{N}}, \tag{6.4}$$

$$l_{N+1}(x) = \sin\frac{Nx}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\frac{\pi}{N}}. \tag{6.5}$$

(Функция

$$t_k(x) = \frac{\sin N\frac{x-x_k}{2}}{N\sin\frac{x-x_k}{2}} \qquad (k=0, 1, \ldots, N-1)$$

есть фундаментальный многочлен тригонометрического интерполирования по равноотстоящим узлам

$$x_0, x_1, \ldots, x_{N-1},$$

т. е. тригонометрический многочлен $n-1$-ого порядка, удовлетворяющий условиям

$$t_k(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } i=k \\ 0, \text{ если } i \neq k \end{cases} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Функция

$$s_k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2N}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{x_k}{2}-\frac{\pi}{2N}\right)\sin\left(\frac{x_k}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)} \qquad (k=0, 1, \ldots, N-1)$$

есть тригонометрический многочлен первого порядка, удовлетворяющий условиям

$$s_k(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } i=k \\ 0, \text{ если } i = N, N+1 \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Поэтому $l_k(x)$ есть тригонометрический многочлен n-ого порядка, удовлетворяющий условиям

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } i=k \\ 0, \text{ если } i \neq k \end{cases} \qquad (k=0, 1, \ldots, N-1;\ i = 0, 1, \ldots, N+1).$$

Тригонометрические многочлены n-ого порядка $l_N(x)$ и $l_{N+1}(x)$ удовлетворяют условиям

$$l_N(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = N, \\ 0, & \text{если } i = 0, 1, \ldots, N-1, N+1, \end{cases}$$

$$l_{N+1}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = N+1, \\ 0, & \text{если } i = 0, 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Следовательно, функции $l_k(x)$ при $0 \leqq k \leqq N+1$ действительно являются фундаментальными многочленами тригонометрического интерполирования по узлам X.)

7. Оценим фундаментальные многочлены $l_k(x)$. Так как

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2N}\right) = \sin\left(\frac{x - x_k}{2} + \frac{x_k}{2} - \frac{\pi}{2N}\right) =$$

$$= \sin\frac{x - x_k}{2}\cos\left(\frac{x_k}{2} - \frac{\pi}{2N}\right) + \cos\frac{x - x_k}{2}\sin\left(\frac{x_k}{2} - \frac{\pi}{2N}\right),$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2N}\right) = \sin\left(\frac{x - x_k}{2} + \frac{x_k}{2} + \frac{\pi}{2N}\right) =$$

$$= \sin\frac{x - x_k}{2}\cos\left(\frac{x_k}{2} + \frac{\pi}{2N}\right) + \cos\frac{x - x_k}{2}\sin\left(\frac{x_k}{2} + \frac{\pi}{2N}\right),$$

то в случае $0 \leqq k \leqq N-1$

$$l_k(x) = \frac{\sin N\dfrac{x - x_k}{2}}{N\sin\dfrac{x - x_k}{2}}\cos^2\frac{x - x_k}{2} +$$

$$+ \frac{1}{N}\sin N\frac{x - x_k}{2}\cos\frac{x - x_k}{2}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{x_k}{2} - \frac{\pi}{2N}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{x_k}{2} + \frac{\pi}{2N}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{N}\sin N\frac{x - x_k}{2}\sin\frac{x - x_k}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{x_k}{2} - \frac{\pi}{2N}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{x_k}{2} + \frac{\pi}{2N}\right).$$

Здесь

$$\left|\frac{\sin N\dfrac{x - x_k}{2}}{N\sin\dfrac{x - x_k}{2}}\right| \leqq 1, \quad \left|\cos\frac{x - x_k}{2}\right| \leqq 1, \quad \left|\sin N\frac{x - x_k}{2}\right| \leqq 1,$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2N}\right) + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2N} = 0.$$

$$\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x_k}{2}-\frac{\pi}{2N}\right)\right| = \left|\operatorname{ctg}\frac{2k-1}{2N}\pi\right| < \frac{1}{\left|\sin\frac{2k-1}{2N}\pi\right|} \leqq$$

$$\leqq \begin{cases} \dfrac{N}{2k-1}, & \text{если } 1 \leqq k \leqq n, \\ \dfrac{N}{2N-2k+1}, & \text{если } n \leqq k \leqq N-1, \end{cases}$$

$$\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x_k}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)\right| = \left|\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2N}\pi\right| < \frac{1}{\left|\sin\frac{2k+1}{2N}\pi\right|} \leqq$$

$$\leqq \begin{cases} \dfrac{N}{2k+1}, & \text{если } 0 \leqq k \leqq n-1, \\ \dfrac{N}{2N-2k-1}, & \text{если } n-1 \leqq k \leqq N-1, \end{cases}$$

$$\left|\sin\frac{x-x_k}{2}\right| \leqq 1, \quad \left|\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2N}\right)\right| \leqq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2N}} < N.$$

Поэтому

$$|l_0(x)| < 1 + N,$$

$$|l_k(x)| < 1 + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{N}{4k^2-1}, \text{ если } k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$|l_k(x)| < 1 + \frac{1}{2N-2k+1} + \frac{1}{2N-2k-1} + \frac{N}{4(N-k)^2-1},$$

$$\text{если } k = n, n+1, \ldots, N-1.$$

Так как

$$\left|\sin\frac{Nx}{2}\right| \leqq 1, \quad \left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2N}\right)\right| \leqq 1, \quad \left|\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2N}\right)\right| \leqq 1,$$

$$\sin\frac{\pi}{N} > \frac{2}{N},$$

то ввиду (6.4) и (6.5)

$$|l_k(x)| < \frac{N}{2} \qquad (k = N, N+1).$$

Таким образом

$$\sum_{k=0}^{N+1} | l_k(x) | < 1 + N + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{2\,k-1}+\frac{1}{2\,k+1}\right) + N\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4\,k^2-1} +$$

$$+\sum_{k=n}^{N-1}\left(1+\frac{1}{2(N-k)-1}+\frac{1}{2(N-k)+1}\right)+N\sum_{k=n}^{N-1}\frac{1}{4(N-k)^2-1}+$$

$$+N < 3\,N + 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k-1} - 2 + 2\,N\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4\,k^2-1} <$$

$$< 3\,N - 2 + 4\left(1+\frac{1}{2}\ln N\right) + 2\,N\frac{1}{2} = 4\,N + 2 + 2\ln N < 8\,n +$$

$$+ 2\ln n + 2 + 2\ln 2\,,$$

следовательно,

$$M_n(X) = \max_{-\infty<x<\infty}\sum_{k=0}^{N+1} | l_k(x) | = O(n)\,,$$

что и требовалось доказать.

8. Чтобы доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty} | L_n(\pi, X, |\sin x|) | = 2 - \frac{4}{\pi}\,,$$

заметим, что в силу (6.3) и (6.1)

$$l_k(\pi)\,|\sin x_k| = (-1)^{n+1+k}\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{2\,N}\left|\sin\dfrac{2\,k\,\pi}{N}\right|}{N\cos\dfrac{\pi k}{N}\sin\dfrac{2\,k-1}{2\,N}\pi\cdot\sin\dfrac{2\,k+1}{2\,N}\pi}$$

$$(1 \leqq k \leqq N-1)\,.$$

Если $1 \leqq k \leqq n-1$, то

$$\left|\sin\frac{2\,k\,\pi}{N}\right| = \sin\frac{2\,k\,\pi}{N} = 2\sin\frac{k\,\pi}{N}\cos\frac{k\,\pi}{N}\,,$$

$$2\sin\frac{k\,\pi}{N}\cos\frac{\pi}{2\,N} = \sin\frac{2\,k-1}{2\,N}\pi + \sin\frac{2\,k+1}{2\,N}\pi\,,$$

поэтому

$$l_k(\pi)\,|\sin x_k| = (-1)^{n+k+1}\frac{1}{N}\cos\frac{\pi}{2\,N}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{2\,k-1}{2\,N}\pi}+\frac{1}{\sin\dfrac{2\,k+1}{2\,N}\pi}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} l_k(\pi)\,|\sin x_k| = \cos\frac{\pi}{2\,N}\left[(-1)^n\frac{1}{N\sin\dfrac{\pi}{2\,N}}+\frac{1}{N}\right].$$

Если $n \leqq k \leqq N - 1$, то

$$|\sin x_k| = -\sin\frac{2k\pi}{N} = \sin\frac{N-k}{N}2\pi = |\sin x_{N-k}|,$$

$$\cos\frac{\pi k}{N} = -\cos\frac{N-k}{N}\pi,$$

$$\sin\frac{2k-1}{2N}\pi = \sin\frac{2(N-k)+1}{2N}\pi,$$

$$\sin\frac{2k+1}{2N}\pi = \sin\frac{2(N-k)-1}{2N}\pi.$$

Поэтому

$$l_k(\pi)\,|\sin x_k| = l_{N-k}(\pi)\,|\sin x_{N-k}|,$$

$$\sum_{k=n}^{N-1} l_k(\pi)\,|\sin x_k| = \sum_{k=1}^{n-1} l_k(\pi)\,|\sin x_k| = \cos\frac{\pi}{2N}\left[(-1)^n\frac{1}{N\sin\frac{\pi}{2N}} + \frac{1}{N}\right].$$

Так как

$$l_0(\pi)\,|\sin x_0| = l_0(\pi)\sin 0 = 0,$$

$$l_k(\pi)\,|\sin x_k| = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{2N}, \text{ если } k = N, N+1,$$

то

$$L_n(\pi, X, |\sin x|) = \sum_{k=0}^{N+1} l_k(\pi)\,|\sin x_k| =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2N}\left[\frac{1}{N} + (-1)^n\frac{1}{N\sin\frac{\pi}{2N}} + (-1)^{n+1}\right].$$

Здесь

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2N} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} N\sin\frac{\pi}{2N} = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}|L_n(x, X, |\sin x|)| = 2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right),$$

что и требовалось доказать.

9. Доказательство теоремы 5 похоже на доказательство теоремы 1. Пусть постоянные Лебега M_n некоторой матрицы узлов X и модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяют условию

$$\limsup_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{nM_n}\right)M_n = \infty. \tag{9.1}$$

Обозначим через z_n такую точку, в которой функция Лебега

$$\sum_{k=0}^{2n} | l_{kn}(x, X) |$$

принимает свое наибольшее значение M_n, а через $g_n(x)$ 2π-периодическую функцию, удовлетворяющую условиям

$$g_n(x_{in}) = \operatorname{sign} l_{in}(z_n, X) \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2n + 1)$$

(здесь

$$x_{2n+1,n} = x_{0n} + 2\pi\,,\ l_{2n+1,n}(x, X) = l_{0n}(x, X))$$

и линейную между любой парой соседних узлов

$$x_{in}\,,\ x_{i+1,n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2n)\,.$$

В [3] было доказанно, что

$$g_n(x) \in C(\omega) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Если для некоторого натурального числа m последовательность $L_n(x, X, g_m)$ неограниченна, то теорема 5 доказанна. Поэтому можно считать, что существует такая последовательность положительных чисел a_m, что

$$| L_n(x, X, g_m) | \leqq a_m \qquad (n, m = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{9.2}$$

Определим некоторую последовательность положительных чисел b_i и натуральных чисел n_i так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$b_1 = 1\,, \tag{9.3}$$

$$b_{i+1} \geqq b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)\,, \tag{9.4}$$

$$\lim_{i\to\infty} b_i = \infty\,, \tag{9.5}$$

$$b_{k+1} \geqq 3 \sum_{i=0}^{k} \frac{a_{n_i} b_i}{M_{n_i}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,, \tag{9.6}$$

$$n_{i+1} \geqq 2\, n_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9.7}$$

$$M_{n_{i+1}} \geqq 4 \frac{b_{i+1}}{b_i} M_{n_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)\,, \tag{9.8}$$

$$\omega\left(\frac{1}{n_i M_{n_i}}\right) M_{n_i} \geqq b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{9.9}$$

Это возможно, так как по теореме С. Н. Бернштейн-а

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$$

и мы предположили, что имеет место (9.1).

Пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{M_{n_i}} g_{n_i}(x)\,. \tag{9.10}$$

Стоящий справа бесконечный ряд сходится, так как в силу (9.9)

$$\frac{b_{i+1}}{M_{n_{i+1}}} \leqq \frac{1}{4}\,\frac{b_i}{M_{n_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

и, очевидно,

$$(9.11) \qquad |\, g_n(x) \,| \leqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

10. Покажем, что

$$f(x) \in C(\omega)\,.$$

Функция $f(x)$ очевидно 2π-периодична. Нам надо еще доказать, что, если t любое положительное число и $0 < h \leqq t$, то

$$|\, f(x+h) - f(x) \,| = O\big(\omega(t)\big)\,.$$

Очевидно

$$|\, f(x+h) - f(x) \,| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{M_{n_i}} \,|\, g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) \,|\,.$$

Оценим члены стоящей справа суммы. Пусть j есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию

$$(10.1) \qquad n_j\, M_{n_j}\, h \geqq 1\,.$$

Рассмотрим сначала случай $i < j$ (когда $j \geqq 2$). В [3] было доказанно, что

$$(10.2) \qquad |\, g_n(x+h) - g_n(x) \,| < 2\, n\, M_n\, h \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Поэтому

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} \,|\, g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) \,| < 2\, n_i\, b_i\, h\,.$$

Ввиду (9.7)

$$2\, n_i\, b_i\, h \leqq 2^{i-j+2}\, n_{j-1}\, b_i\, h\,.$$

Известно, (см. [5], стр. 111), что модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$(10.3) \qquad h \leqq 2\,\frac{H}{\omega(H)}\,\omega(h) \qquad (0 < h < H)\,.$$

Положим здесь

$$H = \frac{1}{n_{j-1}\, M_{n_{j-1}}}\,.$$

Тогда

$$h \leqq \frac{2\,\omega(h)}{n_{j-1}\, M_{n_{j-1}}\, \omega\left(\dfrac{1}{n_{j-1}\, M_{n_{j-1}}}\right)}\,,$$

$$2^{i-j+2}\, n_{j-1}\, b_i\, h \leqq \frac{2^{i-j+3}\, b_i\, \omega(h)}{M_{n_{j-1}}\, \omega\left(\dfrac{1}{n_{j-1}\, M_{n_{j-1}}}\right)}\,.$$

Принимая во внимание (9.9), получаем

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} \mid g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) \mid < 2^{i-j+3} \frac{b_i}{b_{j-1}} \omega(h) .$$

Наконец, ввиду (9.4)

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} \mid g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) \mid < 2^{i-j+3} \omega(h) .$$

Пусть теперь $i \geqq j$. В силу (9.8) и (9.11)

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} \mid g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) \mid \leqq 2^{2j-2i+1} \frac{b_j}{M_{n_j}} .$$

Согласно (9.9)

$$2^{2j-2i+1} \frac{b_j}{M_{n_j}} \leqq 2^{2j-2i+1} \omega \left(\frac{1}{n_j M_{n_j}} \right) .$$

Известно, что модуль непрерывности $\omega(t)$ есть невозрастающая функция. Принимая во внимание (10.1) имеем:

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} \mid g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) \mid \leqq 2^{2j-2i+1} \omega(h) .$$

Таким образом

$$\mid f(x+h) - f(x) \mid \leqq \left(\sum_{i=1}^{j-1} 2^{i-j+3} + \sum_{i=j}^{\infty} 2^{2j-2i+1} \right) \omega(h) < 11\, \omega(h) .$$

Так как модуль непрерывности $\omega(t)$ не убывает, то

$$\mid f(x+h) - f(x) \mid < 11\, \omega(h) ,$$

что и требовалось доказать.

11. Чтобы показать, что последовательность $L_n(x, X, f)$ неограниченна, покажем, что

$$\lim_{k \to \infty} L_{n_k}(z_{n_k}, X, f) = \infty .$$

Очевидно,

$$L_{n_k}(z_{n_k}, X, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{M_{n_i}} L_{n_k}(z_{n_k}, X, g_{n_i}) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Оценим члены стоящей справа суммы. Если $i < k$ и $k \geqq 2$, то в силу (9.2)

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} \mid L_{n_k}(z_{n_k}, X, g_{n_i}) \mid \leqq \frac{a_{n_i} b_i}{M_{n_i}} .$$

По определению точки z_n и функции $g_n(x)$ при любом n

$$L_n(z_n, X, g_n) = \sum_{j=0}^{2n} g_n(x_{jn})\, l_{jn}(z_n, X) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n} l_{jn}(z_n, X) \operatorname{sign} l_{jn}(z_n, X) = \sum_{i=0}^{2n} \mid l_{jn}(z_n, X) \mid = M_n .$$

Поэтому

$$\frac{b_k}{M_{n_k}} L_{n_k}(z_{n_k}, X, g_{n_k}) = b_k .$$

Наконец, при $i > k$, ввиду неравенства

$$| L_n(x, X, g_m) | \leqq M_n \| g_m \| = M_n \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots)$$

имеем:

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} | L_{n_k}(z_{n_k}, X, g_{n_i}) | \leqq b_i \frac{M_{n_k}}{M_{n_i}} .$$

В силу (9.8)

$$b_i \frac{M_{n_k}}{M_{n_i}} \leqq b_k \, 4^{k-i} .$$

Таким образом

$$L_{n_k}(z_{n_k}, X, f) \geqq - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{n_i} b_i}{M_{n_i}} + b_k - \sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{k-i} \, b_k .$$

Так как

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{k-i} = \frac{1}{3}$$

и имеет место (9.6), то

$$L_{n_k}(z_{n_k}, X, f) \geqq \frac{1}{3} b_k .$$

Отсюда и из (9.5) следует:

$$\lim_{k \to \infty} L_{n_k}(z_{n_k}, X, f) = \infty ,$$

что и требовалось доказать.

12. Доказательство теоремы 6 имеет много общего с доказательством теорем 3 и 5.

Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и числовая последовательность M_n таковы, что

$$\limsup_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) M_n = \infty \tag{12.1}$$

и

$$M_n \geqq M_n(Y) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) , \tag{12.2}$$

где Y обозначает матрицу равноотстоящих узлов

$$\frac{2 \pi k}{2 n + 1} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2 n; \; n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Обозначим через X следующую матрицу узлов:

$$x_{kn} = \frac{2 \pi k}{2 n + 1} q_n \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) ,$$

$$x_{kn} = 2 \pi - x_{2n+1-k, n} \quad (k = n + 1, n + 2, \ldots, 2 n) .$$

Последовательность q_n выберем такой, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < q_n \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и равенство

$$M_n(X) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{12.3}$$

Это возможно, так как при фиксированном n постоянная Лебега $M_n(X)$ есть непрерывная функция параметра q_n, которая совпадает с $M_n(Y)$ при $q_n = 1$ и стремится к ∞ при $q_n \to 0$ (ибо в этом случае все узлы стремятся к 0 или 2π,

$$M_n(X) > | l_{0n}(\pi, X) | = \left| \prod_{k=1}^{2n} \operatorname{ctg} \frac{x_k}{2} \right| \to \infty\ ),$$

поэтому по теореме Больцано ввиду (12.2) при некотором q_n имеет место (12.3).

Нам остается доказать существование функции

$$\bar{f}(x) \in C(\omega)\,,$$

для которой последовательность $L_n(x, X, f)$ неограниченна.

Нам придется различить 2 случая: в первом случае

$$\liminf_{n\to\infty} q_n < \frac{1}{3}\,, \tag{12.4}$$

во втором случае

$$\liminf_{n\to\infty} q_n \geqq \frac{1}{3}\,.$$

13. В первом случае рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{Re} \frac{1}{2 - e^{ix}} = \frac{2 - \cos x}{5 - 4\cos x}\,.$$

Эта функция 2π-периодична и имеет непрерывную производную. Поэтому она принадлежит классу Lip 1 и, тем более, множеству $C(\omega)$ (эта лемма из [1] доказанна, например, в [3]).

Пусть

$$w_n(z) = \prod_{i=0}^{2n} (z - e^{ix_{kn}}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

$$s_n(z) = \frac{w_n(z)\, 2^n - w_n(2)\, z^n}{(z-2) z^n\, w_n(2)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Покажем, что

$$L_n(x, X, f) = \operatorname{Re} s_n(e^{ix}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{13.1}$$

Функция

$$w_n(z)\, 2^n - w_n(2)\, z^n$$

есть многочлен $2n+1$ степени. Число 2 является его корнем. Поэтому функция

$$\frac{w_n(z)\,2^n - w_n(2)\,z^n}{z-2}$$

есть многочлен степени $2\,n$. Следовательно

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_{kn}\, z^k\,,$$

где c_{kn} некоторые комплексные числа, $s_n(e^{ix})$ является тригонометрическим многочленом n-ого порядка с комплексными коэффициентами, а $\operatorname{Re} s_n(e^{ix})$ есть тригонометрический многочлен n-ого порядка с вещественными коэффициентами. Очевидно

$$s_n(e^{ix_{kn}}) = \frac{1}{2 - e^{ix_{kn}}} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2\,n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re} s_n(e^{ix_{kn}}) = \operatorname{Re} \frac{1}{2 - e^{ix_{kn}}} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2\,n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Таким образом соотношение (13.1) действительно имеет место.

Чтобы доказать, что последовательность $L_n(x, X, f)$ неограниченна, убедимся в том, что

$$\limsup_{n\to\infty} |\, L_n(\pi, X, f)\, | = \infty\,. \tag{13.2}$$

Из неравенства (12.4) следует существование бесконечной последовательности натуральных чисел n, для которых

$$0 < q_n \leqq \frac{1}{3}\,.$$

Для них

$$0 < x_{kn} = \frac{2\,\pi k}{2\,n+1}\, q_n < \frac{\pi}{3} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Так как

$$(-1 - e^{ix_{kn}})\,(-1 - e^{ix_{2n+1-k,n}}) = (1 + e^{ix_{kn}})\,(1 + e^{i(2\pi - x_{kn})}) =$$

$$= 2(1 + \cos x_{kn}) > 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right) = 3 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$-1 - e^{ix_{0n}} = -1 - e^{0i} = -2\,,$$

то

$$w_n(-1) = \prod_{k=0}^{2n} (-1 - e^{ix_{kn}}) =$$

$$= (-1 - e^{ix_{0n}}) \prod_{k=0}^{n} (-1 - e^{ix_{kn}})\,(-1 - e^{ix_{2n+1-k,n}}) < -2 \cdot 3^n\,.$$

Аналогичным образом

$$w_n(2) = \prod_{k=0}^{2n} (2 - e^{ix_{kn}}) = \prod_{k=1}^{n} (2 - e^{ix_{kn}})(2 - e^{ix_{2n+1-k,n}}) =$$

$$= \prod_{k=0}^{n} (5 - 4\cos x_{kn}) < (5-2)^n = 3^n .$$

Поэтому

$$|L_n(\pi, X, f)| = |\operatorname{Re} s_n(-1)| = |s_n(-1)| = \left| \frac{w_n(-1)2^n}{-3(-1)^n w_n(2)} + \frac{1}{3} \right| \geqq$$

$$\geqq \left| \frac{2^{n+1}3^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)$$

и, следовательно, имеет место (13.2).

14. Займемся теперь случаем

(14.1) $$\liminf_{n\to\infty} q_n \geqq \frac{1}{3} .$$

Как и в **9** можем считать, что

(14.2) $$|L_n(x, X, g_m)| \leqq a_m \qquad (n, m = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Выберем некоторую последовательность положительных чисел b_i и натуральных чисел n_i, удовлетворяющих следующим условиям:

(14.3) $$b_{i+1} \geqq b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

(14.4) $$\lim_{i\to\infty} b_i = \infty ,$$

(14.5) $$b_{k+1} \geqq 3 \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{n_i} b_i}{M_{n_i}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

(14.6) $$M_{n_{i+1}} \geqq 4 \frac{b_{i+1}}{b_i} M_{n_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

(14.7) $$\omega\left(\frac{1}{n_i}\right) M_{n_i} \geqq 2^i b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

(14.8) $$q_{n_i} \geqq \frac{1}{\pi} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Это возможно ввиду (12.2), соотношения

$$\lim_{n\to\infty} M_n(Y) = \infty,$$

(12.1) и (14.1).

Снова рассмотрим 2π-периодическую функцию

(14.9) $$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{M_{n_i}} g_{n_i}(x) .$$

Как и в **11** можно показать, что последовательность $L_n(x, X, f)$ неограниченна. Поэтому нам остается доказать, что

$$| f(x+h) - f(x) | = O(\omega(t)) \qquad (0 < h \leqq t < \infty) .$$

Очевидно

$$| f(x+h) - f(x) | \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) | .$$

Обозначим через j наименьшее натуральное число, для которого

$$n_j h \geqq 1 . \tag{14.10}$$

Пусть, сначала, $i < j$ и $j \geqq 2$. Из (14.8), определения узлов x_{kn} и функций $g_n(x)$ следует неравенство

$$| g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) | \leqq (2 n_i + 1)h \leqq 3 n_i h .$$

Поэтому

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) | \leqq \frac{3 n_i b_i h}{M_{n_i}} .$$

В силу (14.7)

$$\frac{3 n_i b_i h}{M_{n_i}} \leqq 3 \cdot 2^{-i} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) n_i h .$$

Полагая в (10.3)

$$H = \frac{1}{n_i} ,$$

имеем:

$$h \leqq \frac{2 \omega(h)}{n_i \omega\left(\frac{1}{n_i}\right)} .$$

Поэтому

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+h) - g_n(x) | \leqq 3 \cdot 2^{1-i} \omega(h) .$$

Пусть теперь $i \geqq j$. Ввиду (14.6) и (9.11)

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) | \leqq 2^{2j-2i+1} \frac{b_j}{M_{n_j}} .$$

В силу (14.7), (14.10) и неубывания модуля непрерывности

$$\frac{b_i}{M_{n_i}} | g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x) | \leqq 2^{j-2i+1} \omega\left(\frac{1}{n_j}\right) \leqq 2^{j-2i+1} \omega(h) .$$

Таким образом

$$| f(x+h) - f(x) | \leqq \sum_{i=1}^{j-1} 3 \cdot 2^{1-i} \omega(h) + \sum_{i=j}^{\infty} 2^{j-2i+1} \omega(h) < 6 \omega(h) \leqq 6 \omega(t) ,$$

что и требовалось доказать.

15. Приступая к доказательству цитированной в **2** теоремы 1 из [1], покажем, что если модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0 \tag{15.1}$$

и M_n есть последовательность Лебега любой матрицы узлов X, то

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n M_n}\right) M_n > 0\,. \tag{15.2}$$

В силу (15.1) существует бесконечная последовательность чисел n, для которых

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n \geqq a\,, \tag{15.3}$$

де a некоторая положительная постоянная. В дальнейшем будем считать, что n удовлетворяет условию (15.3).

По теореме С. Н. Бернштейн-а

$$M_k \geqq b \ln k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

где b некоторая положительная постоянная, $b < 1$.

Обозначим через k наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$bk \ln k \leqq n\,.$$

Ввиду неубывания модуля непрерывности

$$\omega\left(\frac{1}{bk \ln k}\right) \geqq \omega\left(\frac{1}{n}\right) \geqq \frac{a}{\ln n}\,.$$

Для достаточно больших n

$$\ln n \leqq 2 \ln k\,.$$

Поэтому

$$\omega\left(\frac{1}{bk \ln k}\right) \geqq \frac{a}{2 \ln k}\,.$$

Так как

$$\omega(t) \geqq \frac{\omega(T)}{T} \frac{t}{2} \qquad (0 < t \leqq T < \infty)\,,$$

то

$$\omega\left(\frac{1}{k M_k}\right) \geqq \frac{\omega\left(\dfrac{1}{bk \ln k}\right)}{\dfrac{1}{bk \ln k}} \frac{1}{2\, kM_k} \geqq \frac{\dfrac{a}{2 \ln k}}{\dfrac{1}{bk \ln k}} \frac{1}{2\, kM_k} = \frac{ab}{4\, M_k}\,.$$

Следовательно

$$\omega\left(\frac{1}{kM_k}\right) M_k \geqq \frac{ab}{4}\,.$$

Если $n \to \infty$, то $k \to \infty$. Поэтому (15.2) действительно имеет место.

В [3] было доказанно, что, если

$$\liminf_{t=+0} \frac{\omega[t\,\omega(t)]}{\omega(t)} = 0\,, \tag{15.4}$$

то также выполняется (15.2).

В силу теоремы 1, если выполняется (15.2), то существует функция

$$f(x) \in C(\omega)\,,$$

для которой последовательность $L_n(x, X, f)$ не сходится равномерно к $f(x)$.

Таким образом, если выполняется (15.1) или (15.4), то существует $f(x)$ из $C(\omega)$, для которой

$$\limsup_{n\to\infty} \|\, f(x) - L_n(x, X, f)\,\| > 0\,,$$

что и требовалось доказать.

16. Докажем цитированную в **2** теорему 2 из [**1**].

Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условиям

$$\liminf_{t=+0} \frac{\omega[t\,\omega(t)]}{\omega(t)} = 0\,, \tag{16.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0\,. \tag{16.2}$$

Ввиду (16.1) существует последовательность стремящихся к нулю положительных чисел t_k, удовлетворяющих условию

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\omega[t_k\,\omega(t_k)]}{\omega(t_k)} = 0\,.$$

Обозначим через n_k наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию

$$n_k\, t_k \geqq 1\,.$$

Очевидно

$$\lim_{k\leftarrow\infty} n_k = \infty\,.$$

Ввиду монотонности модуля непрерывности при $n_k \geqq 2$

$$\frac{\omega[t_k\,\omega(t_k)]}{\omega(t_k)} \geqq \frac{\omega\left[\dfrac{1}{n_k}\,\omega\left(\dfrac{1}{n_k}\right)\right]}{\omega\left(\dfrac{1}{n_k - 1}\right)}\,.$$

Здесь

$$\omega\left(\frac{1}{n-1}\right) \leqq \omega\left(\frac{2}{n}\right) \leqq 2\,\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\omega\left[\dfrac{1}{n_k}\,\omega\left(\dfrac{1}{n_k}\right)\right]}{\omega\left(\dfrac{1}{n_k}\right)} \leqq 2\,\frac{\omega[t_k\,\omega(t_k)]}{\omega(t_k)}\,,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\omega\left[\dfrac{1}{n_k}\,\omega\left(\dfrac{1}{n_k}\right)\right]}{\omega\left(\dfrac{1}{n_k}\right)} = 0\,.$$

Пусть

$$\varepsilon_k = \sqrt{\frac{\omega\left[\dfrac{1}{n_k}\,\omega\left(\dfrac{1}{n_k}\right)\right]}{\omega\left(\dfrac{1}{n_k}\right)}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Очевидно

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0\,.$$

Ввиду (16.2)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\varepsilon_k\,\omega\left(\dfrac{1}{n_k}\right)\ln n_k} = \infty\,.$$

С другой стороны,

$$M_n(Y) = O(\ln n)$$

(здесь Y-матрица равноотстоящих узлов).
Поэтому для достаточно больших k

$$\frac{1}{\varepsilon_k\,\omega\left(\dfrac{1}{n_k}\right)} \geqq M_{n_k}(Y)\,. \tag{16.3}$$

Определим последовательность M_n следующим образом:

$$M_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)\varepsilon_k}\,, & \text{если } n = n_k \text{ и имеет место (16.3).} \\ M_n(Y) & \text{для остальных } n. \end{cases}$$

Тогда

$$M_n \geqq M_n(Y) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{16.4}$$

$$\lim_{k\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)M_{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\varepsilon_k} = \infty$$

и поэтому

$$\limsup_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)M_n = \infty\,. \tag{16.5}$$

С другой стороны, ввиду монотонности модуля непрерывности

$$\varepsilon_k \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

поэтому, если имеет место (16.3), то для $n = n_k$

$$\omega\left(\frac{1}{n\, M_n}\right) M_n = \frac{\omega\left(\dfrac{\varepsilon_k\, \omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n}\right)}{\varepsilon_k\, \omega\left(\dfrac{1}{n}\right)} \leqq \frac{\omega\left[\dfrac{1}{n}\, \omega\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]}{\varepsilon_k\, \omega\left(\dfrac{1}{n}\right)} = \varepsilon_k .$$

Следовательно

$$\lim_{k\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n_k\, M_{n_k}}\right) M_{n_k} = 0 ,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n\, M_n}\right) M_n = 0 . \tag{16.6}$$

В силу (16.2), (16.4) и (16.6) по теореме 2 существует матрица узлов X, такая, что

$$M_n(X) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и последовательность $L_n(x, X, f)$ равномерно сходится к функции $f(x)$, если она принадлежит множеству $C(\omega)$. В силу (16.4) и (16.5) по теореме 6 существует матрица узлов Z, удовлетворяющая условию

$$M_n(Z) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

и функция $f(x)$ из $C(\omega)$, такие, что последовательность $L_n(x, Z, f)$ неограниченна. Так как

$$M_n(X) = M_n(Z) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то теорема 2 доказанна.

17. Рассмотрим 3 примера множеств $C(\omega)$.

В первом случае $0 < \alpha \leqq 1$,

$$\omega(t) = \begin{cases} t^\alpha , & \text{если } 0 \leqq t \leqq \pi , \\ \omega(\pi) , & \text{если } t > \pi . \end{cases} \tag{17.1}$$

Во втором примере $\omega(0) = 0$, $\beta > 0$,

$$\omega(t) = \begin{cases} (-\ln t)^{-\beta} , & \text{если } 0 < t \leqq e^{-\beta} , \\ \omega(e^{-\beta}) , & \text{если } t > e^{-\beta} . \end{cases} \tag{17.2}$$

Наконец, в третьем случае $\omega(0) = 0$, $0 < \gamma < 1$,

$$\omega(t) = \begin{cases} \exp\left[-(-\ln t)^\gamma\right] , & \text{если } 0 < t \leqq \exp\left(-\gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}\right) , \\ \omega\left[\exp\left(-\gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)\right] , & \text{если } t > \exp\left(-\gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}\right) . \end{cases} \tag{17.3}$$

Чтобы убедиться в том, что они являются модулями непрерывности 2π-периодических, непрерывных функций, заметим, что это непрерывные, неубывающие функции, причем

$$\omega(0) = 0 , \tag{17.4}$$

$$\omega(t) = \omega(\pi) \text{ , если } t > \pi . \tag{17.5}$$

Кроме того, функции $\frac{t}{\omega(t)}$ не убывают, ибо их производные неотрицательны. Отсюда (см. [5], стр. 109) следует полуаддитивность функций $\omega(t)$. В силу легко доказываемой леммы из [1] каждая непрерывная, неубывающая, полуаддитивная функция, удовлетворяющая условиям (17.4)—(17.5), является, модулем непрерывности четной, 2π-периодической, непрерывной функции, совпадающей с $\omega(t)$ на отрезке $[0, \pi]$. Поэтому функции (17.1)—(17.3) являются модулями непрерывности 2π-периодических непрерывных функций.

Если функция $\omega(t)$ задана формулой (17.1), то множество $C(\omega)$, очевидно, совпадает с множеством 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица с показателем α.

Перефразируем теоремы 1—3 для случая (17.1).

Если $\alpha < 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} M_n(X)\, n^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} > 0 ,$$

то для некоторой функции $f(x)$ из $C(\omega)$

$$\limsup_{n\to\infty} \| f(x) - L_n(x, X, f) \| > 0 . \tag{17.6}$$

Если

$$M_n \geqq M_n(Y) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{17.7}$$

(Y — матрица равноотстоящих узлов) и $\alpha = 1$ или

$$0 < \alpha < 1 , \quad \limsup_{n\to\infty} M_n\, n^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0 ,$$

то существует матрица узлов X, для которой

$$M_n(X) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{17.8}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x) - L_n(x, X, f) \| = 0 \tag{17.9}$$

для всякой

17.10) $$f(x) \in C(\omega) .$$

Если имеет место (17.7), $\alpha < 1$ и

$$\limsup_{n\to\infty} M_n\, n^{-\alpha} > 0 ,$$

то существует матрица X и функция $f(x) \in C(\omega)$ такие, что выполняется (17.8) и (17.6).

Займемся теперь случаем (17.2). Если $\beta \leqq 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = \lim_{n\to\infty} (\ln n)^{1-\beta} > 0 .$$

Если $\beta > 1$, то

$$\lim_{t=+0} \frac{\omega[t\,\omega(t)]}{\omega(t)} = \lim_{t=+0} \frac{[-\ln t(-\ln t)^{-\beta}]^{-\beta}}{(-\ln t)^{-\beta}} =$$

$$= \lim_{t=+0} \frac{[-\ln t + \beta \ln(-\ln t)]^{-\beta}}{(-\ln t)^{-\beta}} = \lim_{t=+0} \left[1 - \beta \frac{\ln(-\ln t)}{\ln t}\right]^{-\beta} = 1 .$$

Поэтому в силу теоремы 1 из [1], если $\beta \leqq 1$, то при любой матрице X имеет место (17.6) для некоторой $f(x)$ из $C(\omega)$, если же $\beta > 1$, то выполнение условия

$$\lim_{n\to\infty} M_n(X)(\ln n)^{-\beta} = 0$$

необходимо и достаточно для выполнения (17.9) для всех $f(x)$ из $C(\omega)$.

Рассмотрим, наконец, случай (17.3).

Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = \lim_{n\to\infty} \exp\left[-(\ln n)^{\gamma} + \ln\ln n\right] = 0 .$$

Пусть

$$0 < t \leqq \exp\left(-\gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}\right) .$$

Тогда

$$\frac{\omega[t\omega(t)]}{\omega(t)} = \exp\left\{(-\ln t)^{\gamma} - [-\ln t \exp\left(-(-\ln t)^{\gamma}\right)]^{\gamma}\right\} .$$

Здесь

$$(-\ln t)^{\gamma} - \{-\ln t \exp[-(-\ln t)^{\gamma}]\}^{\gamma} = (-\ln t)^{\gamma} - [-\ln t + (-\ln t)^{\gamma}]^{\gamma} =$$

$$= (-\ln t)^{\gamma}\{1 - [1 + (-\ln t)^{\gamma-1}]^{\gamma}\} = (-\ln t)^{\gamma}\left\{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\gamma}{k} (-\ln t)^{k(\gamma-1)}\right\} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\gamma}{k} (-\ln t)^{\gamma + k(\gamma-1)} .$$

При $t \to 0$ сумма этого ряда стремится к $-\infty$, если $\gamma > \frac{1}{2}$, к $-\frac{1}{2}$, если $\gamma = \frac{1}{2}$, к 0, если $\gamma < \frac{1}{2}$.

Поэтому

$$\lim_{t=+0} \frac{\omega[t\,\omega(t)]}{\omega(t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma > \dfrac{1}{2}, \\ e^{-1/2}, & \text{если } \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } \gamma < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть $\gamma \leqq \frac{1}{2}$. По теореме 1 из [1] выполнение условия

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left[-(\ln n)^{\gamma}\right] M_n(X) = 0 \tag{17.11}$$

необходимо и достаточно для выполнения (17.9) для всех $f(x)$ из $C(\omega)$.

Пусть $\gamma > \frac{1}{2}$. Тогда выполнение условия.

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left\{-[\ln n\, M_n(X)]^{\gamma}\right\} M_n(X) = 0$$

необходимо, а выполнение (17.11) достаточно для равномерной сходимости $L_n(x, X, f)$ к $f(x)$ при любой $f(x)$ из $C(\omega)$.

(Поступила 29 июля 1964 г.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Лозинский, С. М.: «Пространства $\tilde{C}_{\omega}$ и $\tilde{C}^{*}_{\omega}$ и сходимость интерполяционных процессов в них.» *ДАН* **59** (1948), 1389—1392.

[2] Erdős, P.—Turán, P.: «On the role of the Lebesque functions in the theory of the Lagrange interpolation.« *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955) 47—65.

[3] Kis, O.: «О сходимости интерполяционных процессов в некоторых пространствах функций.» *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962) 65—75.

[4] Kis, O.: «О достаточном условии равномерной сходимости тригонометрического интерполирования.» *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962) 385—394.

[5] Тиман, А. Ф.: *Теория приближения функций действительного переменного.* Москва, физматгиз, 1960.

NOTES ON THE CONVERGENCE OF THE TRIGONOMETRIC INTERPOLATION

by

O. KIS

Summary

In this paper we prove the following theorems :

Let X be an arbitrary matrix of fundamental points of the trigonometric interpolation, $M_n(X)$ the respective Lebesgue-constants, $L_n(x, X, f)$ the n-th trigonometric interpolation polynomial of the function $f(x)$ on X. Then there exists a 2π-periodical function $f(x) \in \mathrm{Lip}\,1$ and a matrix X such, that

$$M_n(X) = O(n)$$

and

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{-\infty<x<\infty} |f(x) - L_n(x, X, f)| > 0 .$$

Let $\omega(t)$ be the continuity module of a 2π-periodical and continuous in $(-\infty, +\infty)$ function; $C(\omega)$ the set of 2π-periodical and continuous functions with continuity module of order of magnitude $O(\omega(t))$. If

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n\, M_n(X)}\right) M_n(X) = \infty ,$$

then there exists $f(x) \in C(\omega)$ such that

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{-\infty<x<\infty} |L_n(x, X, f)| = \infty .$$

Let Y be the matrix of the equidistant fundamental points. If for $\omega(t)$ and the sequence of numbers M_n

$$M_n \geqq M_n(Y) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

and

$$\limsup_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) M_n = \infty ,$$

then there exists a function $f(x) \in C(\omega)$ and a matrix X such that

$$M_n(X) = M_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{-\infty<x<\infty} |L_n(x, X, f)| = \infty .$$

We prove also two theorems mentioned in [1] without proof.

ON THE STATISTICAL PROPERTIES OF THE WALSH FUNCTIONS

by

P. RÉVÉSZ and M. WSCHEBOR[1]

Introduction

Let $r_n(x)$ be the n-th Rademacher function i.e. $r_n(x)$ is equal to $+1$ (resp. -1) if the n-th digit of the dyadic expansion of x $(0 \leqq x \leqq 1)$ is 0 (resp. 1). It is well known that these functions are mutually independent random variables with mean value 0 and variance 1. It implies that the sequence $\{r_n(x)\}$ is an orthonormal system, but of course it is not complete.

WALSH [1] introduced a complete orthonormal system in the interval $[0, 1]$ that contains the Rademacher functions. The definition of the n-th Walsh function $w_n(x)$ is the following: if the binary expansion of the integer n is

$$n = \sum_{k=0}^{p} \varepsilon_k 2^k$$

then

$$w_n(x) = r_1(x)^{\varepsilon_0} r_2(x)^{\varepsilon_1} \ldots r_{p+1}(x)^{\varepsilon_p} . \tag{1}$$

In [1] WALSH has proved that the sequence $\{w_n(x)\}$ is a complete orthonormal system. Later the properties of a Fourier—Walsh series were considered by many authors (see for instance [2]).

From statistical point of view the Walsh functions are pairwise independent, but they are not mutually independent. It means that the statistical treatment of the Walsh functions is much more complicated than the treatment of the Rademacher functions.

Many results show that in general an orthonormal system contains a subsequence which has the most important properties of the independent random variables (first of all the central limit theorem and the law of iterated logarithm) (cf. [3], [4], [5], [6]). Therefore it is very natural to ask: what are the analogous theorems for Walsh functions? The aim of the present paper is to give an answer to this question.

In § 1 we give a bound for the partial sums of the Walsh functions i.e. we construct a measurable function $f(x)$ (in $[0, 1]$) such that

$$\left| \sum_{k=1}^{n} w_k(x) \right| \leqq f(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) .$$

[1] This work was done while this author attended the course on probability theory, mathematical statistics and their applications held at the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest in 1963—64, sponsored by the UNESCO.

(This was proved by FINE [2]; for the sake of completeness we give a proof here.) This fact means that the sequence $\{\sum_{k=1}^{n} w_k(x)\}$ has not any interesting statistical property. Therefore we only consider the properties of the partial sums of a lacunary sequence $\{w_{n_k}(x)\}$. Namely we will consider the lacunarity condition $n_{k+1}/n_k \geqq q > 1$. (We remark that the functions w_{n_k} are mutually independent if $q \geqq 2$, so the interesting case is only $1 < q < 2$.)

In § 2. we show that there exists a subsequence $\{w_{m_k}\}$ of the Walsh functions for which the law of iterated logarithm does not hold, more exactly there exists a subsequence w_{m_k} such that

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\sum_{k=1}^{N}{}' w_{m_k}(x)}{\sqrt{2N\log\log N}} = \infty$$

for almost every x. We do not know what is the ,,smallest" function $f(n)$ for which

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} w_{l_k}(x)}{f(N)} \to 0 \tag{2}$$

for almost every x, where $\{w_{l_k}(x)\}$ is an arbitrary subsequence. It is well known that (2) holds if $f(n) = \sqrt{n}\,(\log n)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$, but we think in this special case a ,,smaller" function would be enough.

§ 3 contains a lemma. In § 4. we prove the central limit theorem for lacunary sequences of Walsh functions. This result is already known ([7]), but we think our method is simpler, and it would be able to give a little more· § 5 contains a law of iterated logarithm. In § 6 we mention some problems.

In our proofs several times we use the method of the papers [3] and [4].

§ 1. The bound of the partial sums of Walsh functions

In the introduction we have mentioned that there exists a function $f(x)$ for which

$$\left|\sum_{k=1}^{n} w_k(x)\right| \leqq f(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

In this § we prove this fact, namely we obtain our

Theorem 1. *For every $x \in (0, 1]$, the partial sums $S_m(x) = w_0(x) + w_1(x) + \ldots + w_m(x)$ are bounded. More precisely, if the dyadic expansion of x is $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$ and*

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n_0-1} = 0, \quad a_{n_0} = 1\,,$$

then

$$\max_{m\geqq 0} S_m(x) = 2^{n_0-1} \text{ and } \min_{m\geqq 0} S_m(x) = 0 \text{ if } a_n = 0 \text{ for } n > n_0$$

and

$$\max_{m\geqq 0} S_m(x) = 2^{n_0-1} \text{ and } \min_{m\geqq 0} S_m(x) = -2^{n_0-1} \text{ if } a_n = 1 \text{ for some } n > n_0\,.$$

Proof. We prove first the following identity

(3) $$S_{2^{n-1}+m}(x) - S_{2^{n-1}-1}(x) = r_n(x)S_m(x) \text{ if } 0 \leqq m \leqq 2^{n-1}-1 .$$

In fact:

(4) $$S_{2^{n-1}+m}(x) - S_{2^{n-1}-1}(x) = \sum_{k=0}^{m} w_{2^{n-1}+k}(x) = \sum_{\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-2}} r_n(x) \prod_{k=0}^{n-2} [r_{k+1}(x)]^{\varepsilon_k}$$

where the summation is extended over all possible choices of $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2}$ for which $0 \leqq \sum_{k=0}^{n-2} \varepsilon_k 2^k \leqq m$, since in the binary expansion of the numbers $2^{n-1}+k$, $k=0, 1, \dots, m$, $0 \leqq m \leqq 2^{n-1}-1$, the coefficient of 2^{n-1} is equal to one. But the right hand side of (4), is nothing else but $r_n(x) \sum_{j=0}^{m} w_j(x) = r_n(x)S_m(x)$ and hence (3) is proved.

Putting $m = 2^{n-1}-1$ into (3), we have

$$S_{2^n-1}(x) - S_{2^{n-1}-1}(x) = r_n(x)S_{2^{n-1}-1}(x) .$$

From here, if $r_n(x) = -1$ then $S_{2^n-1}(x) = 0$. Again from this identity, putting $n+1$ instead of n, if $S_{2^n-1}(x) = 0$, it follows that $S_{2^{n+1}-1}(x) = 0$, and in the same way $S_{2^{n+p}-1}(x) = 0$ $(p > 0)$. Now, according to the definition of the Rademacher's functions, the condition $a_1 = a_2 = \dots = a_{n_0-1} = 0$, $a_{n_0} = 1$, is equivalent to $r_1(x) = \dots = r_{n_0-1}(x) = 1$ and $r_{n_0}(x) = -1$, and hence, from the above consideration:

$$S_{2^n-1}(x) = 0 \quad \text{if} \quad n \geqq n_0 .$$

On the other hand, since $r_1(x) = \dots = r_{n_0-1}(x) = 1$, we have

$$w_1(x) = \dots = w_{2^{n_0-1}-1}(x) = 1 \text{ , and therefore}$$

$$S_m = m+1 \text{ if } 0 \leqq m \leqq 2^{n_0-1}-1 .$$

Using (3) we obtain that

(5) $$\max_{0 \leqq m \leqq 2^{n_0}-1} S_m(x) = 2^{n_0-1} \text{ and } \min_{0 \leqq m \leqq 2^{n_0}-1} S_m(x) = 0 .$$

From (3) if $n-1 \geqq n_0$ we have

(6) $$S_{2^{n-1}+m}(x) = r_n(x)S_m(x) \qquad (0 \leqq m \leqq 2^{n-1}-1) .$$

Hence our statement follows from (5) and (6).

§ 2. The law of iterated logarithm does not hold for all the subsequences of the Walsh functions

In this § we construct a subsequence $w_{m_k}(x)$ of the Walsh functions such that

(7) $$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\sum_{k=1}^{N} w_{m_k}(x)}{\sqrt{2N \log\log N}} = \infty$$

for almost every x.

Our sequence is the following: $w_{m_1} = w_3 = r_2 r_1$, $w_{m_2} = w_5 = r_3 r_1$, $w_{m_3} = w_6 = r_3 r_2$, $w_{m_4} = w_9 = r_4 r_1$, $w_{m_5} = w_{10} = r_4 r_2$, $w_{m_6} = w_{12} = r_4 r_3$, $w_{m_7} = w_{17} = r_5 r_1$, $w_{m_8} = w_{18} = r_5 r_2, \ldots$ i.e. our sequence contains those Walsh functions what are the products of exactly two Rademacher's functions. It means that (7) evidently follows from

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\sum\limits_{1\le i<j\le N} r_i r_j}{\sqrt{2\binom{N}{2}\log\log\binom{N}{2}}} = \infty \text{ (almost everywhere).} \tag{8}$$

But we have

$$\sum_{1\le i<j\le N} r_i r_j = \left(\sum_{i=1}^{N} r_i\right)^2 - N$$

and the simplest form of the law of iterated logarithm implies

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} r_i\right)^2}{2N\log\log N} = 1 \text{ (almost everywhere)}$$

therefore we obtain

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\sum\limits_{1\le i<j\le N} r_i r_j}{\sqrt{2\binom{N}{2}\log\log\binom{N}{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log\log N}} = 1 \text{ (almost everywhere)}$$

and hence we have (8).

§ 3. A lemma

In this section, we consider a lacunary subsequence of the Walsh functions $w_{n_1}, w_{n_2}, \ldots$ under the lacunarity condition $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1$.

The following two trivial remarks will be useful in the sequel.

Let r be the smallest integer for which $q \geqq 1 + \frac{1}{2^r}$. Then:

Remark a) At most $r+1$ members of the sequence $n_1, n_2, \ldots$ belong to the interval $[2^l, 2^{l+1})$ $(l = 1, 2, \ldots)$.

Remark b) Among the first $r+1$ digits in the binary expansion of n_{k+l} $(k = 1, 2, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots)$ there is at least one that differs from the corresponding digit of n_k.

Next, we prove the following:

Lemma. *Let $w_{n_1}, w_{n_2}, \ldots$ be a subsequence of the Walsh functions, such that $n_{k+1}/n_k \geqq q > 1$. Then*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\left[\prod_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} w_{n_k}\right)\right] = 1,$$

where λ is any complex number.

Proof: We have

$$\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{N}}w_{n_k}\right)=1+\frac{\lambda}{N^{1/2}}\sum_{k=1}^{N}w_{n_k}+\frac{\lambda^2}{N}\sum_{1\leq i<j\leq N}w_{n_i}w_{n_j}+$$

$$+\frac{\lambda^3}{N^{3/2}}\sum_{1\leq i<j<l\leq N}w_{n_i}w_{n_j}w_{n_l}+\ldots+\frac{\lambda^N}{N^{N/2}}w_{n_1}w_{n_2}\ldots w_{n_N}.$$

The expectation of the second and third terms of the right hand side of this formula is zero. So, to prove our lemma it is enough to show that the limit of the expectation of the following part is zero as $N\to\infty$. Consider a term

$$\frac{\lambda^m}{N^{m/2}}\sum_{1\leq l_1<l_2<\ldots<l_m\leq N}w_{n_{l_1}}w_{n_{l_2}}\ldots w_{n_{l_m}}.$$

In the Σ, the expectation of each term is 0 or 1, and it is 1 if and only if the exponent of each Rademacher function in $w_{n_{l_1}}w_{n_{l_2}}\ldots w_{n_{l_m}}$ is even. The problem is then, to estimate the number of terms in the sum

$$\sum_{1\leq l_1<l_2<\ldots<l_m\leq N}w_{n_{l_1}}w_{n_{l_2}}\ldots w_{n_{l_m}}$$

whose expectation is equal to 1.

Let us try to construct a product

$$w_{n_{l_1}}w_{n_{l_2}}\ldots w_{n_{l_m}}\qquad (l_1<l_2<\ldots<l_m), \tag{9}$$

whose expectation is equal to 1. At first, the number of possibilities to choose the index n_{l_m} is smaller than N. Let us suppose that $n_{l_m}\in[2^\nu, 2^{\nu+1})$; it means that $w_{n_{l_m}}$ in its expansion (1) contains the Rademacher function $r_{\nu+1}$. If

$$\mathbf{M}(w_{n_{l_1}}w_{n_{l_2}}\ldots w_{n_{l_m}})=1$$

then $w_{n_{l_1}}w_{n_{l_2}}\ldots w_{n_{l_m}}$ contains at least one $r_{\nu+1}$ more, and hence $n_{l_{m-1}}\in$ $\in[2^\nu, 2^{\nu+1})$ too. But because of remark a), we have at most r possibilities to choose the index $n_{l_{m-1}}$. $w_{n_{l_m}}w_{n_{l_{m-1}}}$ is a Walsh function again, and using remark b) it contains a Rademacher function whose index is larger than $(\nu+1)-(r+1)=\nu-r$. It means that we have at most $(r+1)^2$ possibilities to chose $n_{l_{m-2}}$. Then, the number of possibilities to choose the first three Walsh functions of the product (9) is smaller than $N(r+1)^3$. Now $w_{n_{l_m}}w_{n_{l_{m-1}}}w_{n_{l_{m-2}}}$ is a Walsh function again, and let us suppose that the Rademacher function of largest index that it contains is r_{k_1+1}. We consider two cases:

1. $n_{l_{m-3}}\in[2^{k_1}, 2^{k_1+r+1})$,
2. $n_{l_{m-3}}\notin[2^{k_1}, 2^{k_1+r+1})$.

In case 1. we have less than $(r+1)(r+2)$ possibilities to choose $n_{l_{m-3}}$. In case 2., evidently $n_{l_{m-3}}\geq 2^{k_1+r+1}$, because if it were $n_{l_{m-3}}<2^{k_1}$, r_{k_1+1} would have an odd exponent in our product (9). Furthermore, we have less than N possibilities to choose $n_{l_{m-3}}$, but if we have already fixed $n_{l_{m-3}}$, than we have again less than $r(r+1)^2$ possibilities for the next two Walsh functions.

Summarizing, in case 1. we have less than $N(r+2)^5$ possibilities to choose the first 4 Walsh functions, and in case 2. less than $N^2(r+2)^5$ for the first six ones.

$w_{n_{l_m}} w_{n_{l_{m-1}}} \dots w_{n_{l_{m-3}}}$ (resp. $w_{n_{l_m}} \dots w_{n_{l_{m-5}}}$) is again a Walsh function. Suppose that the Rademacher function of largest index that it contains is r_{k_2+1} (resp. $r_{k_2^*+1}$). We continue our procedure in a similar way. In each step, we obtain one or three new Walsh, functions and the number of possibilities to choose them is smaller than $(r+2)^2$ or $N(r+2)^3$ respectively.

Let us suppose that we obtain our m Walsh functions $w_{n_{l_m}} w_{n_{l_{m-1}}} \dots w_{n_{l_1}}$ in such a way that we choose them k times using the method 2. and $m-3k$ times using the method 1. We can do this in less than $3^k \binom{\left[\frac{m}{3}\right]}{k}$ ways, and therefore the number of products for which $\mathbf{M}(w_{n_{l_m}} \dots w_{n_{l_1}}) = 1$ is smaller than

$$3^k \binom{\left[\frac{m}{3}\right]}{k} \left(N(r+2)^3\right)^k [(r+2)^2]^{m-3k} .$$

Therefore the total number of possibilities for the choice of $w_{n_{l_m}}, \dots, w_{n_{l_1}}$ is bounded by:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{3}\right]} 3^k \binom{\left[\frac{m}{3}\right]}{k} \left(N(r+2)^3\right)^k [(r+2)^2]^{m-3k} \leqq [3N(r+2)^3 + (r+2)^6]^{m/3} .$$

Then

$$\mathbf{M}\Big[\sum_{1 \leqq l_1 < l_2 < \dots < l_m \leqq N} w_{n_{l_1}} w_{n_{l_2}} \dots w_{n_l}\Big] < [3N(r+2)^3 + (r+2)^6]^{\frac{m}{3}}$$

and

$$\lim_{N \to \infty} \left| \sum_{m=3}^{N} \frac{\lambda^m}{N^{m/2}} \mathbf{M}\left[\sum_{1 \leqq l_1 < l_2 < \dots < l_m \leqq N} w_{n_{l_1}} w_{n_{l_2}} \dots w_{n_{l_m}}\right]\right| <$$

$$< \lim_{N \to \infty} \sum_{m=3}^{N} \frac{|\lambda|^m}{N^{m/2}} [3N(r+2)^3 + (r+2)^6]^{\frac{m}{8}} = 0$$

and hence, our lemma is proved.

§ 4. Central limit theorem

Theorem 2. *If $w_{n_1}, w_{n_2}, \dots$ is a subsequence of the Walsh functions, such that $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1$, then*

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{w_{n_1} + w_{n_2} + \dots + w_{n_N}}{\sqrt{N}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt .$$

For the proof, denote by $S_N = w_{n_1} + w_{n_2} + \ldots + w_{n_N}$, by $F_N(x) = = \mathbf{P}\left(\frac{S_N}{\sqrt{N}} < x\right)$ the distribution function of $\frac{S_N}{\sqrt{N}}$, and by $\varphi_N(\lambda)$ the characteristic function of $F_N(x)$. It is enough to prove that for every λ, $\varphi_N(\lambda)$ approaches the characteristic function of the normal distribution as $N \to \infty$. Now:

$$\varphi_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} dF_N(x) = \mathbf{M}\left(e^{i\lambda \frac{S_N}{\sqrt{N}}}\right) = \mathbf{M}\left(e^{\frac{i\lambda}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} w_{n_k}}\right).$$

Because of $\exp z = (1+z) \exp\left(\frac{1}{2} z^2 + o(|z^2|)\right)$ valid for $z \to 0$ we have

$$\exp\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{N}} w_{n_k}\right) = \left(1 + \frac{i\lambda}{\sqrt{N}} w_{n_k}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{N} + o\left(\frac{\lambda^2}{N}\right)\right)$$

and therefore

$$\varphi_N(\lambda) = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 + No\left(\frac{\lambda^2}{N}\right)} \mathbf{M}\left(\prod_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{i\lambda}{\sqrt{N}} w_{n_k}\right)\right).$$

Using now the lemma of § 3 we obtain

$$\varphi_N(\lambda) \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}$$

and thus, our statement is proved.

§ 5. The law of interated logarithm

In this § we prove the following

Theorem 3. *Let $w_{n_1}, w_{n_2}, \ldots$ be a lacunary subsequence of the Walsh functions* $\left(\textit{i.e.}\ \frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1\right)$. *Then we have*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\sum_{k=1}^{N} w_{n_k}}{\sqrt{2N \log\log N}} \leq 1 \quad \textit{(almost everywhere)}.$$

Proof. First of all let us estimate the expectation $\mathbf{M}(e^{\lambda_N S_N})$, where $S_N = \sum_{k=1}^{N} w_{n_k}$ and $\lambda_N = \sqrt{\frac{2\log\log N}{N}}$. Using the formula $e^z = (1+z)\, e^{z^2/2 + o(z^2)}$ we have

$$\mathbf{M}(e^{\lambda_N S_N}) = \mathbf{M}\left(\prod_{k=1}^{N} e^{\lambda_N w_{n_k}}\right) = \mathbf{M}\left[\prod_{k=1}^{N} (1 + \lambda_N w_{n_k})\, e^{N\frac{\lambda_N^2}{2} + o(\lambda_N^2)N}\right] =$$

$$= e^{N\frac{\lambda_N^2}{2} + o(\lambda_N^2)N} \mathbf{M}\left[\prod_{k=1}^{N} (1 + \lambda_N w_{n_k})\right] = e^{\log\log N + o(1)\log\log N}\, \mathbf{M}\left[\prod_{k=1}^{N} (1 + \lambda_N w_{n_k})\right]$$

So we have to estimate $\mathbf{M}\left[\prod_{k=1}^{N}(1+\lambda_N w_{n_k})\right]$. Using the method of the proof of Lemma 1 we obtain:

$$\mathbf{M}\left[\prod_{k=1}^{N}(1+\lambda_N w_{n_k})\right]=1+\sum_{m=3}^{N}\lambda_N^m\,\mathbf{M}\left[\sum_{1\leq l_1<l_2<\ldots<l_m\leq N} w_{n_{l_1}} w_{n_{l_2}}\ldots w_{n_{l_m}}\right]<$$

$$<1+\sum_{m=3}^{N}\lambda_N^m(3\,N(r+2)^3+(r+2)^6)^{m/3}<1+\sum_{m=3}^{\infty}(\lambda_N\sqrt[3]{N}C_1)^m=$$

$$=1+\lambda_N^3C_1^3N\frac{1}{1-\lambda_N\sqrt[3]{N}C_1}<1+\lambda_N^3NC_2<e^{\lambda_N^3NC_2}=e^{o(1)}.$$

if N is great enough, where r is defined in § 3 and C_1 and C_2 are constants that do not depend on N.

So we have

$$\mathbf{M}(e^{\lambda_N S_N})<e^{\log\log N+o(1)\log\log N}.$$

Let us consider the expectation of $e^{\lambda_N S_N-T_N}$ (where $T_N=(2+\eta+o(1))\cdot\log\log N$, η is an arbitrary positive number)

$$\mathbf{M}(e^{\lambda_N S_N-T_N})<e^{-(1+\eta)\log\log N}.$$

This fact implies that

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{M}(e^{\lambda_{[\Theta^j]}S_{[\Theta^j]}-T_{[\Theta^j]}})<\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_3}{(\log[\Theta^j])^{1+\eta}}<\infty$$

(where C_3 is a constant and Θ is any number such that $1<\Theta<2$). Using the Markov inequality we have

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\lambda_{[\Theta^j]}S_{[\Theta^j]}-T_{[\Theta^j]}>0\}=\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{S_{[\Theta^j]}}{\sqrt{\left(2+\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)[\Theta^j]\log\log[\Theta^j]}}>1\right\}.$$

From the Borel–Cantelli lemma we get $\lambda_{[\Theta^j]}S_{[\Theta^j]}-T_{[\Theta^j]}>0$ only finitely many times (almost everywhere), therefore

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\lambda_{[\Theta^j]}S_{[\Theta^j]}}{T_{[\Theta^j]}}=\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{S_{[\Theta^j]}}{\sqrt{\left(2+\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)[\Theta^j]\log\log[\Theta^j]}}\leq 1\,;$$

but η is an arbitrary number thus we have

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{S_{[\Theta^j]}}{\sqrt{2[\Theta^j]\log\log[\Theta^j]}}\leq 1\,.$$

Now let us put

$$S_M^* = \sup_{[\Theta^M] < n \leq [\Theta^{M+1}]} S_n \,, \quad V_p = S_{[\Theta^{M+1}]} - S_p$$

$$A_M = \{x : S_M^* > (1+\varepsilon) \sqrt{2[\Theta^M] \log\log [\Theta^M]}\}$$

$$B_p = \{x : S_p > (1+\varepsilon) \sqrt{2[\Theta^M] \log\log [\Theta^M]}\}$$

$$C_p = B_p \cap \bar{B}_{p-1} \cap \bar{B}_{p-2} \cap \ldots \cap \bar{B}_{[\Theta^M]} \quad ([\Theta^M] < p < [\Theta^{M+1}])$$

$$p_j = \lambda(A_j)$$

where λ is the Lebesgue measure. In order to prove our statement it is enough to see that

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j < \infty \,.$$

It is easy to see that

$$A_M = \bigcap_{[\Theta^M]}^{[\Theta^{M+1}]} C_p$$

and

$$C_p \subset [C_p \cap \{x : S_{[\Theta^{M+1}]} > (1+\varepsilon) \sqrt{2[\Theta^M] \log\log [\Theta^M]} - \sqrt{2[\Theta^M]}\}] \cup$$

(10) $$\cup \left[C_p \cap \{x : | V_p | > \sqrt{2[\Theta^M]}\}\right] .$$

We have

$$\int_{C_p} (V_p)^2 \, dx = \lambda(C_p) ([\Theta^{M+1}] - p) + 2 \sum_{p \leq i < j \leq [\Theta^{M+1}]} \int_{C_p} w_{n_i} w_{n_j} \, dx \,.$$

Let us consider the sum

(11) $$\sum \int_{C_p} w_{n_i} w_{n_j} \, dx \,.$$

Evidently $\left| \int_{C_p} w_{n_i} w_{n_j} \, dx \right| \leq \lambda(C_p)$, but we will see that "almost every" member of the sum (11) is 0. More exactly we prove that at most r^4 members of the sum (11) can be different from 0. Using our remarks a) and b) of § 3, it is easy to see that the random variable $w_{n_i} w_{n_j}$ is independent from the event C_p if $n_j - p > r^2$. So we have

$$\left| \sum \int_{C_p} w_{n_i} w_{n_j} dx \right| \leq r^4 \lambda(C_p)$$

and

$$\int_{C_p} V_p^2 \, dx \leq (1+\varepsilon) \, \lambda(C_p) \, [\Theta^M] \,,$$

where ε is an arbitrary positive number and M is great enough. Using the Markov inequality we have

(12) $$\lambda(C_p \cap | V_p | > \sqrt{2[\Theta^M]}) \leq \frac{\lambda(C_p) \, (1+\varepsilon)}{2} \,.$$

(10) and (12) imply that

$$\lambda(C_p \cap \{x : S_{[\Theta^{M+1}]} > (1+\varepsilon)\sqrt{2[\Theta^M]\log\log[\Theta^M]} - \sqrt{2[\Theta^M]}\}) \geqq$$

$$\geqq \lambda(C_p)\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

So we have

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda(C_p) \leqq$$

$$\text{(13)} \quad \leqq \frac{2}{1-\varepsilon} \sum_{M=1}^{\infty} \lambda(\{x : S_{[\Theta^{M+1}]} > (1+\varepsilon)\sqrt{2[\Theta^M]\log\log[\Theta^M]} - \sqrt{2[\Theta^M]}\}) \leqq$$

$$\leqq \frac{2}{1-\varepsilon} \sum_{M=1}^{\infty} \lambda(\{x : S_{[\Theta^{M+1}]} > \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2[\Theta^M]\log\log[\Theta^M]}\}).$$

But Θ is an arbitrary number between 1 and 2, therefore we can assume that

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{\Theta} > \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Then if M is great enough

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2[\Theta^M]\log\log[\Theta^M]} =$$

$$= \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2[\Theta^{M+1}]\log\log[\Theta^{M+1}]}\sqrt{\frac{2[\Theta^M]\log\log[\Theta^M]}{2[\Theta^{M+1}]\log\log[\Theta^{M+1}]}} \geqq$$

$$\geqq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{\Theta}\sqrt{2[\Theta^{M+1}]\log\log[\Theta^{M+1}]} \geqq \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)\sqrt{2[\Theta^{M+1}]\log\log[\Theta^{M+1}]}.$$

This inequality and (13) imply our statement. Hence our proof is complete.

§ 6. Remarks

First of all we mention some simple generalization of our results.

1. If $a_1, a_2, \ldots$ is a sequence of real numbers and $w_{n_1}, w_{n_2}, \ldots$ is a lacunary subsequence of Walsh functions $\left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1\right)$, then it is easy to obtain conditions for the sequence $\{a_k\}$ ensuring the law of iterated logarithm and central limit theorem for the sequence $\{a_k w_{n_k}\}$.

2. Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of uniformly bounded independent random variables with

$$\mathbf{M}(\xi_i) = 0, \quad \mathbf{D}^2(\xi_i) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

and let us define the sequence $\{\eta_n\}$ as follows:

$$\eta_n = \xi_1^{\varepsilon_0}\xi_2^{\varepsilon_1}\ldots\xi_{p+1}^{\varepsilon_p}$$

if the binary expansion of the integer n is

$$n = \sum_{k=0}^{p} \varepsilon_k \, 2^k \, .$$

The statistical properties of the sequence $\{\eta_n\}$, can be considered in an analogous way to the one we have used for the Walsh functions.

3. Using the results of § 3. it is easy to prove the central limit theorem and the law of iterated logarithm if we substitute the lacunarity condition $n_{k+1}/n_k \geqq q > 1$ by the condition that n_{k+1}/n_k goes to 1 slowly enough.

Finally we mention the following problems:

Problem a. How is it possible to characterize those functions $f(n)$ for which

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} w_{m_k}(z)}{f(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \qquad \text{(almost everywhere)}$$

where $\{m_k\}$ is an arbitrary subsequence of the integers.

Problem b. How is it possible to characterize those subsequences $\{m_k\}$ of the integers for which

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} w_{m_k}(x)}{\sqrt{2N \log\log N}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \qquad \text{(almost everywhere).}$$

(Received August 10, 1964)

REFERENCES

[1] WALSH, I. L.: "A closed set of normal orthogonal functions." *Amer J. Math.* **55** (1923) 5—24.
[2] FINE, N. I.: "On the Walsh functions." *Transactions of the AMS.* **65** (1949) 372—414.
[3] WEISS, M.: "On the law of the iterated logarithm for uniformly bounded orthonormal systems." *Transactions of the AMS* **92** (1959) 531—553.
[4] SALEM, R.—ZYGMUND, A.: "La loi du logarithm itéré pour les séries trigonométriques lacunaires." *Bull. des Sciences Math.* **74** (1950) 209—224.
[5] WEISS, M.: "The law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series." *Transactions of the AMS* **91** (1959) 440—469.
[6] MORGENTHALER, G.: "A central limit theorem for uniformly bounded orthonormal systems." *Trans. of AMS.* **79** (1955) 281—311.
[7] MORGENTHALER, G.: "On Walsh-Fourier series." *Transactions of the AMS* **84** (1957) 472—507.

О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ВАЛША

P. RÉVÉSZ и M. WSCHEBOR

Резюме

Пусть w_n, $n \geqq 0$ функции Валша и n_k, $k \geqq 0$ некоторая подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию $n_{k+1}/n_k \geqq q > 1$. В работе доказано, что для подпоследовательностей w_{n_k}, $k \geqq 0$ имеет место центральная предельная теорема и закон повторного логарифма. Точнее:

$$\lim_{k\to\infty} \lambda \left\{x : \frac{w_{n_1}(x) + w_{n_2}(x) + \ldots + w_{n_k}(x)}{\sqrt{k}} < t\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

и

$$\lambda\left\{x : \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \frac{w_{n_1}(x) + \ldots + w_{n_k}(x)}{\sqrt{k}} \leq 1\right\} = 1\,,$$

где λ означает обычную меру Лебега.

A NOTE ON THE GENERATION OF BETA DISTRIBUTED AND GAMMA DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES

by

G. BÁNKÖVI

Summary. In paper [1] M. D. JÖHNK suggested very interesting methods for generating beta distributed and gamma distributed random variables. One of the basic steps of these procedures seems to be, however, rather inconvenient for using it in a computer. By the simple approximation suggested here this inconvenience can be avoided in many cases.

JÖHNK's methods. Let ζ be a beta distributed random variable with parameters a and β, i.e. with a density function

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\,\Gamma(\beta)}\,x^{a-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad (0 < x < 1,\ a > 0,\ \beta > 0)$$

If both a and β are positive integers the task of generating a sample value x from the above distribution is quite simple. Let $r_1, \ldots, r_{a+\beta-1}$ be namely the results of $a+\beta-1$ independent observations on the random variable ξ uniformly distributed on the interval $(0, 1)$ [in general, when using a computer "uniform random numbers" are substituted by "pseudorandom numbers" based on algebraic methods (see e.g. [14])]. Let r_k^* denote the k-th element of the ordered sample ($k = 1, \ldots, a+\beta-1$); then

$$x = r_a^*$$

is to be considered.

For the case of non-integral values of the parameters JÖHNK proposed the following procedure:

1. Select a pair of uniform random numbers r_1 and r_2.
2. Consider $x = r^{1/a}$, $y = r^{1/\beta}$.
3. If $x + y \leq 1$ holds then accept x as a random number from a beta distribution with parameters a and $\beta+1$ (or in virtue of the symmetry, accept y as a random number from a beta distribution with parameters $a+1$ and β); otherwise reject x and y and return to step 1.

In case of both parameters of the desired distribution are not greater than 1, the last step of this procedure must be modified in the following way:

3′. If $x + y \leq 1$ holds then accept $w = \dfrac{x}{x+y}$ as a random number from a beta distribution with parameters a and β; otherwise reject x and y and return to step 1.

Let $\gamma(n)$ a gamma distributed random variable with density function

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} \qquad (0 < x < \infty\,,\ n \geqq 1)\,.$$

As a random number from the exponential distribution ($n = 1$)

$$x = |\log r|$$

may be considered, where r is a uniform random number. Other methods of generating an exponentially distributed random variable can be found in [1], [4], [5], [7], [8], [11], [12], [15].

In case of n is an integer, $\gamma(n)$ can be represented as a sum of n independent $\gamma(1)$ variables; a method of generating $\gamma(n)$ based on a quite different principle is suggested by SIBUYA [12].

For generating $\gamma(n)$ if n is not an integer JÖHNK proposed the following representation:

$$\gamma(n) = \gamma([n]) + \gamma(1)\zeta\,, \tag{1}$$

where $[n]$ denotes the integral part of n, ζ is beta distributed with parameters $n - [n]$ and $[n] + 1 - n$, and the three random variables on the right-hand side of (1) are independent. (In this way the problem of generating $\gamma(n)$ is deduced to that of generating ζ, which is solved above.) SIBUYA [12] referred to a paper of I. TAKAHASHI (written in Japanese), in which another method (a rejection technique) is suggested; this method does not seem to be better than that proposed by JÖHNK.

The suggested approximation. The main problem in JÖHNK's procedures is found clearly in step 2. Then a random number x from the distribution with density function

$$f(x) = nx^{n-1} \qquad (0 < x < 1\ ;\ n > 0) \tag{2}$$

is needed. The usual method consists in selecting a uniform random number r and considering

$$x = r^{1/n} = \exp\left(\frac{\log r}{n}\right). \tag{3}$$

BUTLER ([4], p. 255) is of the opinion that "the root extraction is unpleasant but may be bypassed by using a rejection method". In case of n is an integer this "rejection method" is quite simple and consists in choosing a set of n uniform random numbers $r_1, \ldots, r_n$ and considering

$$x = \max(r_1, \ldots, r_n)\,. \tag{4}$$

For the case of non-integral values of n — as far as I know — no similar procedure has been suggested. In the following an approximative method will be described that allows to avoid the use of (3) in this case as well.

Let ε $(0 < \varepsilon \ll 1)$ be a prescribed number and n' a number of form

$$n' = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \qquad (1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_N) \tag{5}$$

where each a_k ($k = 1, \ldots, N$) is an integer; obviously for any positive n the inequality

$$|n - n'| < \varepsilon \tag{6}$$

can be satisfied by a suitable choice of $N, a_1, \ldots, a_N$. When choosing a set of N uniform random numbers $r_1, \ldots, r_N$ and considering

$$x' = \max(r_1^{a_1}, \ldots, r_N^{a_N}), \tag{7}$$

a random number from density (2) (with parameter n') is obtained. Namely, if $\xi_1, \ldots, \xi_N$ are independent random variables uniformly distributed on the interval (0, 1) then

$$\mathbf{P}\{\max(\xi_1^{a_1}, \ldots, \xi_N^{a_N}) < y\} = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}(\xi_k^{a_k} < y) = \prod_{k=1}^{N} y^{1/a_k} = y^{n'}. \quad (0 < y < 1).$$

(7) is clearly an extension of (4).

Our proposition is to use (7) instead of (3), whenever the procedure based on (7) happens to be faster than the usual one [that depends, of course, on the numbers N and a_i ($i = 1, 2, \ldots, N$)].

The error of the approximation. The bias caused by using n' instead of n can be tested in several ways.

1. First we establish the average proportion of biased numbers. Let be $n' < n$. Then

$$\eta = \max(\xi_1^{a_1}, \ldots, \xi_N^{a_N}, \xi_{N+1}^{\frac{1}{n-n'}}),$$

where ξ_k ($k = 1, \ldots, N + 1$) are independent uniform random variables, has the density function (2). So the average proportion of biased random numbers is given by the probability

$$p(n, n') = \mathbf{P}\{\xi_{N+1}^{\frac{1}{n-n'}} > \max(\xi_1^{a_1}, \ldots, \xi_N^{a_N})\} =$$

$$= n' \int_0^1 x^{n'-1}(1 - x^{n-n'})\, dx = \frac{n - n'}{n} < \frac{\varepsilon}{n}.$$

It can be shown in a similar way for $n' > n$

$$p(n, n') = \frac{n' - n}{n'} < \frac{\varepsilon}{n}.$$

In other words, on an average at most 1 biased random number will occur in a series of length $[n/\varepsilon]$.

2. Another way of investigating the error of the approximation consists in establishing the minimum sample size S necessary to make us able to discriminate (in a statistical sense) between n and n'. More exactly, let $\{\eta_i\}$ and $\{\eta_i'\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) be two series of independent random variables with density functions

$$nx^{n-1} \text{ and } n'x^{n'-1} \qquad (0 < x < 1\,;\ 0 < n' < n),$$

respectively. Let be furthermore

$$\eta(S) = \frac{\sum_{i=1}^{S} \eta_i}{S}, \qquad \eta'(S) = \frac{\sum_{i=1}^{S} \eta'_i}{S}.$$

It is easy to see that

$$\mathbf{E}(\eta'(S)) = \frac{n'}{n'+1} < \frac{n}{n+1} = \mathbf{E}(\eta(S)), \qquad (n' < n),$$

$$\mathbf{D}^2(\eta(S)) = \frac{n}{S(n+2)(n+1)^2}, \quad \mathbf{D}^2(\eta'(S)) = \frac{n'}{S(n'+2)(n'+1)^2}.$$

Let us test the null hypothesis H_0 that the true value of the parameter equals n against the simple alternative H' that it equals n'. The test is based on a set of S generated random numbers $x_1, \ldots, x_S$. Having fixed a number x_0 $\left(\frac{n'}{n'+1} < x_0 < \frac{n}{n+1}\right)$ accept H_0 if

$$\sum_{i=1}^{S} x_i \geqq Sx_0$$

and reject H_0 (accept H') if

$$\sum_{i=1}^{S} x_i < Sx_0 .$$

In what follows a central limit approach is used, i.e. $\eta(S)$ and $\eta'(S)$ are considered as if they were normally distributed; the error of this approach can be neglected if S is very large ($S \approx 10^5 - 10^7$, that is practically desired and can be assured by a suitable accuracy of the approximation). If the strength of the test (δ_1, δ_2) is prescribed (δ_1 and δ_2 denote the error of first kind and the error of second kind, respectively) a minimum sample size $S(x_0; \delta_1, \delta_2)$, assuring the required strength of the test, belongs to any x_0. Let

$$S_{\min} = \min_{x_0} S(x_0; \delta_1, \delta_2) \qquad \left(\frac{n'}{n'+1} < x_0 < \frac{n}{n+1}\,;\ 0 < \delta_1, \delta_2 \ll 1\right).$$

It can be easily seen that for any admissible x_0 and S the inequalities

$$\Phi\left(\frac{x_0 - \mathbf{E}(\eta(S))}{\mathbf{D}(\eta(S))}\right) \leq \delta_1, \tag{8}$$

$$\Phi\left(\frac{x_0 - \mathbf{E}(\eta'(S))}{\mathbf{D}(\eta'(S))}\right) \geqq 1 - \delta_2$$

must be satisfied, where $\Phi(\,\cdot\,)$ denotes the standardized normal distribution function. The inequality

$$\mathbf{E}(\eta'(S)) + \mathbf{D}(\eta'(S))\,\Phi^{-1}(1-\delta_2) \leqq x_0 \leqq \mathbf{E}(\eta(S)) + \mathbf{D}(\eta(S))\,\Phi^{-1}(\delta_1) \tag{9}$$

follows from (8). Since the left-hand term of (9) monotonically increases and the right-hand term decreases when S decreases, $S_{\min}$ can be computed from the equation obtained by considering in (9) the equality signs.

In this way

$$S_{\min} \approx \left(\frac{(n+1)\sqrt{\dfrac{n'}{n'+2}}\,\Phi^{-1}(1-\delta_2) - (n'+1)\sqrt{\dfrac{n}{n+2}}\,\Phi^{-1}(\delta_1)}{n-n'} \right)^2 \geqq$$

$$\geqq \frac{c_1 c_2}{p^2(n, n')} > \frac{c_1 c_2 n^2}{\varepsilon^2} \qquad (n' < n) \tag{10}$$

is obtained, where

$$c_1 = \min \left\{ \frac{n'(n+1)^2}{n^2(n'+2)}, \frac{(n'+1)^2}{n(n+2)} \right\},$$

$$c_2 = (\Phi^{-1}(1-\delta_2) - \Phi^{-1}(\delta_1))^2 .$$

The case of $n' \geqq n$ can be treated in a similar way resulting in (10).

Although a limited decrease of $S_{\min}$ can be obtained by using a sequential test, it may be concluded from (10) that even if many thousand random numbers are to be generated by the approximative method, there is no reason to require a greater accuracy than

$$\varepsilon \approx 10^{-3}\, n ,$$

since the bias caused by the approximation could be detected (would be significant) only on the basis of an extraordinarily large sample size (practically $S \approx 10^6$). If only a few hundred random numbers are needed, the accuracy

$$\varepsilon \approx 10^{-2}\, n$$

seems to be quite satisfactory.

On the choice of the numbers a_k. The numbers a_k in (5) satisfying (6) can be choosen in infinitely many ways. If $n \geqq 1$, the choice

$$a_1 = \ldots = a_{[n]} = 1$$

seems to be reasonable. For treating the fractional part of n (and the case of $0 < n < 1$) the following two procedures may be suggested.

1. Using the binary expansion of n $(0 < n < 1)$. The number of digits to be considered can easily be established, namely by choosing the least one for which (6) is satisfied; if the first digit of the left term is 1, the rounding is desirable. In this procedure

$$a_k = 2^{i_k} \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

where $i_1, \ldots, i_N$ are positive integers. N is the number of 1's in the binary representation of n'. The number of multiplications needed to generate a random number according to (7) is relatively small; it equals $\sum_{k=1}^{N} i_k$.

2. Let a_1 be the smallest positive integer for which

$$\frac{1}{a_1} \leqq n \qquad (0 < n < 1)$$

holds. Test the inequalities

$$\left| n - \frac{1}{a_1} \right| < \varepsilon \tag{11}$$

and

$$\left| n - \frac{1}{a_1 - 1} \right| < \varepsilon . \tag{12}$$

If at least one of (11) and (12) is satisfied, let

$$n' = \begin{cases} \dfrac{1}{a_1}, & \text{if } \left| n - \dfrac{1}{a_1} \right| < \left| n - \dfrac{1}{a_1 - 1} \right|, \\[2ex] \dfrac{1}{a_1 - 1}, & \text{if } \left| n - \dfrac{1}{a_1} \right| \geqq \left| n - \dfrac{1}{a_1 - 1} \right|. \end{cases}$$

If none of (11) and (12) is satisfied, consider the smallest positive integer a_2 for which

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leqq n$$

holds. Test the inequalities

$$\left| n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right| < \varepsilon \tag{13}$$

and

$$\left| n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2 - 1} \right| < \varepsilon . \tag{14}$$

If at least one of (13) and (14) is satisfied, let

$$n' = \begin{cases} \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}, & \text{if } \left| n - \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} \right| < \left| n - \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2 - 1} \right| \\[2ex] \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2 - 1}, & \text{if } \left| n - \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} \right| \geqq \left| n - \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2 - 1} \right|. \end{cases}$$

If none of (13) and (14) is satisfied, consider a third number a_3, and so on.

Numerical examples. The goodness of the above procedures depends on n and ε. We treat here some numerical examples to see how many operations are needed. In approximations (17), (20), (23), (26) the second method is used.

1. $n = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}785398$.

$$n' = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-5} = 0{,}78125 , \tag{15}$$

$$n' = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-8} \approx 0{,}785156 , \tag{16}$$

$$n' = 2^{-1} + 4^{-1} + 28^{-1} \approx 0{,}785714 . \tag{17}$$

2. $n = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}214602$.

(18) $n' = 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} = 0{,}21875$,

(19) $n' = 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-8} \approx 0{,}214844$,

(20) $n' = 5^{-1} + 68^{-1} \approx 0{,}214706$.

3. $n = e^{-1} \approx 0{,}367879$.

(21) $n' = 2^{-2} + 2^{-3} = 0{,}375$,

(22) $n' = 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-11} \approx 0{,}367676$,

(23) $n' = 3^{-1} + 29^{-1} \approx 0{,}367816$.

4. $n = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632121$.

(24) $n' = 2^{-1} + 2^{-3} = 0{,}625$,

(25) $n' = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-7} \approx 0{,}632813$,

(26) $n' = 2^{-1} + 8^{-1} + 140^{-1} \approx 0{,}632143$.

The number of necessary operations, the accuracy and $S_{\min}$ belonging to the above approximations can be seen in the following table (we used here $\delta_1 = 0{,}05$, $\delta_2 = 0{,}10$).

n	Approximation	Number of			ε/n	$S_{\min}$
		Uniform random numbers	Multiplications	Comparisons		
$\pi/4$	(15)	3	8	2	$5{,}4 \cdot 10^{-3}$	$4{,}4 \cdot 10^{5}$
	(16)	4	16	3	$3{,}1 \cdot 10^{-4}$	$1{,}3 \cdot 10^{8}$
	(17)	3	9	2	$4{,}1 \cdot 10^{-4}$	$7{,}7 \cdot 10^{7}$
$1-\pi/4$	(18)	3	12	2	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$	$7{,}2 \cdot 10^{4}$
	(19)	5	28	4	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$	$2{,}0 \cdot 10^{7}$
	(20)	2	10	1	$4{,}9 \cdot 10^{-4}$	$1{,}1 \cdot 10^{8}$
e^{-1}	(21)	2	5	1	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$	$4{,}9 \cdot 10^{4}$
	(22)	6	35	5	$5{,}6 \cdot 10^{-4}$	$6{,}0 \cdot 10^{7}$
	(23)	2	9	1	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	$6{,}1 \cdot 10^{8}$
$1-e^{-1}$	(24)	2	4	1	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	$1{,}0 \cdot 10^{5}$
	(25)	3	11	2	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$	$1{,}1 \cdot 10^{7}$
	(26)	3	13	2	$3{,}6 \cdot 10^{-5}$	$1{,}1 \cdot 10^{10}$

If n is very small, the number of necessary multiplications can be rather large.

Discussion. We have mentioned that several methods for generating exponential random variables can be found in the literature. The main purpose of these procedures is to avoid the necessity of using the logarithmic transformation which seems to be rather slow in a high-speed computer as compared to the special tricks suggested.

The same can be said about the generation of normal random variables; Box and Muller ([2], [10]) proposed a procedure involving logarithmic operations. In the last years, however, several fast procedures based on other principles (decomposition techniques, use of exponential random numbers, and so on) were suggested [3], [6], [9], [12], [13].

The approximative procedure suggested in this paper necessitates (for $n < 1$) about 2—4 uniform random numbers and 10—20 multiplications for obtaining a random number from density (2); the program is rather simple. In case of having a fast random number generator this procedure may be quicker than using logarithmic and exponential subroutines.

The bias caused by the approximation can be made quite negligible; in many cases the parameter n is only an estimate and thus a greater accuracy of the used technique would be superfluous.

(Received August 6, 1964.)

REFERENCES

[1] Jöhnk, M. D.: "Erzeugung von betaverteilten und gammaverteilten Zufallszahlen." *Metrika* **8** (1964), 5—15.

[2] Box, G. E. P.—Muller, M. E.: "A note on the generation of random normal deviates." *Ann. Math. Statist.* **29** (1958) 610—611.

[3] Butcher, J. C.: "Random sampling from the normal distribution." *Comp. J.* **3** (1961) 251—253.

[4] Butler, J. W.: "Machine sampling from given probability distributions." *Symposium on Monte Carlo methods*, 249—264. Wiley, New York, 1956.

[5] Clark, Ch. E., Holz, B. W.: *Exponentially distributed random numbers*. London, Oxford University Press, 1961.

[6] Marsaglia, G.: "Expressing a random variable in terms of uniform random variables." *Ann. Math. Statist.* **32** (1961) 894—898.

[7] Marsaglia, G.: "Generating exponential random variables." *Ann. Math. Statist.* **32** (1961) 899—900.

[8] Marsaglia, G.: "Generating discrete random variables in a computer." *Comm. Assoc. Comp. Mach.* **6** (1963) 37—38.

[9] Marsaglia, G.—MacLaren, M. D.—Bray, T. A.: "A fast procedure for generating normal random variables." *Comm. Assoc. Comp. Mach.* **7** (1964) 4—10.

[10] Muller, M. E.: "A comparison of methods for generating normal deviates on digital computers." *J. Assoc. Comp. Mach.* **6** (1959), 376—383.

[11] von Neumann, J.: "Various techniques used in connection with random digits." *J. Res. NBS Appl. Math. Ser.* **3** (1951) 36—38; (see also: *Collected works*, Vol. 5, Pergamon Press, London, 1963, 768—770).

[12] Sibuya, M.: "On exponential and other random variable generators." *Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo*, **13** (1962) 231—237.

[13] Sibuya, M.: "Further consideration on normal random variable generator." *Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo*, **14** (1962) 159—165.

[14] Taussky, O.—Todd, J.: "Generation and testing of pseudorandom numbers." *Symposium on Monte Carlo methoas*, 15—28. Wiley, New York, 1956.

[15] Votaw, D. F. Jr., Rafferty, J. A.: "High speed sampling." *MTAC* **5** (1951) 1—8.

О ПОЛУЧЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ И ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

G. BÁNKÖVI

Резюме

В работе [1] M. D. JÖHNK предлагает методы для получения случайных величин с бета-распределением и гамма-распределением. Один из шагов его процедур состоит в получении случайных величин с плотностью (2). Задача решается преобразованием (3), где r — равномерно распределенное случайное число. Эта процедура требует применения подпрограмм логарифмической и показательной функций, и таким образом, она оказывается неудобным (медленным) для быстродействующих машин.

В настоящей работе во избежание применения (3) предлагается приблизительный метод (7), где $r_1, \ldots, r_N$ — равномерно распределенные случайные числа, а $a_1, \ldots, a_N$ — позитивные целые числа. Оценивается ошибка приближения. Несколько численных примеров показывают число необходимых операций у приближений разной точности.

REMARKS ON BETA DISTRIBUTED RANDOM NUMBERS

by

ANDRÁS BÉKÉSSY

1. Introduction. According to M. D. JÖHNK [1], algorithms for generating both beta and gamma distributed random numbers can be based on random numbers n_a from the probability distribution

$$(1) \qquad F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leqq 0 \\ x^a & \text{for } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geqq 1 \,, \end{cases}$$

where a is real and positive.

JÖHNK's method for generating beta distributed random numbers in case of non-integral parameters has two serious difficulties, (i) the method is inefficient for larger values of the parameters, and (ii) the usual method for producing random numbers from the distribution (1), i.e. the transformation of uniform random numbers by root extracting is rather slow. In order to make the process more advantageous, G. BÁNKÖVI [2] suggested an approximative method which seems to be satisfactory in many cases. In the first part of this paper I intend to show that BÁNKÖVI's method can be improved so as to become exact not only in practical but also in strict theoretical sense, moreover, the second method suggested here may serve to speed up BÁNKÖVI's procedure. Both methods affect random numbers from (1). In the second part some improvements are introduced to JÖHNK's original method, which increase efficiency and speed up the whole process.

2. A corrected variant of BÁNKÖVI's method. Let us assume that the method described in [2] is sufficiently fast for producing random numbers n_β from $F_\beta(x) = x^\beta$, whereas our problem is to generate such ones but from (1). Suppose further that a differs from β only by a small amount, the relative difference being

$$(2) \qquad 0 < \varepsilon = \frac{\beta - a}{\beta} \ll 1\,.$$

Consider now the identity

$$(3) \qquad x^a = (1 - \varepsilon)\, x^\beta + \varepsilon\, \frac{\beta x^a - a x^\beta}{\beta - a}\,,$$

which shows that x^a can be represented as a mixture of two probability distribution functions, one of which is $F_\beta(x)$, the other being

$$E(x) = \frac{\beta x^a - a x^\beta}{\beta - a}. \tag{4}$$

Thus, the usual random selection technique can be applied: choose either $F_\beta(x)$ or $E(x)$ with probabilities given by the weights in (3), and, if the result happens to be $F_\beta(x)$, take a random number n_β from the distribution $F_\beta(x)$, but take one from $E(x)$ in the opposite case. Having supposed $\varepsilon \ll 1$, the result will be $F_\beta(x)$ for almost all trials. Sometimes, however, the result will be $E(x)$. Now, it is easy to see that $E(x)$ is the probability distribution function of the *product* of two independent random variables having distributions $F_a(x)$ and $F_\beta(x)$ respectively, so that whenever the result of the trial is $E(x)$, we have to generate two independent random numbers n_a and n_β from the mentioned distributions and take their product. As to the number n_a, at first sight it seems that there is no other way for producing this than that to perform a root extraction procedure we wanted to avoid, but it is not a serious time-loss in the present case, since only the ε-th part of the total set of numbers must be generated by this tedious way.

3. A second improvement to BÁNKÖVI's **method.** As it was just mentioned, in the course of generating random numbers n_a by the presented method, with probability ε one has to produce a random number n_a from the distribution $F_a(x)$. For doing this the identity (3) and the same random selection principle can be applied again with the result that root extracting becomes necessary only with probability ε^2 in total, and iterating this process, we can get rid of it altogether. Moreover, the random selections, which were to be performed step by step, can be unified. Summarizing the ideas sketched here, the method may be presented as follows.

Since the identity

$$F_a(x) = x^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{\beta} \varepsilon^k \left[x^\beta \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\beta^\nu}{\nu!} \left(\log \frac{1}{x}\right)^\nu \right] \qquad (\varepsilon = (\beta - a)/\beta) \tag{5}$$

with the probability distributions

$$F_{\beta k}(x) = x^\beta \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\beta^\nu}{\nu!} \left(\log \frac{1}{x}\right)^\nu \qquad (0 < x \leqq 1) \tag{6}$$

expresses x^a as a mixture, and since $F_{\beta k}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ is the distribution function of the product of k independent random variables from the distribution $F_\beta(x) = x^\beta$, let us choose a function $F_{\beta\varkappa}(a)$ at random with probability $\frac{a}{\beta}\varepsilon^\varkappa$, and, if the result happens to be $\varkappa = k$, then produce $\varkappa$ random numbers n_β independently of each other and accept their product.

Suppose now that the algorithm for producing a single number n_β requires N uniform random numbers using BÁNKÖVI's method. The efficiency E_{ff}, measured by the reciprocal of this number is then $1/N$, — if the numbers

n_β are accepted as satisfactory approximations of the n_a numbers. The efficiency of the presented method, measured similarly, can be calculated from (5) with the result

$$E_{ff} = \left[\left(\frac{a}{\beta} N + \frac{a}{\beta}\, \varepsilon \cdot 2N + \frac{a}{\beta}\, \varepsilon^2 \cdot 3\, N + \ldots\right) + 1\right]^{-1} = \left(\frac{\beta}{a} N + 1\right)^{-1}. \tag{7}$$

Supposing ε to be small, the loss of efficiency does not seem to be of any importance.

If T denotes operating time needed for producing one number by method of BÁNKÖVI, a similar calculation shows that the operating time required by our algorithm will approximately be

$$T_1 = \frac{\beta}{a} (T + \varepsilon M), \tag{8}$$

where M is the time for a multiplication, although the fact that the general machine program will be longer, and that the selection procedure needs an extra and not at all negligible amount of time, is disregarded here.

The main advantage of the presented method, however, lies not in its theoretical correctness, but rather in the speeding up of the generating procedure. Let us begin with an example, which represents a somewhat extreme case. Let us take $a = 0{,}9 + \mu$, where μ is practically negligible small, to be concrete, put $|\mu| < 0{,}01$. When applying BÁNKÖVI's method, the first task we have is to find integer numbers a_k for which

$$0{,}9 = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$$

with an error less than 0,01. If the number 0,9 is given in binary representation, then we obtain

$$0{,}9 \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}.$$

The efficiency will be 0,25 and the number S_M of the required multiplications for each number n_β amounts to 12. One may try another representations, e.g.

$$0{,}9 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \qquad (E_{ff} = 1/3\,,\ S_M = 7)\,,$$

or

$$0{,}9 \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \qquad (E_{ff} = 1/3\,,\ S_M = 7)\,,$$

but these, though better, are too tricky for a machine to find them out. Despite of this, let us accept $E_{ff} = 1/3$, $S_M = 7$ as best characteristics.

When applying our method, put $\beta = 1$, then ε becomes 0,1 approximately and for E_{ff} and S_M we have 0,47 and 0,11 respectively.

The results of further examples, some of which is taken from BÁNKÖVI's paper, are summarized in Table 1 below. Representations, which are better approximations of the numbers a in Table 1 are not treated there, since both E_{ff} and S_M would be even much worser for BÁNKÖVI's method.

Table 1

α		BÁNKÖVI's method E_{ff}	s_M	Improved method β	ε	E_{ff}	s_M
$\pi/4 \sim 2^{-1} + 2^{-2}$	$+ 2^{-5}$	0,33	8	1	0,215	0,44	0,27
$1-\pi/4 \sim 5^{-1} + 68^{-1}$		0,50	10	2^{-2}	0,142	0,46	2,5
$e^{-1} \sim 2^{-2} + 2^{-3}$		0,50	5	2^{-1}	0,264	0,42	1,7
$1-e^{-1} \sim 2^{-1} + 2^{-3}$		0,50	4	1	0,368	0,39	0,58
$10{,}2 \sim 10 + 2^{-3}$	$+ 2^{-4}$	0,083	7	11	0,073	0,078	0,079
$10{,}2 \sim 10 + 5^{-1}$		0,091	4	$10 + 2^{-2}$	0,005	0,083	2,0
$2{,}1 \sim 2 + 2^{-4}$	$+ 2^{-5}$	0,25	9	3	0,300	0,19	0,43
				$2 + 2^{-3}$	0,012	0,25	3,05
$1{,}1 \sim 1 + 5^{-1}$	$+ 5^{-1}$	0,33	6	2	0,450	0,22	0,82
				$1 + 2^{-1}$	0,267	0,27	1,7
				$1 + 2^{-2}$	0,120	0,31	2,4
				$1 + 2^{-3}$	0,022	0,33	3,1
$0{,}33 \sim 2^{-2}$	$+ 2^{-4}$	0,5	6	2^{-1}	0,340	0,40	2,03
$0{,}33 \sim 3^{-1}$		1	2	3^{-1}	0,010	0,50	2,03
$0{,}1 \sim 2^{-4}$	$+ 2^{-5}$	0,5	9	2^{-3}	0,200	0,44	4,0
$0{,}03 \sim 2^{-5}$		1	5	2^{-5}	0,040	0,49	5,3

Table 1 shows (in so far as any general conclusions may be drawn from such a small collection of examples) that for $\alpha < 1$ the simplest and in many cases the best strategy is to put β equal to the nearest integer power of 2^{-1} exceeding α. Accepting this as a general principle, we obtain a simplified form of the method having nothing common with that of BÁNKÖVI, because its basic idea of using ordered samples is left out. As an advantage, there is no need for a comparison algorithm. For $\alpha > 1$, however, putting β equal to the nearest integer exceeding α, we obtain another reduced algorithm, since now the ordered sample will consist of simple uniform random numbers.

Returning to the random selection procedure, it was tacitly assumed that this can be performed by using a single uniform random number, involving that the probabilities in question are previously computed and stored for each α. Instead of storing probabilities, one may apply the following simple algorithm: Take uniform random numbers one after another until one happens to be smaller than α/β. If this is the k-th one, then take the product of k independent random numbers η_β from the distribution x^β.

4. Two variants of JÖHNK's method for generating beta distributed random numbers. The efficiency of JÖHNK's method strongly decreases with increasing parameter values. Let the density function be

$$f_{pq}(x) = C_{pq} x^{p-1}(1-x)^{q-1},$$

where

$$C_{pq} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)},$$

then the efficiency of the quoted method, being equal to the probability of acceptance, turns out to be[1]

$$\frac{1}{2}\int_0^1 qx^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{q}{2C_{pq}} \tag{9}$$

(for non-integral values of the parameters p and q). Not only the inefficiency in itself makes the method tedious for larger values of p and q, but also that the random numbers needed are not simple uniform random ones; these must be taken from a distribution of type (1). Though root extraction can be avoided as we have seen above, the procedure seems to be too lengthy.

Let us write the density function as

$$f_{p+\alpha,\,q+\beta}(x) = C_{p+\alpha,\,q+\beta}\cdot x^{p+\alpha-1}(1-x)^{q+\beta-1},$$

where now both α and β are non-negative real numbers smaller than 1, and both p and q are positive integers. Let b_{pq} be a random number from a beta distribution with parameters p, q, and let s be a uniform random number generated independently of b_{pq}.

Accept b_{pq}, if

$$s < \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta}\,b_{pq}^\alpha(1-b_{pq})^\beta, \tag{10}$$

and reject it in the opposite case. It is easy to show that the b_{pq}'s will be beta distributed but with parameters $p+\alpha$, $q+\beta$ if selected by this rejection condition (10). The total efficiency is given by

$$E_{ff} = \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta}\cdot\frac{C_{pq}}{C_{p+\alpha,\,q+\beta}}\cdot\frac{1}{p+q},$$

since the numbers b_{pq} can be generated by ordered sets of $p+q-1$ uniform random numbers, as described in [1].

Condition (10) is inconvenient in general, because it involves root extraction. However, for special values of the parameters the algorithm may work fairly well. Let us put e.g. $\alpha = \beta = 1/2$, then the condition (10) takes the form

$$s^2 < 4\,b_{pq}(1-b_{pq})$$

and efficiency will approximately be

$$E_{ff} \approx 2\frac{\sqrt{pq}}{(p+q)^2} \qquad (p \gg 1,\ q \gg 1)$$

calculated by Stirling's formula.

---

[1] The factor $1/2$ takes account of the fact that one needs always a *pair* of random numbers for each trial.

Root extraction can be avoided altogether when using a rejection technique with double acceptance condition. Let us take two uniform random numbers s_1 and s_2, and let b_{pq} generated from the beta distribution as above. For $\alpha > \beta$ accept b_{pq} if

$$s_1^{1/\beta} < 4\, b_{pq}(1 - b_{pq}) \cap s_2^{1/(\alpha-\beta)} < b_{pq}\,,$$

and in the opposite case $\alpha < \beta$ accept b_{pq} if

$$s_1^{1/\alpha} < 4\, b_{pq}(1 - b_{pq}) \cap s_2^{1/(\beta-\alpha)} < 1 - b_{pq}\,.$$

As for $\alpha = \beta$, the second condition involving s_2 should simply be omitted. Since both $s_1^{1/\beta}$ and $s_2^{1/(\alpha-\beta)}$ are random numbers from distributions of type (1), root extraction will be not necessary when the former described method is applied.

The efficiency of this second variant is smaller than that of the first one, and bot variants become practically useless for pairs of values p,q with $p/q \ll 1$ or $p/q \gg 1$.

5. Another form of improvement. It is well known ([3], p. 153, Theorem 5) that the random variable

$$\xi_{pq} = \frac{\eta_p}{\eta_p + \eta_q} \tag{11}$$

is beta distributed if η_p, η_q are independent gamma variates. In possession of a fast algorithm for generating gamma distributed random numbers the relation (11) offers a possibility to produce beta distributed ones. As to the random numbers from a gamma distribution with non-integral parameter value, the method of M. SIBUYA [4] completed by that of I. TAKAHASHI [5] may be used. TAKAHASHI's rejection method however, though very efficient, has the disadvantage that it needs logarithms when the acceptance condition will be tested. Our proposition is therefore to use JÖHNK's second method instead of that given by TAKAHASHI.

Thus, the suggested algorithm consists of four steps as follows.

1. Produce two independent random numbers g_p and g_q from the gamma distributions

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x t^{p-1} e^{-t}\, dt \quad \text{and} \quad \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x t^{q-1} e^{-t}\, dt$$

respectively, generated e.g. by SIBUYA's method. Alternatively, BÁNKÖVI's method [6] for generating exponential random numbers may also be applied.

2. Generate two independent exponential random numbers e_1, e_2.

3. Generate two independent beta distributed random numbers $b_{\alpha,1-\alpha}$ and $b_{\beta,(1-\beta)}$ by JÖHNK's second method.

4. Compute

$$\frac{g_p + e_1 b_{\alpha,1-\alpha}}{g_p + e_1 \cdot b_{\alpha,1-\alpha} + g_q + e_2 \cdot b_{\beta,1-\beta}}$$

which gives the required number $b_{p+\alpha,\, q+\beta}$.

All this may appear to be rather complicated, but, on the other side, JÖHNK's original procedure needs over 130 (x^a-distributed) random numbers for a single beta distributed one, when the parameters $p + a$, $q + \beta$ are as small as 4,5. Our method requires in average

$$\frac{1}{E_{ff}} = p + q + 2 + \frac{2}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(2-a)} + \frac{2}{\Gamma(\beta+1)\;\Gamma(2-\beta)} \leqq \leqq p + q + 2 + \frac{16}{\pi} \tag{12}$$

uniform random numbers, if root extractions and logarithmic transformations are admitted, and it demands only slightly more when improved techniques are used. For $p = q = 4$, $a = \beta = 0{,}5$ equation (12) gives $1/E_{ff} = 15{,}1$.

(Received October 1, 1964.)

REFERENCES

[1] JÖHNK, M. D.: "Erzeugung von betaverteilten und gammaverteilten Zufallszahlen." *Metrika* **8** (1964) 5—15.
[2] BÁNKÖVI, G.: "Notes on the generation of beta distributed and gamma distributed random numbers." *This issue*, pp. 555—563.
[3] WEATHERBURN, C. E.: *A first course in mathematical statistics*. Cambridge 1957 (2nd ed.).
[4] SIBUYA, M.: "On exponential and other random variable generators." *Annales of the Institute of Statistical Mathematics* **13** (1962) 231—237.
[5] TAKAHASHI, I.: "Generating gamma random numbers", *Keiei Kagaku* **3** (1959) 1—6. In Japanese. (Referred also in Sibuya's paper [4].)
[6] BÁNKÖVI, G.: "A decomposition—rejection technique for generating exponential random variables." *This issue*, pp. 573—581.

ЗАМЕЧАНИЯ К ПРОБЛЕМЕ ПОЛУЧЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С БЕТА — РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

A. BÉKÉSSY

Резюме

Настоящая работа связана с статьями M. D. JÖHNK [1] и G. BÁNKÖVI [2]. BÁNKÖVI указал приблизительный способ для получения случайных чисел с законом распределения x^a, имеющий преимущество, что в его алгоритме нет извлечения корни. В п. 2 настоящей работы показывается, что дополнив способ BÁNKÖVI некоторым алгоритмом, он становится теоретически точным; а в п. 3 предлагается более общий, опирающийся на метод BÁNKÖVI способ, который оказывается точным и во многих случаях более скорым.

В своей вышеупомянутой работе JÖHNK указывает два способа для получения случайных чисел с бета — распределением, но эти методы оказываются малоэффективными, если параметры распределения являются большими и не целыми числами. В пп. 4 и 5 настоящей работы предлагаются разные, опирающиеся на способ JÖHNK методы, но в упомянутых случаях они являются гораздо более эффективными оригинального алгоритма.

A DECOMPOSITION-REJECTION TECHNIQUE FOR GENERATING EXPONENTIAL RANDOM VARIABLES

by

G. BÁNKÖVI

Introduction

An exponential random variable η may be generated by using the transformation

$$\eta = -\log(1 - \xi)$$

where ξ is uniformly distributed on the interval $[0, 1)$ (it is called the "direct method").

In order to produce exponentially distributed random numbers in a computer other methods were worked out (see [1], [3], [4], [6], [7], [8]). The fastest procedure is suggested by G. MARSAGLIA [4] but it has an approximative character (i.e. the exponential density function is approximated by a step function). Perhaps the best exact method of the mentioned ones is the procedure suggested by M. SIBUYA [7].

In our paper an idea of MARSAGLIA ([2], [5]) will be adapted to the exponential distribution. Originally MARSAGLIA's idea was applied to generate random normal deviates; this method seems to be rather artificial (although very fast) for the normal distribution, while the procedure described in this paper is quite natural for the exponential distribution.

§ 1. Decomposition schemes

Let us consider the following decomposition of the domain D (the area between the x axis and the exponential density function):

$$D = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\right) \tag{1}$$

where each P_k $(k = 1, 2, \ldots)$ is a rectangle of measure

$$\text{mes } P_k = h(1 - h)\, e^{-(k-1)h}$$

and each R_k is a "remainder part" (see Fig. 1) of measure

$$\text{mes } R_k = [1 - e^{-h} - h(1 - h)]\, e^{-(k-1)h}\,;$$

in practice $\frac{1}{h}$ is an integer.

The abscissa of a point placed at random in the domain D is clearly an exponentially distributed random variable. When using the decomposition (1), a random point will be placed in two stages: the first stage consists in choosing one of the P_k's or R_k's according to the adequate probability distribution (i.e. the probabilities are equal to the measures of the subdomains); in the second stage a point is placed at random in the selected subdomain and its abscissa is considered as a a random number taken from the exponential distribution.

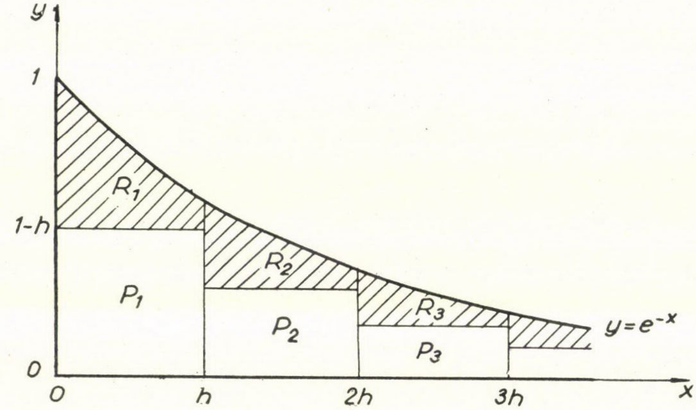


Fig. 1.

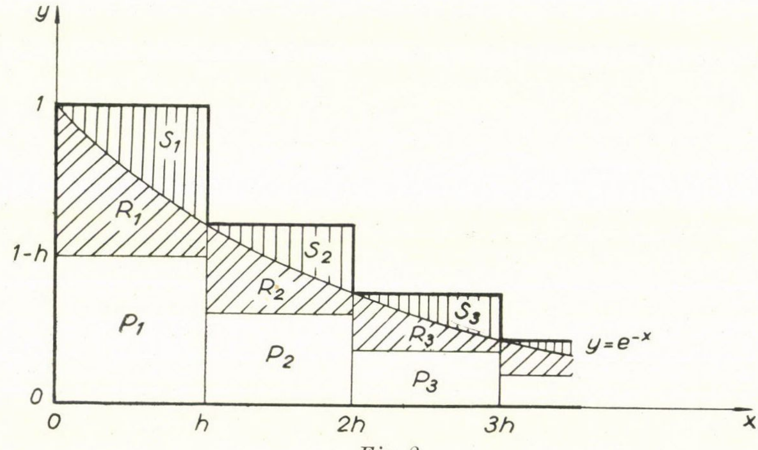


Fig. 2.

The main problem consists in establishing the abscissa of a point placed at random in one of the R_k's. This problem was solved by MARSAGLIA [3] and the procedure was generalized by SIBUYA [7]; their method is based on selecting a set of n uniform random numbers and considering the least one (n is a random variable as well). When using a computer the rejection technique proposed in this paper can be better than SIBUYA's procedure.

In order to use the rejection technique, the decomposition scheme (1) must be modified in the following way (see Fig. 2):

$$D' = D \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right) = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right) \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (R_k \cup S_k) \right]. \tag{2}$$

If a point placed at random in D' falls in any subdomain $(R_k \cup S_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, then an additional procedure is used for determining whether the point belongs to R_k or to S_k; in the first case the point will be accepted while in the second case it will be rejected.

From a practical point of view it is desirable to truncate the domain D' at the point $x = mh$ i.e. to use the decomposition:

$$D'' = \left(\bigcup_{k=1}^{m} P_k\right) \cup \left[\bigcup_{k=1}^{m} (R_k \cup S_k)\right] \cup T \tag{3}$$

where T is the tail of the distribution (see Fig. 3) and m is a large integer (e.g in the next section $m = 6/h$).

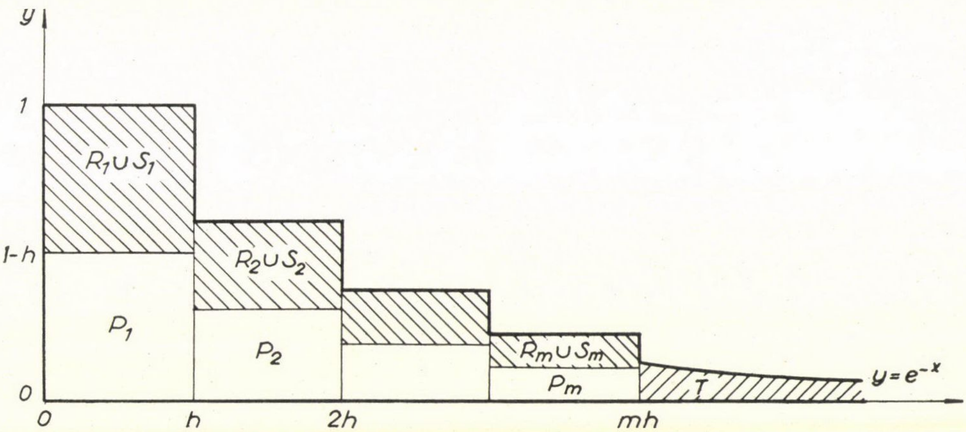


Fig. 3.

In case of a point placed at random in the domain D'' falls in T (the probability of this event is rather small) the direct method may be used.

§ 2. Description of the procedure

In our model the decomposition (3) is used (with $mh = 6$).

Let the numbers $p_1, p_2, \ldots, p_m$ be defined in the following way:

$$p_k = c \text{ mes } P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{k=1}^{m} p_k = p(A) \qquad (0 < p(A) < 1),$$

where c and $p(A)$ are constants given later.

The first step of the procedure consists in storing $p_1, p_2, \ldots, p_m$ and some other constants in the memory of the computer.

The second step is a random choice of "rectangles", "remainder parts" or "tail" with probabilities $p(A)$, $p(B)$ and $p(C)$ $\big(p(A) + p(B) + p(C) = 1\big)$, respectively. For this purpose a uniform random number u_1 is generated [i.e.

u_1 can be considered as a sample value taken on the random variable ξ uniformly distributed on the interval $[0, 1)$] and

if $0 \leqq u_1 < p(A)$ then "strategy A",

if $p(A) \leqq u_1 < p(A) + p(B)$ then "strategy B",

if $p(A) + p(B) \leqq u_1 < 1$ then "strategy C" will be used.

The third step consists in applying the selected strategy. After having performed the third step the program returns to the second step.

Strategy A. 1. Find that value of k ($k = 1, 2, \ldots, m$) for which

$$\sum_{j=0}^{k-1} p_j \leqq u_1 < \sum_{j=0}^{k} p_j \qquad (p_0 = 0) \tag{4}$$

holds.

2. Accept

$$u_1' = h\left(\frac{u_1 - \sum_{j=0}^{k-1} p_j}{p_k} + k - 1\right)$$

as a random number from the exponential distribution (u_1' is uniformly distributed on the interval $[h(k-1), hk)$, and thus the "rectangles" of the decomposition (3) are generated).

Strategy B. 1. Compute

$$v_1 = \frac{p(A)}{p(B)}\left(u_1 - p(A)\right).$$

2. Find that value of k ($k = 1, 2, \ldots, m$) for which

$$\sum_{j=0}^{k-1} p_j \leqq v_1 < \sum_{j=0}^{k} p_j$$

holds.

3. Compute

$$v_1' = \frac{h}{p_k}\left(v_1 - \sum_{j=0}^{k-1} p_j\right).$$

4. Generate a second uniform random number u_2.

5. If

$$1 - hu_2 < e^{-v_1'}$$

then accept

$$v_1'' = v_1' + h(k-1)$$

as a random number from the exponential distribution. If

$$1 - hu_2 \geqq e^{-v_1'}$$

then reject v_1'.

5*. The rejection technique can be speeded up by using (instead of 5.) the following procedure:

Accept v_1'', if

$$1 - hu_2 < 1 - v_1'.$$

If

$$1 - hu_2 \geqq 1 - v_1',$$

then compare $1 - hu_2$ to $1 - v_1' + \frac{1}{2!} v_1'^2$. If

$$1 - hu_2 \geqq 1 - v_1' + \frac{1}{2!} v_1'^2,$$

then reject v_1', otherwise compare $1 - hu_2$ to $1 - v_1' + \frac{1}{2!} v_1'^2 - \frac{1}{3!} v_1'^3$, and so on. Let us introduce the notation

$$s(r) = \sum_{n=0}^{r} (-1)^n \frac{(v_1')^n}{n!} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

In general, if

$$s(2r - 1) \leqq 1 - hu_2 < s(2r) \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

holds, then compare $1 - hu_2$ to $s(2r + 1)$ and accept v_1'', if

$$1 - hu_2 < s(2r + 1),$$

otherwise continue making comparisons; if

$$s(2r + 1) \leqq 1 - hu_2 < s(2r) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

holds, then compare $1 - hu_2$ to $s(2r + 2)$ and reject v_1', if

$$1 - hu_2 \geqq s(2r + 2),$$

otherwise continue making comparisons.

In this way the "remainder parts" of the decomposition (3) are generated. Strategy B is based on the special property of the exponential function that the conditional density function of the abscissa of a point placed at random in any given R_k is the same for every k ($k = 1, 2, \ldots, m$).

It is to be noted that for step 2 of strategy B the same subroutine may be used as for step 1 of strategy A.

Strategy C. Accept

$$z_1 = -\log(1 - u_1)$$

as a random number from the exponential distribution, i.e. the tail of the distribution is generated by the direct method (but this event occurs very rarely); the same principle was used by MARSAGLIA [4].

§ 3. Evaluation of the constants and the number of operations

$p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ and p_k ($k = 1, 2, \ldots, m$).

It is easy to see from § 1 and § 2 that

$$p(A) = c \operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{m} P_k,$$

$$p(B) = c \operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{m} (R_k \cup S_k)\,,$$

$$p(C) = c \operatorname{mes} T\,,$$

$$\frac{1}{c} = \operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{m} P_k + \operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{m} (R_k \cup S_k) + \operatorname{mes} T\,.$$

Since

$$\operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{m} P_k = h(1-h) \sum_{k=1}^{m} e^{-(k-1)h} = h(1-h)\frac{1-e^{-mh}}{1-e^{-h}}\,,$$

$$\operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{m} (R_k \cup S_k) = h^2 \sum_{k=1}^{m} e^{-(k-1)h} = h^2 \frac{1-e^{-mh}}{1-e^{-h}}\,,$$

$$\operatorname{mes} T = e^{-mh}\,,$$

we obtain the following results:

$$c = \frac{1-e^{-h}}{h(1-e^{-mh}) + e^{-mh}(1-e^{-h})}\,,$$

$$p(A) = \frac{h(1-h)(1-e^{-mh})}{h(1-e^{-mh}) + e^{-mh}(1-e^{-h})}\,,$$

$$p(B) = \frac{h^2(1-e^{-mh})}{h(1-e^{-mh}) + e^{-mh}(1-e^{-h})}\,,$$

$$p(C) = \frac{e^{-mh}(1-e^{-h})}{h(1-e^{-mh}) + e^{-mh}(1-e^{-h})}$$

and

$$\frac{p(A)}{p(B)} = \frac{1-h}{h}\,,$$

furthermore

$$p_k = \frac{h(1-h)(1-e^{-h})}{h(1-e^{-mh}) + e^{-mh}(1-e^{-h})}\, e^{-(k-1)h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

The acceptance probability in applying strategy B is equal to

$$Q = \frac{\operatorname{mes} R_1}{\operatorname{mes} (R_1 \cup S_1)} = \frac{1}{h^2}\bigl(1 - e^{-h} - h(1-h)\bigr)\,.$$

Selecting one of the strategies. This procedure necessitates one comparison if strategy A is selected and two comparisons otherwise.

Searching procedure. (Step 1 of strategy A and step 2 of strategy B.) There are several ways for finding that value of k ($k = 1, 2, \ldots, m$) for which (4) holds. A very fast procedure was suggested by MARSAGLIA[4] but it requires several hundred or thousand storage locations.

A well-known method is to compare u_1 (or v_1) to p_1, $p_1 + p_2$ and so on, and to stop when (4) holds. This procedure necessitates (on an average)

$$E_{SC} = \frac{\sum_{j=1}^{m} jp_j - p_m}{p(A)} = \frac{1}{1 - e^{-h}} - \frac{e^{-mh}(m - 1 + e^h)}{1 - e^{-mh}}$$

comparisons.

Rejection technique. (Step 5* of strategy B.) Let q_n denote the probability of the event that procedure 5* comes to an end after the n-th comparison (either by accepting v_1'' or rejecting v_1'). It is easy to compute that

$$q_1 = \frac{1}{2},$$

$$q_n = \frac{1}{h^2}\left(\frac{h^n}{n!} - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

The expected number of comparisons is equal to

$$E_{RC} = \sum_{n=1}^{\infty} nq_n = \frac{e^h - 1 - h(1 - h)}{h^2} = \frac{3}{2} + \frac{h}{6} + O(h^2).$$

The expected number of multiplications and divisions is equal to

$$E_{RM} = E_{RD} = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)\, q_n = E_{RC} - 1.$$

Number of operations. Numerical values of the constants (except those of the p_k' s) and the expected number of operations are tabulated for several values of h in Tables 1, 2, and 3 (in the calculations $mh = 6$ was used).

Table 1

Numerical values of the constants

h	m	c	$p(A)$	$p(B)$	$p(C)$	$\frac{p(A)}{p(B)}$	Q	E_{SC}	E_{RC}
0,1	60	0,95174	0,89788	0,09976	0,00236	9	0,51626	10,36	1,52
0,125	48	0,94016	0,87296	0,12471	0,00233	7	0,52020	8,39	1,52
0,25	24	0,88505	0,74836	0,24945	0,00219	3	0,53919	4,46	1,54

If $N(A)$, $N(B)$ and $N(C)$ denote the required number of operations of any type (e.g. multiplications or comparisons) belonging to strategies A, B and C, respectively, then the expected number of operations of that type in producing a single exponential random number is equal to

$$N = \frac{1}{c}\left(p(A)\, N(A) + p(B)\, N(B) + p(C)\, N(C)\right).$$

SIBUYA's procedure necessitates the use of at least three uniform random numbers (theoretically, but practically only at least two ones), 1 shift operation and 2 different searching algorithms. It seems to depend on the special properties of the computer whether his procedure or the decomposition-rejection technique would be better.

Table 2

Expected number of operations belonging to strategies A, B and C

	Expected number of					
	uniform random numbers	multiplications	divisions	shift operations	comparisons	logarithmic transformations
$N(A)$	1	—	1	1	$1+E_{SC}$	—
$N(B)$	2	E_{RC}	E_{RC}	$2+Q$	$2+E_{SC}+E_{RC}$	—
$N(C)$	1	—	—	—	2	1

Table 3

Expected number of operations in producing a single exponential random number

h	Expected number of					
	uniform random numbers	multiplications	divisions	shift operations	comparisons	logarithmic transformations
0,1	1,16	0,16	1,10	1,21	12,18	0,0024
0,125	1,20	0,20	1,13	1,26	10,30	0,0025
0,25	1,41	0,43	1,28	1,56	6,88	0,0025

Modifications of the program. In order to speed up the procedure the program can be modified in several ways. We shall mention here two possibilities.

1. The number of comparisons can considerably be reduced by performing the searching procedure in two stages. Let $l_1, l_2, \ldots, l_r$ be positive integers $l_1 < l_2 < \ldots < l_r = m$ and

$$\sum_{j=0}^{l_i} p_j = L_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)\,, \quad L_0 = 0\,.$$

In the first stage that value of i ($i = 1, 2, \ldots, r$) will be found for which

$$L_{i-1} \leqq u < L_i$$

holds, where u is uniformly distributed on the interval $[0, p(A))$. In the second stage that value of k ($k = l_{i-1}+1, l_{i-1}+2, \ldots, l_i$) will be found for which

$$\sum_{j=0}^{k-1} p_j \leqq u < \sum_{j=0}^{k} p_j$$

holds. In addition to the original program the constants $L_1, L_2, \ldots, L_r$ must be stored in the memory. The first stage of the procedure may be combined with the selection of the strategies as well.

2. In the original program the numbers $p_1, p_2, \ldots, p_m$ are stored. If we can afford to use more than $2m$ storage locations, the numbers p_k and $1/p_k$ (or $\sum_{j=1}^{k} p_j$ and $1/p_k$) ($k = 1, 2, \ldots, m$) may be stored. In this way multiplications may be performed instead of divisions.

(Received October 28, 1964.)

REFERENCES

[1] Butler, J. W.: "Machine sampling from given probability distributions." *Symposium on Monte Carlo methods*, 249—264. Wiley, New York, 1956.

[2] Marsaglia, G.: "Expressing a random variable in terms of uniform random variables." *Ann. Math. Statist.* **32** (1961) 894—898.

[3] Marsaglia, G.: "Generating exponential random variables." *Ann. Math. Statist.* **32** (1961) 899—900.

[4] Marsaglia, G.: "Generating discrete random variables in a computer." *Comm. Assoc. Comp. Mach.* **6** (1963) 37—38.

[5] Marsaglia, G.— MacLaren, M. D.—Bray, T. A.: "A fast procedure for generating normal random variables." *Comm. Assoc. Comp. Mach.* **7** (1964) 4—10.

[6] von Neumann, J.: "Various techniques used in connection with random digits." *J. Res. NBS Appl. Math. Ser.* **3** (1951), 36—38; (see also: *Collected works*, Vol. 5, 768—770. Pergamon Press, London, 1963.

[7] Sibuya, M.: "On exponential and other random variable generators." *Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo*, **13** (1962) 231—237.

[8] Votaw, D. F., Jr.—Rafferty, J. A.: "High speed sampling." *MTAC* **5** (1951) 1—8.

О ПОЛУЧЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ И ОТКАЗА

G. BÁNKÖVI

Резюме

В работе предлагается метод для получения на быстродействующих машинах случайных величин с показательным законом распределения.

Пусть разлагается область D'' на области трех следующих типов (рис. 3): на прямоугольники P_k, прямоугольники $R_k \cup S_k$ и «хвост» T. В области D'' наудачу помещаются точки. Абсциссы точек падающих в прямоугольники P_k или в «хвост» T определяются (стратегией A или стратегией C) и считаются случайными величинами с показательным законом распределения. Для точек падающих в области $R_k \cup S_k$ применяется стратегия B (способ отказа, rejection technique) т. е. точка падающая в область $\bigcup_1^m S_k$ отказывается, а абсцисса точки падающей в область $\bigcup_1^m R_k$ считается искомой случайной величиной. В § 2 процедура подробно описывается. В § 3 вычисляются значения параметров модели и ожидаемое число операций необходимых для получения одного случайного числа с показательным законом распределения (табл. 1, 2, 3).

ON THE WEIGHTED AVERAGES OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

by

J. KOMLÓS and P. RÉVÉSZ

Introduction

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of independent random variables with common expectation $\mathbf{M}(\xi_i) = m$ $(i = 1, 2, \ldots)$ and with finite variances $\mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2$. An important question of the theory of probability is to find conditions ensuring the convergence for $n \to \infty$ of the average

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \tag{1}$$

to the number m.

The well known forms of the laws of large numbers state that

a) *the average* (1) *converges to m in probability if* $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \to 0$

b) *the average* (1) *converges to m with probability* 1 *if* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \infty$. (Theorem of KOLMOGOROV.)

These results are best possible in the following sense: if we have an arbitrary sequence $\{\sigma_k^2\}$ of positive real numbers for which $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ does not converge to 0 $\left(\text{or } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} = \infty \text{ respectively}\right)$ then it is possible to construct a sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ of independent random variables such that $\mathbf{M}(\xi_i) = m$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$ and the average (1) does not converge to m in probability (or with probability 1 resp.).

In this paper we investigate the following question: is it possible to find a weighted average of $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ which converges to m for $n \to \infty$ if the variances σ_k^2 increase so rapidly that the conditions of the statements a) or b) do not hold.

§ 1. The theorems

We will use the following well known

Lemma. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of independent random variables with* $\mathbf{M}(\xi_i) = m$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$. *Then*

$$\mathbf{D}^2(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \ldots + x_n \xi_n) \geq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}}$$

(where $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are arbitrary real numbers for which $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$) and the equality holds if and only if

$$x_k = \frac{1}{\sigma_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) .$$

The results of this paper can be summarized in the following two theorems:

Theorem 1. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of independent random variables with $\mathbf{M}(\xi_i) = m$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Then*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{\sigma_k^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}} \tag{2}$$

converges to m with probability 1, and in probability if and only if

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2} = \infty . \tag{3}$$

We mention that condition (3) holds if the sequence $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ is bounded, or at least $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = O(\log n)$ or $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2} = \infty$.

Theorem 2. *If $\{\sigma_k^2\}$ is any sequence of positive real numbers for which $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} < \infty$, then there exists a sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ of independent random variables such that*

$$\mathbf{M}(\xi_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$\mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

and the weighted average

$$a_1^{(n)} \xi_1 + a_2^{(n)} \xi_2 + \ldots + a_n^{(n)} \xi_n \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} = 1 ; \; n = 1, 2, \ldots \right) \tag{4}$$

does not converge to m in probability for any choice of the weights $a_k^{(n)}$.

Summarizing Theorems 1 and 2 we can say if $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is a sequence of independent random variables with $\mathbf{M}(\xi_i) = m$ and $\mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2$ then the weighted average (2) of $\xi_1, \xi_2, \ldots$ converges to m with probability 1 provided that $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} = \infty$, but if $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} < \infty$ then in general there does not exist a weighted average of these random variables which converges to m even in probability.

From a statistical point of view the meaning of our results is the following: if we have to estimate the parameter m from a sample containing independent elements $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ the expectations of which are all equal to the unknown value m and having finite variances $\mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$ then the best linear estimate of m is the weighted average (2), if the variances σ_i^2 are known and (3) holds.

§ 3. The proof of the theorems

The proofs of these theorems are very simple, only well known methods of proof of the laws of large numbers will be used. For the sake of completeness we give also the proof of our lemma.

It follows easily from the Cauchy inequality

$$1 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \sigma_k \frac{1}{\sigma_k}\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sigma_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}\right)$$

so

$$\mathbf{D}^2(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \ldots + x_n \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sigma_k^2 \geqq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}}$$

and the equality holds if and only if $x_k \sigma_k = \frac{\lambda}{\sigma_k}$; but $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, therefore $\lambda = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}}$.

In the proof of our Theorem 1 we will use the following theorems.

KRONECKER's **theorem.** *If λ_n is a positive monotonically increasing sequence, tending to infinity, then the convergence of the series* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\lambda_n}$ *implies* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{\lambda_n} = 0$, *where u_n is an arbitrary sequence of real numbers.*

KOLMOGOROV's **theorem.** *If $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is a sequence of independent random variables with $\mathbf{M}(\xi_i) = 0$ and $\mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$ then the series $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ converges to a square integrable random variable with probability 1 provided that $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$.*

Theorem *of* ABEL-DINI. *If $a_1, a_2, \ldots$ is a sequence of positive numbers, then*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2} < \infty .$$

Using these theorems we obtain our Theorem 1 as follows.

Let us put

$$\eta_k = \frac{\xi_k}{\sigma_k^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sigma_j^2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

then

$$\mathbf{D}^2(\eta_k) = \frac{1}{\sigma_k^2 \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sigma_j^2}\right)^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

therefore the Theorem of ABEL-DINI implies that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}^2(\eta_k) < \infty .$$

So by KOLMOGOROV's theorem

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sigma_k^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

converges with probability 1, and by KRONECKER's theorem we have Theorem 1.

To prove Theorem 2 we have to construct a sequence $\xi_1, \xi_2, \ldots$ of random variables with the desired properties. Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be independent random variables, having a normal distribution with mean value m and variance σ_i^2 ($\mathbf{M}(\xi_i) = 0$, $\mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$). Then by the Lemma the variance of the weighted average (4) does not converge to 0 and this fact proves our Theorem 2.

We have to emphasize that it is very easy to construct a sequence ξ_1, $\xi_2, \ldots$ of independent random variables such that

$$\mathbf{M}(\xi_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{D}^2(\xi_i)} < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

and the sequence

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$$

converges to 0 (or another number) with probability 1; but in this case

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_n \geq n\} < \infty$$

and

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}^2(\xi_n^*)}{n^2} \to 0$$

so a' fortiori

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{D}^2(\xi_n^*)} = \infty$$

where ξ_n^* is defined by

$$\xi_n^* = \begin{cases} \xi_n & \text{if } |\xi_n| < n \\ 0 & \text{if } |\xi_n| \geqq n . \end{cases}$$

(Received September 29, 1964.)

О ВЗВЕШЕННОМ СРЕДНЕМ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

J. KOMLÓS и P. RÉVÉSZ

Резюме

Авторы доказывают следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *последовательность независимых случайных величин, для которых*

$$\mathbf{M}(\xi_i) = m\,,\ \mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2\ (i = 1, 2, \ldots)\ \textit{и} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} = \infty\,.$$

Тогда взвешенное среднее

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{\sigma_k^2}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}}$$

сходится с вероятностью 1 *к* m.

Теорема 2. *Если* $\{\sigma_k^2\}$ — *последовательность положительных чисел с* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sigma_k^2 < \infty$, *то существует последовательность* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *независимых случайных величин с*

$$\mathbf{M}(\xi_i) = 0,\ \mathbf{D}^2(\xi_i) = \sigma_i^2\ (i = 1, 2, \ldots)$$

такая, что взвешенное среднее

$$a_1^{(n)} \xi_1 + a_2^{(n)} \xi_2 + \ldots + a_n^{(n)} \xi_n \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} = 1,\ \ n = 1, 2, \ldots\right)$$

не сходится по вероятности к 0, *как бы мы ни выбралы весы* $a_k^{(n)}$.

DECOMPOSITIONS OF COMPLETE GRAPHS INTO FORESTS

by

LOWELL W. BEINEKE[1]

The arboricity $a(G)$ of a graph G is the minimum number of forests whose union is G. In a recent paper [2], NASH—WILLIAMS determined the arboricity of all graphs. In this note we provide explicit constructions for the fewest forests needed for two classes of graphs. These are the *complete graphs* K_p, having p points with every pair adjacent, and the *complete bipartite graphs* $K_{m,n}$, having m light points and n dark points with every light point adjacent to every dark one.

Theorem 1. *The arboricity of the complete graph K_p is*

$$a(K_p) = \left[\frac{p+1}{2}\right].$$

Proof. Since K_p has p points and $\frac{1}{2}p(p-1)$ lines, $a(K_p) \geqq \frac{p}{2}$; that is, $a(K_p) \geqq \left[\frac{p+1}{2}\right]$.

In providing constructions for the reverse inequality, we first let p be even. Take p points as the vertices of a regular polygon, and label them clockwise $1, 2, \ldots, p-1, 0$. Form T_1 as the path whose consecutive points are $1, 0, 2, p-1, 3, \ldots, \frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p+1$. This is illustrated in Figure 1 for the case $p = 8$. For $i = 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}p$, form the path T_i from the path T_{i-1} by leaving the points fixed and rotating the lines one position clockwise. Again, see Figure 1. The path T_i can be defined more explicitly as follows: If t_j denotes the j'th point of T_1, then the j'th point of T_i is $t_j + i \pmod p$. It is quite clear that every line of K_p appears in exactly one of the $\frac{p}{2}$ paths formed in this way. Hence, $a(K_p) = \frac{p}{2}$.

[1] University of Michigan.

To form $\frac{p+1}{2}$ forests whose union is K_p when p is odd, first form the paths as described above for K_{p-1}. From these, construct $\frac{p-1}{2}$ forests by adding an isolated p'th point; then construct another graph by placing each of the original $p - 1$ points adjacent to the p'th point, forming a tree. See Figure 2 for $p = 9$. This completes the constructions.

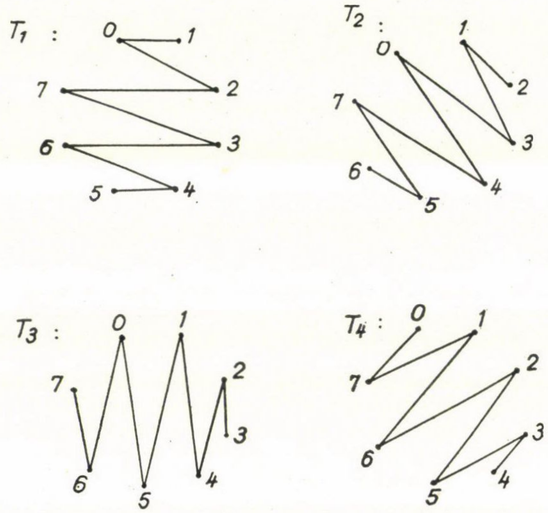


Figure 1.

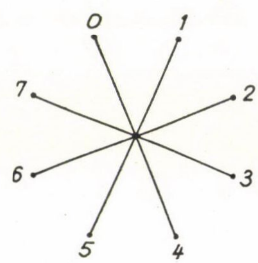


Figure 2.

As a corollary to this proof, we note that K_p is the union of $\frac{p}{2}$ line-disjoint paths when p is even, and that K_p is the union of $\frac{p-1}{2}$ line-disjoint cycles when p is odd. This last assertion follows from the proof by adding a p'th point adjacent to the end points of the paths formed for K_{p-1}.

Our second theorem gives the arboricity of complete bipartite graphs, and the devices used in the proof are similar to those in [1]. We find it helpful to begin by developing some preliminary results.

Lemma 1. *Let m and k be fixed positive integers with $1 \leqq \frac{m}{2} < k < m$. Let $r = \left[\frac{k(m-1)}{m-k}\right]$ and $f(x) = \frac{mx}{m+x-1}$. Then r is the greatest integral value of x for which $\{f(x)\} = k$.*

Proof. Since $m \geqq 2$ by hypothesis, $f(x)$ is a strictly increasing function of the positive real variable x. If $f(x) = k$, then $x = \frac{k(m-1)}{m-k}$. Hence, $\{f(r)\} \leqq k$ and $\{f(r+1)\} \geqq k+1$. Since $f(r+1) - f(r) = \frac{m(m-1)}{(m+r)(m+r-1)} <$ < 1, it follows that $\{f(r+1)\} - \{f(r)\} \leqq 1$, so $\{f(r)\} = k$ and $\{f(r+1)\} =$ $= k+1$. The lemma now follows immediately from the fact that $\{f(x)\}$ is a nondecreasing function of x.

Let m, k, and r be as in the lemma. We define an $m \times r$ array A whose cells contain finite sequences of positive integers in the following way. Let

$$c(i, j) = \left\{(i+j)\left(\frac{r}{k}\right)\right\} - \left\{(i+j-1)\left(\frac{r}{k}\right)\right\}$$

be the length of the sequence in the (i, j) cell of A. Let the entries in the first row be consecutive positive integers; that is, the entries in the $(1, 1)$ cell are $1, 2, \ldots, c(1, 1)$, in the $(1, 2)$ cell are $c(1, 1) + 1, \ldots, c(1, 1) + c(1, 2)$; and so on. Now define the entries in the j'th column inductively: Assuming the entries in the $(i-1, j)$ cell are given, let the (i, j) cell contain $c(i, j)$ consecutive integers beginning with the last entry in the $(i-1, j)$ cell. Now reduce all entries modulo r. We illustrate with $m = 6$, $k = 4$, $r = 10$:

$$\begin{pmatrix} 123 & 45 & 678 & 90 \\ 34 & 567 & 89 & 012 \\ 456 & 78 & 901 & 23 \\ 67 & 890 & 12 & 345 \\ 789 & 01 & 234 & 56 \\ 90 & 123 & 45 & 678 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2. *The array A has the following two properties:*

(i) *The entries in each row are r consecutive integers modulo r.*

(ii) *In each column, if the first entry of all cells except the first is excluded, the remaining entries are consecutive integers modulo r and there are at most r of them.*

Proof. Since the terms being summed telescope, for each i,

$$\sum_{j=1}^{k} c(i, j) = \left\{(i+k)\left(\frac{r}{k}\right)\right\} - \left\{i\left(\frac{r}{k}\right)\right\} = r.$$

Hence each row contains r integers. That these are consecutive integers follows from the obvious fact that

$$c(i, j) = c(i-1, j+1), \text{ for } i = 2, 3, \ldots, m \text{ and } j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

and from our choice of the first entry in each cell. This proves that A has property (i).

The total number of entries in the j'th column is, using the telescoping property of the terms,

$$\sum_{i=1}^{m} c(i, j) = \left\{(m+j)\frac{r}{k}\right\} - \left\{j\frac{r}{k}\right\} \leq \left\{\frac{mr}{k}\right\} \leq m + r - 1,$$

since $k = \left\{\dfrac{mr}{m+r-1}\right\}$ by Lemma 1. Subtracting the m entries, corresponding to those first integers in each cell appearing in the preceding cell, we have no more than $r - 1$ entries remaining in column j. That these are consecutive residue classes is immediate. Hence, A also has property (ii).

Theorem. *The arboricity of the complete m by n bipartite graph $K_{m,n}$ is* $a(K_{m,n}) = \left\{\dfrac{mn}{m+n-1}\right\}$.

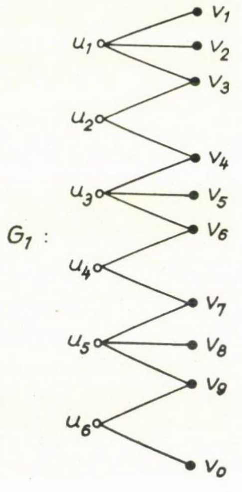


Figure 3.

Let m and n be given. If $m = 1$, then the graph is already a forest. If $n > (m-1)^2$, then $a(K_{m,n}) \geq m$, by Lemma 1. That $a(K_{m,n}) = m$ in this case follows from m copies of the graph $K_{1,m}$. Hence we assume $2 \leq m \leq$ $\leq n \leq (m-1)^2$. Set $k = \left\{\dfrac{mn}{m+n-1}\right\}$. Then $\dfrac{m}{2} < k < m$. Define $r =$ $= \left[\dfrac{k(m-1)}{m-k}\right]$ as in Lemma 1. We will use the array A to show that $a(m, r) \leq k$, from which it will follow that $a(m, n) = k$, since $a(m, n) \geq k$.

Define k graphs $G_1, G_2, \ldots, G_k$ using the k columns of the array. Each graph G_j has m light points $u_1, u_2, \ldots, u_m$ and r dark points $v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}, v_0$. In G_j, let u_i be adjacent to v_h if and only if the integer h is in the (i, j) cell of A. That G_j is acyclic follows immediately from property (ii) since no cycle can occur. That the union of the graphs G_j is $K_{m,r}$ follows from (i), because it implies that each u_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ is adjacent to each v_h, $(h = 0, 1, \ldots, r-1)$ since in the i'th row h appears in some column j. Therefore $a(K_{m,r})$, and hence $a(K_{m,n})$, is at most k. But since a tree contained in $K_{m,n}$ has $m + n - 1$ lines and $K_{m,n}$ has mn lines, $a(K_{m,n}) \geqq \left\{\frac{mn}{m+n-1}\right\} = k$. This proves the theorem.

We illustrate G_1 for the array given above in Figure 3.

In the table below we have listed, for small m and k, the value r. That is, given m and k, r is such that $K_{m,r}$ is the largest complete bipartite graph with arboricity k.

$k \backslash m$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	3	2	2	2	2	2	2	2	2
3		9	6	5	5	4	4	3	3	3
4			16	10	8	7	6	6	5	5
5				25	15	12	10	9	8	7
6					36	21	15	13	12	11
7						49	28	21	17	15
8							64	36	26	22

The definition and problems involved in this note were proposed by Professor A. Rényi in a seminar conducted by Professor F. Harary, who conjectured the results. I wish to also thank Professor R. Read for this version of the proof of Theorem 1.

(Received October 1, 1964.)

REFERENCES

[1] Beineke, L. W.—Harary, F.—Moon, J. W.: „On the thickness of the complete bipartite graph." *Proc. Camb. Phil. Soc.* **60** (1964) 1—5.

[2] Nash—Williams, C. St. J. A.: „Decomposition of finite graphs into forests." *Journal London Math. Soc.* **39** (1964) 12.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛНЫХ ГРАФОВ НА ЛЕСА

L. W. BEINEKE

Резюме

Лесом мы называем соединение деревьев без общих точек. Автор дает метод эффективного *конструирования* как для представления полных графов так и для представления полных графов с счетным числом обходов в виде соединения минимального числа лесов. *Существование* разложения на минимальное число лесов было в первые доказано Nash-ом и Williams-ом.

A NOTE ON LIMITING DISTRIBUTIONS ON TOPOLOGICAL GROUPS

by

IMRE CSISZÁR

It is an interesting problem of probability theory to find conditions under which the partial sums $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ of a sequence of independent random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots$ have some — or even a uniform — limiting distribution mod 1. Generalizing this problem, one can take instead of real numbers mod 1 also an arbitrary compact group as range of the ξ_n's. Probability distributions on a compact group were first studied by K. ITO and Y. KAWADA [1]; in the recent years several papers have been devoted to this subject, such as A. PRÉKOPA—A. RÉNYI—K. URBANIK [2], K. URBANIK [3], B. M. KLOSS [4], K. STROMBERG [5] etc. The usual tools of proving limit theorems for probability distributions on topological groups are group characters, representation theory, or algebraic theorems on compact semigroups. The aim of the present note is to show another method for dealing with such problems, that has the advantage of being completely elementary. As it will be pointed out, this method is closely related to information theory.

For convenience we first summarize the necessary concepts and notations.

G denotes a (not necessarily Abelian) compact group.

A *probability distribution* μ on G is a regular measure on the Borel sets of G such that $\mu(G) = 1$. A random element ξ of G has the distribution μ, if $\mathbf{P}(\xi \in B) = \mu(B)$ for every Borel set B in G.

The *convolution* $\mu = \mu_1 \ast \mu_2$ of two probability distributions μ_1 and μ_2 is defined by

$$\mu(B) = \int_G \mu_1(Bx^{-1})\, \mu_2(dx) = \int_G \mu_2(x^{-1}B)\, \mu_1(dx)\,. \tag{1}$$

$\mu = \mu_1 \ast \mu_2$ is the distribution of the product $\xi_1\xi_2$ of two independent random elements ξ_1 and ξ_2 having distributions μ_1 and μ_2, respectively.

The *n-th power* μ^n of μ is defined as $\mu^n = \underset{1}{\mu} \ast \underset{2}{\mu} \ast \ldots \ast \underset{n}{\mu}$. This is the distribution of the product of n identically distributed random elements having the distribution μ.

By *convergence* of probability distributions we shall mean the weak convergence: a sequence $\mu_1, \mu_2, \ldots$ has the limiting distribution μ if

$$\lim_{n\to\infty} \int_G f(x)\, \mu_n(dx) = \int_G f(x)\, \mu(dx) \quad \text{for every continuous function } f(x) \text{ on } G. \tag{2}$$

The *support* C_μ of a probability distribution μ is the smallest compact set $C \subset G$, for which $\mu(C) = 1$.

The *smallest closed subgroup* of G containing a subset $E \subset G$ will be denoted by $[E]$.

The (normed) *Haar-measure* on G is denoted by ν.

A nonnegative Borel-measurable function $f(x)$ on G will be called a *probability density function*, abbreviated as p.d.f., if

$$\int_G f(x)\,\nu(dx) = 1.$$

Our method will be based on the functional

$$I_h(f) = \int_G h(f(x))\,\nu(dx) \tag{3}$$

where h denotes an arbitrary strictly convex function defined on $[0, +\infty)$. If $f(x)$ is a p.d.f. then $I_h(f)$ is surely defined[1] and — by Jensen's inequality — $I_h(f) \geqq h(1)$.

To show how this method works, we shall give a new proof of the following theorem due to K. URBANIK [3], B. M. KLOSS [4] and K. STROMBERG [5][2]:

Theorem. *The sequence of powers $\mu, \mu^2, \ldots, \mu^n, \ldots$ of a probability distribution μ on a compact group G has a limiting distribution if and only if C_μ is not contained in one coset of any compact normal subgroup of $[C_\mu]$ different from $[C_\mu]$ itself.*

Proof. If $[C_\mu] \neq G$, we can restrict ourselves to the subgroup $[C_\mu]$. Thus we may and do assume — without any loss of generality — $[C_\mu] = G$.

The „only if'' part of the Theorem is trivial. Namely if C_μ is contained in one coset $x' = xN$ of some normal subgroup N of G, the convergence of the sequence μ^n implies the convergence of the powers x'^n in the factor-group $G' = G/N$ which is for $x' \neq e'$ i.e. $C_\mu \not\subset N$ clearly impossible. But as $[C_\mu] = G$, $C_\mu \subset N$ implies $N = G$. Thus we have to prove only the sufficiency.

Let $f(x)$ be an arbitrary continuous p.d.f. on G and define

$$f_n(x) = \int_G f(xy^{-1})\,\mu^n(dy)\,. \tag{4}$$

Intuitively speaking, we replace μ^n by a smooth distribution namely by the one having the continuous density function $f_n(x)$ [from (4) immediately follows that $f_n(x)$ is a p.d.f.]. If μ itself is absolutely continuous (with respect to the Haar-measure ν) and its p.d.f. $\dfrac{\mu(dx)}{\nu(dx)}$ is continuous, this smoothing procedure is not necessary.

Consider the sequence $I_n = I_h(f_n)$. Since $\mu^{n+1} = \mu^n \ast \mu$, we obtain from (4) and (1)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_G \Big(\int_G f(xy^{-1})\,\mu^n(dy\,z^{-1})\Big)\,\mu(dz) = \\ &= \int_G \Big(\int_G f(xz^{-1}u^{-1})\,\mu^n(du)\Big)\,\mu(dz) = \int_G f_n(xz^{-1})\,\mu(dz) \end{aligned} \tag{5}$$

[1] $I_h(f)$ is not necessarily finite. In the sequel, however, we shall deal with *continuous* — and thus bounded — p. d. f.'s $f(x)$; for such an $f(x)$ $I_h(f)$ is obviously finite.

[2] In this form the theorem was first given by K. STROMBERG [5]. Essentially it was proved already by K. URBANIK [3] and B. M. KLOSS [4], but their condition $[C_\mu] = [C_\mu C_\mu^{-1}]$ is in fact not necessary, since $[C_\mu C_\mu^{-1}]$ — in contrary to a statement of K. ITO and Y. KAWADA [1] — need not be a normal subgroup of $[C_\mu]$, cf. the counterexample given by K. STROMBERG [5].

and Jensen's inequality yields

$$h(f_{n+1}(x)) = h\Big(\int_G f_n(xz^{-1})\,\mu(dz)\Big) \leq \int_G h(f_n(xz^{-1}))\,\mu(dz)\,. \tag{6}$$

Hence follows by integration with respect to ν, utilising that ν is the Haar measure

$$I_{n+1} = \int_G h(f_{n+1}(x))\,\nu(dx) \leq \int_G \Big(\int_G h(f_n(xz^{-1}))\,\mu(dz)\Big)\,\nu(dx) = \tag{7}$$

$$= \int_G \Big(\int_G h(f_n(xz^{-1}))\,\nu(dx)\Big)\,\mu(dz) = \int_G h(f_n(x))\,\nu(dx) = I_n\,.$$

Thus the sequence I_n (bounded from below by $h(1)$) is monotonic non-increasing and has a finite limit $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Now we prove that under the conditions of the theorem we have

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_G f(xy^{-1})\,\mu^n(dy) = 1 \quad \text{uniformly on } G. \tag{8}$$

First observe that — by compactness — $f(x)$ is bounded and uniformly continuous on G. Further if for some neighbourhood U of the unite element e of G $x_1x_2^{-1} \in U$ implies $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ then — by (4) — the same is true for all f_n. Hence follows — by compactness — that the sequence $\{f_n\}$ has a uniformly convergent subsequence $\{f_{n_k}\}$:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \tilde{f}(x) \qquad \text{(uniformly on } G). \tag{9}$$

Since the sequence $m_n = \max\limits_{x\in G} |f_n(x) - 1|$ is — by (5) — obviously non-increasing, to prove (8) it is enough to show that $\tilde{f}(x) = 1$ for all $x \in G$.

Now (9) implies [see (5)]

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k+1}(x) = \tilde{\tilde{f}}(x) = \int_G \tilde{f}(xz^{-1})\,\mu(dz) \qquad \text{(uniformly on } G) \tag{10}$$

and uniform convergence implies

$$I_h(\tilde{f}) = I_h(\tilde{\tilde{f}}) = \lim_{n\to\infty} I_n = I\,. \tag{11}$$

Hence follows at once

$$h\Big(\int_G \tilde{f}(xz^{-1})\,\mu(dz)\Big) = \int_G h(\tilde{f}(xz^{-1}))\,\mu(dz) \qquad \text{for all } x \in G; \tag{12}$$

namely by Jensen's inequality we have $\leq$, where the validity of the $<$ sign for some $x = x_0$ would imply the same also for a neighbourhood of x_0, but then integration with respect to ν would give $I_h(\tilde{\tilde{f}}) > I_h(\tilde{f})$, contradicting (11).

(12) involves that $\tilde{f}(xz^{-1})$, as a function of z, is constant on C_μ. This means that for $y_1 = xz_1^{-1}$ and $y_2 = xz_2^{-1}$ $(x \in G,\ z_1, z_2 \in C_\mu)$ i.e. for $y_2 = y_1z_1z_2^{-1}$ we have $\tilde{f}(y_2) = \tilde{f}(y_1)$. Similarly if $y_3 = y_2z_3z_4^{-1}$ we have $\tilde{f}(y_3) = \tilde{f}(y_2)$ and we can conclude by induction that

$$x = yz_1z_2^{-1}z_3z_4^{-1} \ldots z_{2k-1}z_{2k}^{-1} \quad (z_j \in C_\mu,\ j = 1, 2, \ldots, 2\,k)$$

implies $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y)$.

The same can be proved also for $z_j \in C_\mu^l$, instead of $z_j \in C_\mu$, considering $\tilde{f}^{(l)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n_k+l}(x) = \int_G \tilde{f}(xz^{-1})\, \mu^l(dz)$ instead of (10); one has only to remark, that (7) remains true if we take I_{n+l} instead of I_{n+1} and μ^l instead of μ, further that $C_{\mu^l} = C_\mu^l$(namely we have $C_{\mu_1 * \mu_2} = C_{\mu_1} \cdot C_{\mu_2}$, cf. e. g. [4]). Now the closure of the elements of form $z_1 z_2^{-1} \dots z_{2k-1} z_{2k}^{-1} (z_j \in C_\mu^l, j = 1, 2, \dots, 2k;$ $k = 1, 2, \dots; l = 1, 2, \dots)$ is obviously a compact normal subgroup of G and — as one easily shows — C_μ is contained in one coset of this subgroup. This implies, by the condition of the theorem, that this subgroup is identical with G, and thus the (continuous) function $\tilde{f}(x)$ must be constant on G. Since $\tilde{f}(x)$ is a p.d.f. we have $\tilde{f}(x) = 1$, proving (8).

The intuitive meaning of (8) is that for any continuous p.d.f. $f(x)$ the distributions obtained by the "f-smoothing" of the μ^n's converge uniformly to the Haar measure ν. It is easy to see that this already implies the weak convergence of the μ^n's (in the sense (2)). Let namely $f(y)$ be an arbitrary continuous function on G and write $f(y^{-1}) = \lambda_1 f_1(y) - \lambda_2 f_2(y)$ where $f_1(y)$ and $f_2(y)$ are continuous p.d.f.'s. Then applying (8) to f_1 and f_2 with $x = e$ (unite element of G) we obtain

$$(14) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_G f(y)\, \mu^n(dy) = \lim_{n\to\infty} \Big(\lambda_1 \int_G f_1(y^{-1})\, \mu^n(dy) - \lambda_2 \int_G f_2(y^{-1})\, \mu^n(dy)\Big) =$$
$$= \lambda_1 - \lambda_2 = \int_G f(y^{-1})\, \nu(dy) = \int_G f(y)\, \nu(dy)\,.$$

The method used in the above proof is closely related to information theory. Indeed, if we choose $h(u) = u \log u$ then our I_n is nothing else than the (directed) I-divergence of the probability distribution obtained from μ^n by "smoothing" and the "uniform distribution" (Haar measure) on G. The idea of the proof is essentially the same as in A. Rényi's information theoretical proof of ergodicity of finite Markov chains (see [6]), combined with an appropriate smoothing procedure. It should be noted that the idea of proving limit theorems by the aid of information theoretical notions is due to Yu. V. Linnik (see [7]).

(Received October 9, 1964.)

REFERENCES

[1] Ito, K.—Kawada, Y.: "On the probability distribution on a compact group." *Proceedings Phys.—Math. Soc. Japan*, **22** (1940) 977—998.
[2] Prékopa, A.—Rényi, A.—Urbanik, K.: «О предельном распределении для сумм независимых случайных величин на бикомпактных топологических группах.» *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 11—16.
[3] Urbanik, K.: "On the limiting probability distribution on a compact topological group." *Fundamenta Math.* **44** (1957) 243—261.
[4] Клосс, Б. М.: «О вероятностных распределениях на бикомпактных топологических группах.» *Теория вероятностей и ее применения* **4** (1959) 255—290.
[5] Stromberg, K.: "Probabilities on a compact group". *Transactions of the American Mathematical Society*, **94** (1960) 295—309.
[6] Rényi, A.: "On measures of entropy and information." *Proc. 4th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probability*, Vol. I. 547—561. Berkeley, 1961.
[7] Линник, Ю. В.: «Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдеберга». *Теория вероятностей и ее иPименения* **4** (1959) 311—321.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

I. CSISZÁR

Резюме

В работе предлагается новый метод изучения предельных распределений на бикомпактных топологических группах, связанный с теорией информации.

Метод обоснован на изучении функционала

$$I_h(f) = \int_G h(f(x))\, \nu(dx)$$

где $f(x)$ плотность некоторой вероятностной меры μ относительно меры Хаара ν. При этом $h(u)$ — некоторая выпуклая функция определенная в интервале $[0, +\infty)$.

В частном случае $h(u) = u \log u$, $I_h(f)$ является направленной I-дивергенцией вероятностных мер μ и ν, т. е. $I_h(f)$ равна энтропии $H_\nu(\mu)$.

Применением метода дается новое доказательство одной теоремы K. URBANIK-а [3] и Б. М. Клосс-а [4] о необходимом и достаточном условии сходимости мер μ^n на бикомпактной группе G, где μ — некоторая регулярная вероятностная мера на G и степени определены в смысле свертки.

REMARKS ON MY PAPER "ON $\mathbf{PC}_{\Delta}$-CLASSES IN THE THEORY OF MODELS"

by

M. MAKKAI

I was informed by Professor R. L. Vaught on 9. September 1964 that the paper: W. CRAIG, R. L. VAUGHT: "Finite axiomatizability using additional predicates" *(Journal of Symbolic Logic* **23** (1958), pp. 289—308) contains a theorem closely related to Theorem 1 of the cited paper in these Publications, Vol. 9., pp. 159—194. Unfortunately, I had not had any knowledge of the paper of CRAIG and VAUGHT.

The theorem of CRAIG and VAUGHT (Corollary 2.2, p. 299) is as follows. Suppose $\mathbf{K}$ is a class of infinite relational systems (having finitely many relations). Then $\mathbf{K}$ is the class of models of a (recursively) axiomatizable theory if and only if $\mathbf{K} \in \mathbf{PC} \cap \mathbf{EC}_{\Delta}$.

Theorem 1 of my paper is apparently more general than the theorem of CRAIG and VAUGHT but, actually, it can be deduced from the latter in a simple way. To show this we use the following simple lemma.

Lemma. *Suppose that* $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ *are denumerable languages containing only predicate symbols,* $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1$ *is infinite,* $\Sigma \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L}_2)$, Σ *has only infinite models. In this case we can add finitely many predicates to* $\mathbf{L}_1$ *(denoting the resulting language by* $\mathbf{L}_3$*) and construct a set* Σ' *of sentences of* $\mathbf{L}_3$ *such that* $\mathbf{M}_{\mathbf{L}_3}(\Sigma') \mid \mathbf{L}_1 = \mathbf{M}_{\mathbf{L}_2}(\Sigma) \mid \mathbf{L}_1$. *Moreover, if* Σ *is recursive or recursively enumerable (in a suitable numbering) then so is* Σ'.

This construction is as follows. As new predicates we take the individual constant O; the unary operation symbols l, S; the binary operation symbol h and the binary predicate symbol P (naturally, instead of the operation symbols we could take predicate symbols). Suppose that an enumeration of the predicates of $\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1$ is $P_0, P_1, \ldots$, each P_i being ϱ_i-ary. Denote the terms O, $S(O)$, $S(S(O))$, ... by δ_0, δ_1, δ_2, ... Now, replace each part of the form $P_i(x_0, \ldots, x_{\varrho_i - 1})$ by

$$(y)\big(\big(l(y) = \delta_{\varrho_i} \wedge \bigwedge_{j<\varrho_i} h(\delta_j, y) = x_j\big) \rightarrow P(\delta_i, y)\big)$$

in every sentence of Σ and furthermore add the following sentences

$$(v_0) \ldots (v_{n-1})\,(\exists\,!\,v_n)\,\big(l(v_n) = \delta_n \wedge \bigwedge_{j<n} h(\delta_j, v_n) = v_j\big)$$

for every n, $1 \leqq n < \omega$ and

$$\delta_n \neq \delta_m$$

for any $n, m < \omega$, $n \neq m$. Let Σ' be the resulting set of sentences. We can prove in a straightforward way that, indeed

$$\mathsf{M}_{\mathbf{L}_3}(\Sigma') \mid \mathbf{L}_1 = \mathsf{M}_{\mathbf{L}_2}(\Sigma) \mid \mathbf{L}_1 .$$

Theorem 1 of my paper may be proved by the theorem of CRAIG and VAUGHT and the Lemma as follows. Suppose $\mathbf{K} \subset \mathfrak{S}(\mathbf{L}_1)$, $\mathbf{L}_1$ is finite, $\mathbf{K} \in \mathsf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}}$. Then obviously $\mathbf{K}^\infty \in \mathsf{PC}_{\Delta\mathrm{rec}}$. Applying the lemma, we have a finite language $\mathbf{L}_3$ and a recursive Σ', $\Sigma' \subset \mathfrak{F}_0(\mathbf{L}_3)$ such that $\mathbf{K}^\infty = \mathsf{M}_{\mathbf{L}_3}(\Sigma') \mid \mathbf{L}_1$. The theorem of CRAIG and VAUGHT can be applied to $\mathsf{M}_{\mathbf{L}_3}(\Sigma')$ so we obtain that $\mathsf{M}_{\mathbf{L}_3}(\Sigma') \in \mathsf{PC}$; this implies that $\mathbf{K}^\infty \in \mathsf{PC}$.

I wish to thank Professor Vaught for his information.

Corrections to p. 186 of the paper:
line 9: after "$\mathbf{L}_1$" "other than v_0" has to be added;
line 11: "Lemma 19" is to be read instead of "Lemma 8";
line 12: after "Then let $\bar{t} = h^{t_0}(x_0, \ldots, x_{m-1})$" „if $t_0 \neq v_0$, and $\bar{t} = t$ if $t_0 = v_0$ (i.e. if t is a variable)" has to be added.

Remark to § 3. R. L. VAUGHT introduces in his paper "The elementary character of two notions from general algebra" *(Essays on the Foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1962, 226—233) the notion PC'_Δ. Our Theorem 2(a) can be expressed equivalently by $\mathsf{PC}'_\Delta = \mathsf{PC}_\Delta$.

Remark to § 5. There exist theorems for endomorphisms (and generalized endomorphisms) analogous to Theorems 6 and 7.

Corrections: p.161, line 6: instead of the second $\wedge$ $\vee$ should be read. p. 181, lines 11—10 from b.: instead of "$x=z_{n-1}$ and $y=z_n$ for some n" "$R_{\mathfrak{A}}(x,y)$" should be read.

(Received October 9, 1964.)

ЗАМЕЧАНИЯ К МОЕЙ РАБОТЕ «О КЛАССАХ PC_Δ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ»

M. MAKKAI

Резюме

К теореме 1 упоминаемой работы замечается что W. CRAIG и R. L. VAUGHT доказали раньше подобную, но на первый взгляд менее общую теорему; однако, в действительности теорема 1 автора является следствием этой теоремы.

Автор благодарит профессора VAUGHT за это сообщение.

ON THE FUNCTION $g(t) = \limsup_{x\to+\infty} \big(f(x+t) - f(x)\big)$

by

I. CSISZÁR and P. ERDŐS

The following problem has occured in the theory of regularly increasing functions:[1]

If for a real-valued measurable function $f(x)$ the quantity

$$g(t) = \limsup_{x\to+\infty} \big(f(x+t) - f(x)\big) \tag{1}$$

is finite for every possible t, does this imply that the function $g(t)$ is bounded in every finite interval?

The aim of the present note is to show that

a) *if* (1) *is finite for every real number t, then $g(t)$ is bounded in every finite interval;*

b) *if* (1) *is finite for every positive number t, then $g(t)$ is bounded in every closed subinterval of the open half-line* $(0, +\infty)$ *but not necessarily bounded in the neighbourhood of* 0.

Case a) Suppose that $g(t)$ is not bounded in some finite interval I; then there exists a sequence of real numbers $t_n \in I$ such that $g(t_n) > n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Then, by (1), one could find a sequence $x_n \to +\infty$ such that

$$f(x_n + t_n) - f(x_n) > n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Take now an arbitrary finite interval J and consider the sets

$$\begin{aligned} Y_{1,n} &= \{y : f(x_n + y) - f(x_n) > \frac{n}{2};\quad y \in J\}, \\ Y_{2,n} &= \{y : f(x_n + t_n) - f(x_n + y) > \frac{n}{2};\quad y \in J\}. \end{aligned} \tag{3}$$

These sets are measurable for each n, and since by (2) $Y_{1,n} \cup Y_{2,n} = J$, we have either $\mu(Y_{1,n}) \geqq \frac{1}{2}\,\mu(J)$ or $\mu(Y_{2,n}) \geqq \frac{1}{2}\,\mu(J)$ or both (μ denotes the Lebesgue measure).

[1] The problem was told to P. ERDŐS by R. BOJANIC and J. KARAMATA. In a paper of W. MATUSZEWSKA (Regularly increasing functions in connection with the theory of $L^{*\varphi}$-spaces, *Studia Math.* **21** (1962) 317—344) a proof of statement a) is given; in it, however, there is a gap: $g(t)$ is implicitely assumed to be measurable, although the measurability of $f(t)$ does not imply the measurability of $g(t)$.

Put now

$$(4)\qquad Z_n = \{z : f(x_n + t_n) - f(x_n + t_n - z) > \frac{n}{2}\,;\ t_n - z \in J\}\,.$$

Then obviously $\mu(Z_n) = \mu(Y_{2,n})$ and thus we have either

$$(5)\qquad \mu(Y_{1,n}) \geqq \frac{1}{2}\,\mu(J) \qquad \text{infinitely often}$$

or

$$(6)\qquad \mu(Z_n) \geqq \frac{1}{2}\,\mu(J) \qquad \text{infinitely often}$$

(or both), where all the $Y_{1,n}$'s and Z_n's are subsets of a fixed finite interval. This clearly implies the existence of a real number y_0 or z_0 contained in infinitely many $Y_{1,n}$ or Z_n, respectively.[2] But then — by the definitions (3), (4) and (1) — we would have $g(y_0) = +\infty$ or $g(z_0) = +\infty$, respectively, contradicting to the assumed finiteness of $g(t)$.

Case b) The first statement follows in the same way as in case a). We only have to place the interval J between the point 0 and the interval I; then, if the statement were false, one would obtain a *positive* number y_0 or z_0, with $g(y_0) = +\infty$ or $g(z_0) = +\infty$. Now we show by a counterexample, that $g(t)$ need not be bounded in the neighbourhood of 0. Let us define the function $f(x)$ in the following way:

$$f(0) = -2$$

$$f(2\,n - 1) = f(2\,n) = -\,2^{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Further put for $n = 1, 2, \ldots$

$$f\left(2\,n - 1 + \frac{1}{2^k}\right) = f(2\,n - 1) + 2^k = -\,2^{n+1} + 2^k \quad (k = n, n-1, \ldots, 1)$$

and

$$f\left(2\,n - 1 - \frac{1}{2^n}\right) = f\left(2\,n - 1 + \frac{1}{2^n}\right) = -\,2^n\,.$$

For any other nonnegative value x define $f(x)$ by linear interpolation (see Figure 1). Then it is easy to see that

$$g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \limsup_{x\to+\infty}\left|f\left(x + \frac{1}{2^n}\right) - f(x)\right| = 2^n$$

and for $t \geqq \frac{1}{2^n}$ we have $g(t) \leqq 2^n$. Thus $g(t)$ is finite for every positive number t but obviously

$$\lim_{t\to+0} g(t) = +\infty\,.$$

[2] If A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ are arbitrary measurable sets with $\mu(A_n) \geqq \alpha$ and $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$, then $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \geqq \alpha$.

Remarks.

1. The assumption that $g(t)$ is finite for every *real* t is obviously equivalent with the assumption that

$$h(t) = \limsup_{x\to+\infty} | f(x+t) - f(x) |$$

is finite for every *positive* t. Thus also the latter condition implies the boundedness of $g(t)$ — and of $h(t)$ — in every finite interval. In the counterexample given above $h(t) = +\infty$ for every t.

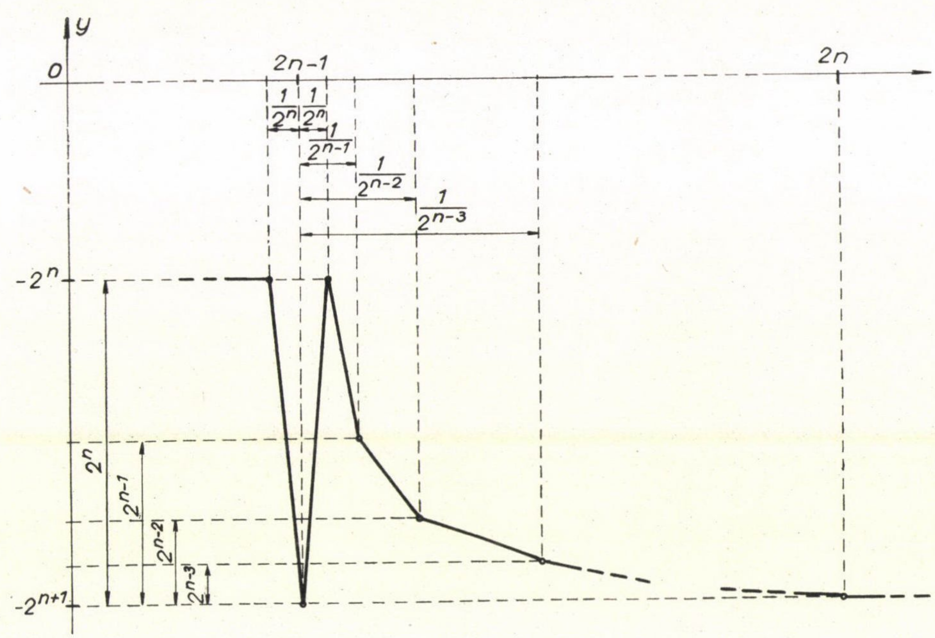


Fig. 1

2. If we do not assume the measurability of $f(x)$, then $g(t)$ can be finite for every real t without being bounded in any interval. That is the case e.g. for any non-measurable solution of the Cauchy functional equation $f(x+y) =$ $= f(x) + f(y)$.

(Received October 26, 1964.)

О ФУНКЦИИ $g(t) = \limsup_{x \to +\infty} \big(f(x+t) - f(x)\big)$

I. CSISZÁR и P. ERDŐS

Резюме

Пусть $f(x)$ — измеримая вещественная функция и положим

$$g(t) = \limsup_{x \to +\infty} \big(f(x+t) - f(x)\big)\,.$$

Доказываются следующие установления:

а) *если функция $g(t)$ конечна при любом вещественном t, то она является ограниченной в любом конечном интервале;*

б) *если функция $g(t)$ конечна при любом положительном t, то она является ограниченной в любом закрытом подинтервале открытого интервала* $(0, +\infty)$; *но не должна быть ограниченной в окресности* 0.

ÜBER EIN INTERPOLATIONSVERFAHREN

von

M. SALLAY

1.

Herr Dr. G. FREUD hat in seiner Arbeit [2] den folgenden Satz gezeigt: Betrachten wir die Nullstellen des Tschebischeffschen Polynoms $T_n(x) = \cos n(\text{arc} \cos x)$ als Knotenpunkte der Interpolation; dann kann man eine Folge von Interpolationspolynomen konstruieren, welche den Jacksonschen Satz direkt beweist.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der Frage ob man die Nullstellen allgemeiner Orthogonalpolynome als Knotenpunkte der Interpolation so wählen könnte, dass die in [2] definierten Interpolationspolynome die Jacksonsche Eigenschaft besitzen. Wir geben eine positive Antwort auf das Problem.

Wir bemerken, dass diese allgemeinere Klasse der Orthogonalpolynome die Tschebischeffschen Polynome enthält.

2.

Es sei $w(x)$ in dem Intervall $[-1, +1]$ stetige Funktion.

Setzen wir voraus, dass $w(x)$ die Bedingungen

$$0 < m \leqq w(x) \leqq M\,, \qquad (-1<x<1;\ m, M = \text{konst.}) \tag{2.1}$$

$$|\, w(x_1) - w(x_2)\, | = O(|\, x_2 - x_1 \,|) \qquad (-1 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1) \tag{2.2}$$

befriedigt.

Bezeichnen wir mit $\{p_n(x)\}$ die Folge der orthonormalen Polynome, die zur Gewichtsfunktion $w(x)$ gehören, und mit x_{in} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die Nullstellen des Polynoms $p_n(x)$.

Da $w(x)$ die Bedingung (2.2) befriedigt, gilt nach dem Satze von J. KOROUS (s.z.B. [5] Seite 160) für $-1 < x < 1$ die Abschätzung

$$|\, p_n(x)\, | < A(1 - x^2)^{-1/2}\,, \qquad (A = \text{konst.})$$

Also sind die Polynome $\{p_n(x)\}$ in irgendeinem Teilintervall (α, β) von $(-1, +1)$ gleichmässig beschränkt, d. h.

$$|\, p_n(x)\, | < K\,, \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta\,,\ K = \text{konst.}) \tag{2.3}$$

Es sei

$$\varphi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} v_k(x)\, l_{kn}^4(x) + 2(x - x_{kn})\, l_{kn}^3(x)\, l'_{kn}(x), \tag{2.4}$$

wo

$$v_{kn}(x) = 1 - \frac{p_n''(x_{kn})}{p_n'(x_{kn})}(x - x_{kn})$$

ist und es bezeichne

$$l_{kn}(x) = \frac{p_n(x)}{p_n'(x_{kn})\,(x - x_{kn})}$$

die Grundpolynome der Lagrangeschen Interpolation über die Knotenpunkte x_{kn}.

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervall (α, β) $(-1 < \alpha \leqq 0 \leqq \beta < 1)$ stetige Funktion, ferner sei

$$I_n(f; x) \stackrel{\text{def}}{=} f(0) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x)\,[f(x_{kn}) - f(0)]\,. \tag{2.5}$$

Satz 1. *Es seien die Bedingungen* (2.1)—(2.3) *erfüllt. Dann ist*

$$|\,I_n(f; x) - f(x)\,| \leqq C\,\omega\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

wo C eine nur von $w(x)$ abhängige Konstante ist, und $\omega(f;\ \delta)$ bezeichnet den Stetigkeitsmodul von $f(x)$.

3.

Wir schicken jetzt einige wohlbekannten Formeln und Relationen voran, die wir in unserer Arbeit anwenden werden.

Es bezeichne $\lambda_n(\xi)$ die, zur Stelle ξ gehörige Cottesche Zahl und $l_n(x, \xi)$ die zum Grundpunktsystem gehörigen Lagrange-Parabeln. Die folgenden Relationen gelten (s. z. B. [3]):

$$\lambda_n(\xi) = \int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi)\, w(x)\, dx \geqq 0\,, \tag{3.1}$$

$$l_n(x, \xi) = \lambda_n(\xi) \sum_{r=0}^{n-1} p_r(\xi)\, p_r(x)\,, \tag{3.2}$$

$$\lambda_n(\xi) = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k^2(\xi)}\,. \tag{3.3}$$

Es sei $-1 + h \leqq x_{kn} \leqq 1 - h$; infolge (2.1) besteht für zwei benachbarte, in $(-1 + h, 1 - h)$ fallenden Nullstellen x_k und x_{k+1}

$$\frac{C_1(h)}{n} \leqq x_{k+1} - x_k \leqq \frac{C_2(h)}{n}\,, \tag{3.4}$$

wo $C_1(h)$ und $C_2(h)$ nur von h abhängige positive Zahlen sind (s. [1]).

Endlich sind wegen (3.4) und (2.3) die folgenden Relationen gültig:

$$\sum_{k=1}^{n} l_{kn}^2(x) = O(1) \tag{3.5}$$

(s. [3], Hilfssatz I),

$$\lambda_n(\xi) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \xi \in (\alpha, \beta) \tag{3.6}$$

(s. [3], Hilfssatz II),

$$l_{kn}(x) = \lambda_{kn} \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{p_{n-1}(x_{kn})\, p_n(x)}{x - x_{kn}} \tag{3.7}$$

wo $\frac{a_{n-1}}{a_n} \leqq 1$ ist (s. [4]), ferner

$$-\frac{p_n''(x_{kn})}{p_n'(x_{kn})} = \frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_n(x_{kn})} = \frac{\lambda_{kn}'}{\lambda_{kn}} \tag{3.8}$$

(s. [3], Beziehung (19)).

4.

Hilfssatz 1. *Für* $-1 + h < x < 1 - h$ *ist*

$$\sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x) \mid x - x_{kn} \mid = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.1}$$

Beweis. Es sei $x_j \leqq x \leqq x_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$.
Wir zerlegen (4.1), wie folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x) \mid x - x_{kn} \mid = \sum_{\substack{r \neq j \\ r \neq j+1}}^{*} l_{rn}^4(x) \mid x - x_{kn} \mid + \tag{4.2}$$

$$+ l_{jn}^4 \mid x - x_{jn} \mid + l_{j+1,n}^4 \mid x - x_{j+1,n} \mid ,$$

wo $\sum^*$ bezeichnet die Summe, wo die Glieder $r = j$ und $r = j + 1$ unterdrückt wurden. Nach den Relationen (3.7), (2.3), (3.6), ferner aus der linken Seite von (3.4)

$$\sum{}^{*} l_{kn}^4(x) \mid x - x_{kn} \mid \leqq \sum{}^{*} \lambda_{kn}^4 \frac{K^8}{\mid x - x_{kn} \mid^3} = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \sum{}^{*} \frac{1}{\mid x - x_{kn} \mid^3} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^4}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\frac{\nu^3}{n^3}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^3} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

folgt.

Wir wenden jetzt die Ungleichung der rechten Seite von (3.4) und die [sich aus (3.2), (3.6) und (2.3) ergebene Relation] $l_{kn}^4(x) = O(1)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ an; dann können wir das zweite resp. das dritte Glied von (4.2) folgenderweise abschätzen:

$$l_{sn}^4(x) \mid x - x_{sn} \mid = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (s = j,\ j + 1),$$

woraus die Behauptung von (4.1) schon folgt.

Ähnlicherweise kann die Abschätzung

$$(4.3)\qquad \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x)\,|\,x - x_{kn}\,|^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (-1 + h < x < 1 - h)$$

bewiesen werden.

Hilfssatz 2. *Es sei* $-1 + h < x < 1 - h$, *dann ist die Relation*

$$(4.4)\qquad \sum_{k=1}^{n} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,| = O(1)$$

gültig.

Beweis. Mit Rücksicht darauf, dass $l_{kn}(x)$ in dem Intervall $[-1, +1]$ ein Polynom höchstens $(n - 1)$-ter Grades ist, ergibt sich nach dem Satze von Bernstein (s. z. B. [5], Seite 5.) die folgende Abschätzung:

$$|\,l'_{kn}(x)\,| \leqq \frac{O(n)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

woraus wir für $-1 + h < x < 1 - h$ die Ungleichung

$$(4.5)\qquad |\,l'_{kn}(x)\,| \leqq O(n)$$

erhalten.

Der weitere Beweis ist dem Hilfssatze 1 ähnlich. Es sei $x_j \leqq x \leqq x_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$; wir zerlegen den linken Seite von (4.4) folgenderweise:

$$\sum_{k=1}^{n} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,| = \sum_{\substack{k\neq j\\ k\neq j+1}}^{*} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,| +$$

$$+ |\,l_{jn}^3\,|\,|\,l'_{jn}\,|\,|\,x - x_{jn}\,| + |\,l_{j+1,n}^3\,|\,|\,l'_{j+1,n}\,|\,|\,x - x_{j+1,n}\,|.$$

Nach den Beziehungen (3.7), (2.3) und (4.5) gilt die Abschätzung

$$(4.6)\qquad \sum^{*} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,| \leqq O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\frac{\nu^2}{n^2}} = O(1),$$

weiter folgt aus $|\,x_{j+1} - x_j\,| \leqq O\left(\frac{1}{n}\right)$ die Relation

$$|\,l_{sn}^3(x)\,|\,|\,l'_{sn}(x)\,|\,|x - x_{sn}\,| = O(1) \qquad (s = j, j + 1).$$

Hieraus und infolge (4.6) erhalten wir die Behauptung von (4.4).

Ähnlicherweise können wir die Abschätzung

$$(4.7)\qquad \sum_{k=1}^{n} |\,l_{kn}^3(x)\,|\,|\,l'_{kn}(x)\,|\,|\,x - x_{kn}\,|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

beweisen.

Hilfssatz 3. *Es sei* $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$; *dann besteht unter den Bedingungen des Satzes* 1

$$(4.8)\qquad \left|\frac{\lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2}\right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Beweis. Der Beweisgang geht nach einer Idee von Herrn G. FREUD, welche für den Beweis des Hilfssatzes X in [3] angewendt wurde.

Es sei z.B. $-1 + h < \xi_1 \leqq \xi_2 < 1 - h$, und es bezeichne $\varphi(x)$ die lineare Funktion, für welche $\varphi(\xi_1) = \xi_2$ und $\varphi(1) = 1$ ist. Ferner es sei η der kleinste Wert von $\varphi(x)$ in $[-1, +1]$. Dann ergibt sich

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1 - \xi_2}{1 - \xi_1}(x - 1),$$

$$\eta = -1 + \frac{2(\xi_2 - \xi_1)}{1 - \xi_1},$$

und es ist weiter

$$0 < \varphi(x) - x \leqq \frac{2}{1 - \xi_1}(\xi_2 - \xi_1).$$

Mit Rücksicht auf $l_n(\xi_2, \xi_2) = 1$ ergibt sich aus der Minimumeigenschaft von $\lambda_n(\xi)$ die Ungleichung

$$\lambda_n(\xi_1) \leqq \int_{-1}^{1} l_n^2(\varphi(t), \xi_2)\, w(t)\, dt. \tag{4.9}$$

Die inverse Funktion von $\varphi(x)$ sei

$$\Phi(x) = 1 + \frac{1 - \xi_1}{1 - \xi_2}(x - 1). \tag{4.10}$$

Mit der Substitution $t = \Phi(x)$ erhalten wir aus (4.9)

$$\lambda_n(\xi_1) \leqq \frac{1 - \xi_1}{1 - \xi_2} \int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, w(\Phi(x))\, dx.$$

Nach der Relation

$$0 \leqq x - \Phi(x) \leqq \frac{2}{1 - \xi_1}(\xi_2 - \xi_1) \qquad (\eta \leqq x \leqq 1)$$

folgt, dass

$$\lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) \leqq \int_{\eta}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, \big[w[\Phi(x)] - w(x)\big]\, dx +$$

$$+ \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 - \xi_2} \int_{\eta}^{1} l_n^2(x, \xi)\, w(\Phi(x))\, dx$$

ist. Ähnlicherweise kann man die Ungleichung

$$\lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) \geqq -\int_{\eta}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, [w(\Phi^*(x)) - w(x)]\, dx -$$

$$- \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 + \xi_1} \int_{1}^{\eta} l_n^2(x, \xi)\, w(\Phi^*(x))\, dx$$

beweisen, wo die Funktion $\Phi^*(x)$ die inverse Funktion von

$$\varphi^*(x) = 1 - \frac{2(\xi_2 - \xi_1)}{1 + \xi_2}(x - \xi_1) \tag{4.11}$$

ist, und ist es ferner

$$0 \leqq \Phi^*(x) - x \leqq \frac{2}{1 + \xi_2}(\xi_2 - \xi_1).$$

Nach der Bedingung (2.2) und infolge (4.10) und (4.11) erhalten wir

$$| w[\Phi(x)] - w(x) | = O(| \xi_2 - \xi_1 |),$$

$$| \lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) | \leqq O(| \xi_2 - \xi_1 |) \int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, dx +$$

$$+ \frac{\text{konst.} \, | \xi_2 - \xi_1 |}{h} \int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, dx.$$

Aus $w(x) \geqq m$ und nach (3.6) ergibt sich

$$\int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, dx \leqq \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, w(x)\, dx = \frac{1}{m} \lambda_n(\xi_2) \leqq \frac{\text{konst.}}{n},$$

also es folgt

$$| \lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) | \leqq O(| \xi_2 - \xi_1 |)\, O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Offenbar folgt aus dieser Abschätzung, dass für $\xi_2 \to \xi_1$, $\xi_1 = x_{kn}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$| \lambda_n'(x_{kn}) | = \left| \lim_{\xi \to x_{kn}} \frac{\lambda_n(\xi) - \lambda_n(x_{kn})}{\xi - x_{kn}} \right| \leqq O(1) \tag{4.12}$$

besteht.

5.

Herr Dr. G. Freud hat in seiner Arbeit [2] den folgenden Satz bewiesen: *Es seien die Zahlen x_{kn} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in einem Intervall $[a, b]$ so beschaffen, dass die Funktionenfolge $\varphi_{kn}(x)$ die folgenden Bedingungen befriedigt:*

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) | = O(1), \tag{5.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) | \, | x - x_{kn} | = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{5.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.3}$$

Dann ist die Relation

$$| I_n(f; x) - f(x) | = O(1)\,\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)$$

erfüllt.

Um hieraus unseren Satz zu beweisen, ist es hinreichend zu zeigen, dass für die in (2.4) definierten Funktionen $\varphi_{kn}(x)$ die Bedingungen (5.1)–(5.3) gelten.

Setzen wir in $v_{kn}(x)$ die Relation (3.8) ein. Dann erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[l_{kn}^4(x) \left(1 + \frac{\lambda'_{kn}}{\lambda_{kn}} (x - x_{kn})\right) + 2(x - x_{kn})\, l_{kn}^3(x)\, l'_{kn}(x) \right],$$

also es ist

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) | \leqq \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x) + \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\lambda'_{kn}}{\lambda_{kn}}\right| l_{kn}^4(x)\, | x - x_{kn} | +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{n} | l_{kn}^3(x) |\, | l'_{kn}(x) |\, | x - x_{kn} | .$$

Aus der Relation $\sum\limits_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x) = O(1)$, ferner nach (3.6), (4.1), (4.4) resp. (4.12) ergibt sich die Behauptung

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) | = O(1).$$

Ähnlicherweise, indem wir die Relationen (3.6), (4.3), (4.7) resp. (4.12) in die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) |\, | x - x_{kn} | \leqq \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x)\, | x - x_{kn} | +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} l_{kn}^4(x) \left|\frac{\lambda'_{kn}}{\lambda_{kn}}\right| | x - x_{kn} |^2 + \sum_{k=1}^{n} | l_{kn}^3(x) |\, | l'_{kn}(x) |\, | x - x_{kn} |^2$$

setzen, bekommen wir die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) |\, | x - x_{kn} | = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

d. h. die Bedingung (5.2).

Es ist noch notwendig die Ungleichung (5.3) zu beweisen.

Es sei

$$\Phi(x, \xi) \overset{\text{def}}{=} \left[\lambda_n(\xi) \sum_{r=0}^{n-1} p_r(\xi)\, p_r(x) \right]^2. \tag{5.4}$$

Nach (3.2) folgt, dass die Funktion

$$\Phi(x, x_{kn}) = l_{kn}^2(x_{kn}) = \left[\lambda_{kn} \sum_{r=0}^{n-1} p_r(x_{kn})\, p_r(x) \right]^2$$

im x ein Polynom höchstens $(2n-2)$-ter Grades ist. Setzen wir in die Hermite-Fejérsche Interpolationsformel

$$P_{2n-2}(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\, l_{kn}^2(x)\, P_{2n-2}(x_{kn}) + (x - x_{kn})\, l_{kn}^2(x)\, P'_{2n-2}(x_{kn})$$

$P_{2n-2}(x) = \Phi(x, \xi)$ ein. Dann erhalten wir

$$\Phi(x, \xi) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\, l_{kn}^2(x)\, \lambda_n^2(\xi) \left[\sum_{r=0}^{n-1} p_r(x_{kn})\, p_r(\xi)\right]^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} 2(x - x_{kn}) \left[\sum_{r=0}^{n-1} p_r(x_{kn})\, p_r(\xi)\right] \left[\sum_{r=0}^{n-1} p'_r(x_{kn})\, p_r(\xi)\right],$$

also es ist

$$\Phi(x, \xi) = \sum_{\kappa=1}^{n} v_k(x)\, l_{kn}^2(x)\, l_{kn}^2(\xi)\, \frac{\lambda_n^2(\xi)}{\lambda_{kn}^2} + \tag{5.5}$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{n} (x - x_{kn})\, l_{kn}^2(x)\, l_{kn}(\xi)\, l'_{kn}(\xi)\, \frac{\lambda_n^2(\xi)}{\lambda_{kn}^2}.$$

Mit der Substitution[1] $\xi = x$ in (5.4) ergibt sich

$$\Phi(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2} \left[v_{kn}(x)\, l_{kn}^4(x) + 2(x - x_{kn})\, l_{kn}^3(x)\, l'_{kn}(x)\right].$$

Anderseits setzen wir die Relation (3.3) in (5.4) ein. Dann bekommen wir

$$\Phi(x, x) \equiv 1,$$

woraus

$$\sum_{k=1}^{n} \left[v_{kn}(x)\, l_{kn}^4(x) + 2(x - x_{kn})\, l_{kn}^3(x)\, l'_{kn}(x)\right] \frac{\lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2} = \tag{5.6}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x)\, \frac{\lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2}$$

folgt. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x)\, \frac{\lambda_{kn}^2 - \lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2}. \tag{5.7}$$

Die Ungleichung (5.3) zu beweisen müssen wir noch zeigen, dass das zweite Glied von (5.7) gleich $O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist.

---

[1] Hier wenden wir die Idee des Beweises des Hilfssatzes 1 in [2] von G. Freud an; in dem Falle der Tschebischeffschen Polynome ist aber $\lambda_n(\xi)$ gleich $\frac{1}{n}$.

Tatsächlich ist es

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) \frac{\lambda_{kn}^2 - \lambda_n^2(x)}{\lambda_{kn}^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} | \varphi_{kn}(x) | \, | x - x_{kn} | \left| \frac{\lambda_{kn}(x_{kn}) + \lambda_n(x)}{\lambda_{kn}^2} \right| \left| \frac{\lambda_{kn}(x_{kn}) - \lambda_n(x)}{x - x_{kn}} \right| =$$

$$= O(n) \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\lambda_n(x) - \lambda_{kn}(x_{kn})}{x - x_{kn}} \right| | \varphi_{kn}(x) | | x - x_{kn} | ,$$

woraus nach (4.12) resp. (5.2) die notwendige Abschätzung folgt.

(Eingegangen: 19. November, 1964.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Erdős, P.—Turán, P.: „On Interpolation III." *Annals of Math.* **41** (1940) 510—553.
[2] Freud, G.: „Über ein Jacksonsches Interpolationsverfahren." *Über Approximationstheorie*, JSNM, **5** (Basel—Stuttgart, 1964), 227—232.
[3] Freud, G.: „Über die Konvergenz des Hermite-Fejérschen Interpolationsverfahrens." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954) 109—127.
[4] Freud, G.: „Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953) 137—142.
[5] Szegő, G.: *Orthogonal polynomials.* Amer. Math. Coll. Publ. XXIII. New York (1959).

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

M. Sallay

Резюме

Пусть $w(x)$ — функция, определенная для значений переменного x в интервале $[-1, +1]$ и удовлетворяющая условиям (2.1), соотв. (2,2). Обозначим через $\{p_n(x)\}$ ортонормированную систему многочленов, принадлежащую к весовой функции $w(x)$ и пусть будет $f(x)$ функция непрерывная в некотором подинтервале (α, β) интервала $(-1, +1)$, далее

$$I_n(f; x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kn}(x) \, [f(x_{kn}) - f(0)] \, ,$$

где x_{kn} — и являются корнями многочлена $p_n(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

$$\varphi_{kn}(x) = v_{kn}(x) \, l_{kn}^4(x) + 2(x - x_{kn}) \, l_{kn}^3(x) \, l'_{kn}(x)$$

и

$$v_{kn}(x) = 1 - \frac{p''_n(x_{kn})}{p'_n(x_{kn})} (x - x_{kn}) \, .$$

Теорема. *При вышеприведенных предположениях интерполяционные многочлены $I_n(f; x)$ являются многочленами типа Джексона т. е.:*

$$| f(x) - I_n(f; x) | \leq C\omega(f; x) \, ; \qquad x \in (\alpha, \beta) \, ,$$

где константа C зависит только от функции $w(x)$ и $\omega(f, \delta)$ является модулем непрерывности функции $f(x)$.

ON THE AMOUNT OF INFORMATION CONCERNING AN UNKNOWN PARAMETER IN A SEQUENCE OF OBSERVATIONS

by

ALFRÉD RÉNYI

Introduction

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of identically distributed random variables. We suppose that the common distribution of the random variables ξ_n depends on a parameter Θ, which itself is also a random variable. In the present paper we restrict ourselves to the case when Θ is a discrete random variable; we shall denote the possible different values of Θ by $t_1, t_2, \ldots, t_r$. We shall suppose further that the random variables ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ are independent and identically distributed under each of the conditions $\Theta = t_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ and denoting by $F_j(x)$ the conditional distribution function of the variables ξ_n under the condition $\Theta = t_j$, we suppose that $F_j(x)$ and $F_h(x)$ are not identical if $j \neq h$. Let $\mathbf{P}(\Theta = t_j) = w_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ denote the prior probability of Θ taking on the value t_j. Without restricting the generality we may suppose $w_j > 0$ for $j = 1, 2, \ldots, r$. We denote by $I_n = I_n((\xi_1, \ldots, \xi_n), \Theta)$ the amount of information concerning the (unknown) value of Θ contained in the sequence of random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. As well known (see [1], [2], [3]) I_n is defined by

$$(1) \qquad I_n = I_n((\xi_1, \ldots, \xi_n), \Theta) = \mathbf{H}(\Theta) - \mathbf{M}(\mathbf{H}(\Theta \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)) \, .$$

Here and in what follows for any (discrete) random variable η we denote by $\mathbf{H}(\eta)$ the *entropy* of η, i.e. if $y_1, \ldots, y_r$ are the values taken on by η and $\mathbf{P}(\eta = y_j) = p_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ we put

$$(2) \qquad \mathbf{H}(\eta) = \sum_{j=1}^{r} p_j \log \frac{1}{p_j} \, .$$

(Here and in what follows $\mathbf{P}(A)$ denotes the probability of the event A and log denotes the logarithm with base 2.) If ζ is an other random variable we denote by $\mathbf{H}(\eta \mid \zeta)$ the *conditional entropy of* η *given the value of* ζ, i.e. we put

$$(3) \qquad \mathbf{H}(\eta \mid \zeta) = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{P}(\eta = y_j \mid \zeta) \log \frac{1}{\mathbf{P}(\eta = y_j \mid \zeta)}$$

where $\mathbf{P}(A \mid \zeta)$ denotes the conditional probability of the event A given the value of ζ. $\mathbf{H}(\eta \mid \zeta)$ is of course itself a random variable, as its value depends on the value taken on by ζ. We denote by $\mathbf{M}(\ldots)$ the mean value of the random variable in the brackets. Thus $\mathbf{M}(\mathbf{H}(\Theta \mid \xi_1, \ldots, \xi_n))$ denotes the average uncertainty which remains with respect to Θ after observing the values $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

The first author suggesting the use of the quantity I_n in statistical problems was — according to our knowledge — D. V. LINDLEY [4].

The aim of the present paper is to prove that for $n \to \infty$ I_n tends to $\mathbf{H}(\Theta)$ in such a way that there exist constants $A > 0$ and q $(0 < q < 1)$ so that

$$0 \leqq \mathbf{H}(\Theta) - I_n \leqq Aq^n \tag{4}$$

and to consider some consequences of this fact.

§ 1. Estimation of the amount of information obtained from observations

We shall restrict ourselves to the case when the random variables ξ_k have a finite discrete distribution. For the sake of the simplicity of notation we suppose that the possible values of the variables ξ_k are the integers $1, 2, \ldots, s$. This is no essential restriction, because if the distribution of the variables ξ_k under condition $\Theta = t_j$ is different for each j, then one can find a Borel-measurable function $g(x)$ taking on only a finite number of different values, such that the conditional distribution of the variables $g(\xi_k) = \xi_k^*$ under condition $\Theta = t_j$ is different for each j and one has evidently

$$I_n\big((\xi_1, \ldots, \xi_n), \Theta\big) \geqq I_n\big((\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*), \Theta\big)\,. \tag{1.1}$$

Thus if we prove that

$$0 \leqq \mathbf{H}(\Theta) - I_n\big((\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*), \Theta\big) \leqq Aq^n \tag{1.2}$$

this implies

$$0 \leqq \mathbf{H}(\Theta) - I_n\big((\xi_1, \ldots, \xi_n), \Theta\big) \leqq Aq^n \tag{1.3}$$

Moreover one has

$$I_n\big((\xi_1, \ldots, \xi_n), \Theta\big) = \sup_g I_n\big((\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*), \Theta\big)\,, \tag{1.4}$$

where the supremum has to be taken over all possible choices of the function g. By the way, this remark shows, that if we observe the random variables ξ_n with the single aim of collecting information with respect to Θ, we may round off in an appropriate way the observed values ξ_n with no serious loss of information.

We shall need an elementary inequality, contained in the following

Lemma. *There exists a universal constant $C > 0$ such that for any sequence $p_1, \ldots, p_N$ of positive numbers forming a probability distribution (i.e. for which $p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1$) we have*

$$\sum_{k=1}^{N} p_k \log \frac{1}{p_k} \leqq C \sum_{k=2}^{N} \sqrt{p_k}\,. \tag{1.5}$$

Proof of the lemma. Clearly both $\dfrac{x \log \frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$ and $\dfrac{(1-x)\log\frac{1}{1-x}}{\sqrt{x}}$ are continuous in the closed interval [0, 1]. Putting

$$C_1 = \operatorname*{Max}_{0 \leq x \leq 1} \frac{x \log \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \tag{1.6}$$

and

$$C_2 = \operatorname{Max} \frac{(1-x)\log\frac{1}{1-x}}{\sqrt{x}} \tag{1.7}$$

we have

$$\sum_{k=2}^{N} p_k \log \frac{1}{p_k} \leq C_1 \sum_{k=2}^{N} \sqrt{p_k} \tag{1.8}$$

and

$$p_1 \log \frac{1}{p_1} \leq C_2 \sqrt{\sum_{k=2}^{N} p_k} \leq C_2 \sum_{k=2}^{N} \sqrt{p_k}\,. \tag{1.9}$$

Thus (1.5) follows with $C = C_1 + C_2$.

Now we are in the position to prove (4). We have

$$\mathbf{H}(\Theta) - I_n = \sum_{h=1}^{r} w_h\, \mathbf{M}(\mathbf{H}(\Theta \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \Omega_h) \tag{1.10}$$

where Ω_h denotes the subset of the full probability space Ω on which $\Theta = t_h$ $(h = 1, 2, \ldots, r)$ and $\mathbf{M}(\eta|B)$ denotes conditional expectation with respect to B, i.e.

$$\mathbf{M}(\eta \mid B) = \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \int_B \eta\, d\mathbf{P}\,. \tag{1.11}$$

On the other hand by supposition, putting

$$\mathbf{P}(\xi_m = x \mid \Theta = t_j) = P_j(x) \qquad (x = 1, 2, \ldots, s) \tag{1.12}$$

we have by Bayes theorem

$$\mathbf{P}(\Theta = t_j \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{w_j \prod_{k=1}^{n} P_j(\xi_k)}{\sum_{l=1}^{r} w_l \prod_{k=1}^{n} P_l(\xi_k)} \leq \frac{w_j}{w_h} \prod_{k=1}^{n} \frac{P_j(\xi_k)}{P_h(\xi_k)}\,. \tag{1.13}$$

It follows by our lemma

$$\mathbf{H}(\Theta \mid \xi_j, \ldots, \xi_n) \leq C \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{r} \sqrt{\frac{w_j}{w_h}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{P_j(\xi_k)}{P_h(\xi_k)}} \tag{1.14}$$

and thus in view of the conditional independence of the variables ξ_k on Ω_h

$$(1.15)\qquad \mathbf{M}(\mathbf{H}(\Theta \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \Omega_h) \leq C \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{r} \sqrt{\frac{w_j}{w_h}} \left[\mathbf{M}\left(\sqrt{\frac{P_j(\xi_1)}{P_h(\xi_1)}} \,\middle|\, \Omega_h \right) \right]^n .$$

Now clearly

$$(1.16)\qquad \mathbf{M}\left(\sqrt{\frac{P_j(\xi_1)}{P_h(\xi_1)}} \,\middle|\, \Omega_h \right) = \sum_{l=1}^{s} \sqrt{P_j(l)\, P_h(l)} = q_{jh} .$$

By Cauchy's inequality and in view of the supposition that the distributions $\{P_j(l)\}$ and $\{P_h(l)\}$ are different for $j \neq h$ we obtain $0 \leq q_{jh} < 1$. Thus putting

$$(1.17)\qquad q = \operatorname*{Max}_{1 \leq j < h \leq r} q_{jh}$$

we have $q < 1$, and it follows from (1.10), (1.15), (1.16) and (1.17), further from (1.14) that

$$(1.18)\qquad \mathbf{M}(\mathbf{H}(\Theta \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)) \leq A q^n$$

with

$$(1.19)\qquad A = C \sum_{j=1}^{r} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{r} \sqrt{w_j w_h} \leq C(r-1) .$$

Thus we have proved the following

Theorem 1. *Let Θ be a discrete random variable taking on r different values $t_1, t_2, \ldots, t_r$ with positive probabilities $w_j = \mathbf{P}(\Theta = t_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Let us suppose that the discrete random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ are for each j $(1 \leq j \leq r)$ independent and identically distributed under the condition that $\Theta = t_j$ and let us suppose that the conditional distribution of the variables ξ_n under condition $\Theta = t_j$ is different for each j. Then, denoting by I_n the amount of information on Θ obtained from observing the values of $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, we have*

$$(1.20)\qquad \lim_{n \to \infty} I_n = \mathbf{H}(\Theta) = \sum_{j=1}^{r} w_j \log \frac{1}{w_j} ;$$

moreover the rate of convergence in (1.20) *is exponential, i.e. there exist positive constants A and $q < 1$ such that*

$$0 \leq \mathbf{H}(\Theta) - I_n \leq A q^n \qquad (n = 1, 2, \ldots) .$$

As $\mathbf{H}(\Theta)$ is the full information missing on Θ [i.e. the total uncertainty concerning Θ before observing the values of ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$] the result (1.20) expresses that the sequence of observations $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ gives us — at least in the limit — total information on the unknown value of the parameter. This leads one to guess that there exists a decision function depending only on the observed values $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ which leads *almost surely* to a correct decision concerning the value of Θ. This will be shown in the next §.

§ 2. Construction of an almost surely reliable decision function

If we have to decide after observing $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ what is the most plausible value t_j of Θ, the most natural decision is to decide for that value t_j of Θ for which $P(\Theta = t_j \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)$ is maximal. Note that this is not quite the same as the decision suggested by the maximum likelihood principle which suggests to choose that value t_j of Θ for which $\prod_{k=1}^{n} P_j(\xi_k)$ is the largest, though for large values of n the two decisions coincide with probability near to 1. Let us put

$$\Delta_n = t_j \text{ if } \operatorname*{Max}_h \mathbf{P}(\Theta = t_h \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) = \mathbf{P}(\Theta = t_j \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)\,. \tag{2.1}$$

(Of course the decision Δ_n is not necessarily unambiguous but as will be seen below it will be such with probability 1 if n is sufficiently large.) Thus if we take a sequence of observations $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ we get a sequence of decisions $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ Clearly to each sequence of observations $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ there corresponds a "true" value of Θ. Now we prove

Theorem 2. *With probability* 1 *all but a finite number of the decisions* Δ_n *are unambiguous and equal to the true value of the parameter* Θ.

Proof of Theorem 2. Evidently

$$\mathbf{P}(\Delta_n \neq \Theta) \leqq \sum_{h=1}^{r} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{r} w_h \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{P}(\Theta = t_j \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\mathbf{P}(\Theta = t_h \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)} \geqq 1 \,\middle|\, \Omega_h\right). \tag{2.2}$$

By Markoff's inequality:

$$\mathbf{P}(\eta \geqq \lambda\, \mathbf{M}(\eta)) \leqq \frac{1}{\lambda} \tag{2.3}$$

valid for any nonnegative random variable η and any $\lambda > 1$, and in view of

$$\frac{\mathbf{P}(\Theta = t_j \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\mathbf{P}(\Theta = t_h \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)} = \frac{w_j}{w_h} \prod_{k=1}^{n} \frac{P_j(\xi_k)}{P_h(\xi_k)} \tag{2.4}$$

and taking (1.16) into account, we obtain

$$\mathbf{P}(\Delta_n \neq \Theta) \leq \sum_{h=1}^{r} w_h \sum_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{r} \sqrt{\frac{w_j}{w_h}}\, q_{jh}^n \leq Bq^n \tag{2.5}$$

where

$$B = \sum_{h=1}^{r} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{r} \sqrt{w_j w_h} = \left(\sum_{j=1}^{r} \sqrt{w_j}\right)^2 - 1 \leq r - 1$$

and q is defined by (1.17).

Thus it follows that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\Delta_n \neq \Theta) \tag{2.6}$$

is convergent. Applying the BOREL—CANTELLI lemma it follows that with probability 1 $\Delta_n = \Theta$ for sufficiently large values of n. This proves Theorem 2.

Of course if ν denotes the least integer such that $\Delta_n = \Theta$ for $n \geqq \nu$ then we get from Theorem 2 that the random variable ν is almost everywhere finite, but this does not mean that ν is bounded. However it is easy to prove that the expectation of ν is finite. As a matter of fact

$$\mathbf{P}(\nu \geqq m) \leqq \sum_{n=m}^{\infty} \mathbf{P}(\Delta_n \neq \Theta) \leqq \frac{Bq^m}{1-q} \tag{2.7}$$

and thus the series

$$\mathbf{M}(\nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu \geqq m) \tag{2.8}$$

is convergent; from (2.7) we even get the estimate

$$\mathbf{M}(\nu) \leqq \frac{Bq}{(1-q)^2}. \tag{2.9}$$

Of course this does not mean that one can determine the true value of Θ from a finite number of observations with probability 1, because even if Δ_n is equal to the same value t_j, for $n \geqq M$, if we stop observing the ξ_n-s with the observation ξ_{M+N} we can not be quite sure whether Δ_n would have remained equal to t_j if we would have continued the observations. Of course the probability of this event will be arbitrarily small if $M + N$ is sufficiently large.

For the discussion of the case when Θ has a continuous distribution other methods are needed. We intend to return to this problem in an other paper.

§ 3. Some further remarks

In the present paper we have taken the Bayesian point of view, which — as has been pointed out already by LINDLEY (see [4]) — is the natural point of view if one wants to compute the amount of information on a parameter furnished by some observations, this quantity being dependent on the prior distribution of this parameter. In this connection we want to emphasize that as the inequalities

$$0 \leqq \mathbf{H}(\Theta) - I_n \leqq C(r-1)q^n$$

and

$$\mathbf{P}(\Delta_n \neq \Theta) \leqq (r-1)q^n$$

hold *uniformly* for all possible prior distributions $\{w_j\}$, our results are meaningful even in the case when nothing is known about the prior distribution.

It should be added finally that the random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ considered in this paper, while being independent on each subspace Ω_h of the total probability space Ω, are dependent on Ω, but in a particularly simple way: they are equivalent (symmetrically dependent); as a matter of fact if $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ we have

$$\mathbf{P}(\xi_{n_1} = x_1, \xi_{n_2} = x_2, \ldots, \xi_{n_k} = x_k) = \sum_{h=1}^{r} w_h \prod_{l=1}^{k} P_h(x_l)$$

and thus this probability does not depend on the choice of the indices n_1, $n_2, \ldots, n_k$.

Thus the values $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ may be considered as a sequence of signals emitted by a stationary source of a particularly simple type which may be called a *source with equivalent signals*. We shall return to the corresponding problem for an arbitrary stationary source in an other paper.

Finally we want to call attention to the information-theoretical meaning of the quantities q_{jh} defined by (1.16). Some years ago we have introduced (see [5], [6], [7]) the notion of the entropy of order a $(0 < a < +\infty)$ of a probability distribution $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_r)$ which is defined for $a \neq 1$ by the formula

$$\mathbf{H}_a(\mathcal{P}) = \frac{1}{1-a} \log \left(\sum_{k=1}^{r} p_k^a \right). \tag{3.1}$$

We define $\mathbf{H}_1(\mathcal{P})$ by passing to the limit in (3.1), i.e. we put

$$\mathbf{H}_1(\mathcal{P}) = \lim_{a\to 1} \mathbf{H}_a(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{r} p_k \log \frac{1}{p_k}. \tag{3.2}$$

Thus $\mathbf{H}_1(\mathcal{P})$ is equal to SHANNON's entropy of the distribution $\mathcal{P}$.

Similarly we have introduced the notion of "information gain" of order a obtained if the prior distribution $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_r)$ is replaced by the posterior distribution $Q = (q_1, \ldots, q_r)$ defined for $a \neq 1$ by the formula

$$I_a(Q \,||\, \mathcal{P}) = \frac{1}{a-1} \log \left(\sum_{k=1}^{r} q_k^a p_k^{1-a} \right). \tag{3.3}$$

If we define $I_1(Q \,||\, \mathcal{P})$ again by passing to the limit in (3.3), we obtain

$$I_1(Q \,||\, \mathcal{P}) = \lim_{a\to 1} I_a(Q \,||\, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{r} q_k \log \frac{q_k}{p_k} \tag{3.4}$$

i.e. $I_1(Q \,||\, \mathcal{P})$ is given by the familiar formula for information-gain.

Now clearly

$$q_{jk}^2 = 2^{-I_{1/2}(P_k || P_j)}$$

where $P_l = \{P_l(1), \ldots, P_l(s)\}$ is the conditional distribution of the variables ξ_n under the condition $\Theta = t_l$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$.

Similarly the constant B figuring in (2.5) can be expressed by the formula

$$B = 2^{\mathbf{H}_{1/2}(W)} - 1$$

where $W = (w_1, \ldots, w_r)$ is the prior distribution of the random variable Θ.

Let us mention that the quantity $I_{1/2}(Q \,||\, \mathcal{P})$ as a measure of the discrepancy between the distributions Q and $\mathcal{P}$ has been considered earlier by A. BHATTACHARYYA [8] and H. JEFFREYS [9].

Thus the situation can be characterized as follows: though we accepted as a measure of the amount of information in the sample $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ SHANNON's usual measure (of order $a = 1$) nevertheless in course of the proof the measure of order $a = \frac{1}{2}$ of information gain and of entropy resp. entered our considerations for purely technical reasons. (See also [10], [11] and [12].)

Note that instead of $a = 1/2$ any value of a such that $0 < a < 1$ could have been used. The value of a which leads to the least value of q depends in general on the conditional distributions P_l $(l = 1, 2, \ldots, r)$. However, in the present paper we did not aim at finding the least possible value of q only to prove that such a value less than 1 exists, therefore for the sake of simplicity we have chosen $a = \frac{1}{2}$.

(Received November 20, 1964.)

REFERENCES

[1] KOLMOGOROFF, A. N.: "Theorie der Nachrichtenübermittlung." *Arbeiten zur Informationstheorie* I. 91—114. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.
[2] GELFAND, I. M.—JAGLOM, A. M.—KOLMOGOROFF, A. N.: "Zur allgemeinen Definition der Information." *Arbeiten zur Informationstheorie* II. 57—60. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958.
[3] CHIANG TSE-PEI: "Eine Bemerkung zur Definition der Information." *Arbeiten zur Informationstheorie* II. 61—64. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958.
[4] LINDLEY, D. V.: "On a measure of the information provided by an experiment." *Annals of Math. Stat.* **27** (1956), 986—1005.
[5] RÉNYI, A.: "Az információelmélet néhány alapvető kérdése." *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960) 251—282.
[6] RÉNYI, A.: "Dimension, entropy and information." *Transactions of the 2nd Prague Conference on Information theory* (1960) 545—556.
[7] RÉNYI, A.: "On measures of entropy and information." *Proceedings of the 4th Berkeley Symposion on Math. Stat. and Prob.* (1960) 547—561.
[8] BHATTACHARYYA, A.: "On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation." *Sankhya* **8** (1946) 1—14.
[9] JEFFREYS, H.: *Theory of probability* (2nd edition). Oxford, Clarendon Press, 1948.
[10] KULLBACK, S.: *Information theory ana statistics.* Wiley, 1959.
[11] CHERNOFF, H.: "A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations." *Bull. Amer. Math. Soc.* **23** (1952) 493—507.
[12] RÉNYI, A.: "Az információ-akkumuláció statisztikus törvényszerűségeiről." *MTA III. o. Közl.* **12** (1962) 15—33.

О КОЛИЧЕСТВЕ ИНФОРМАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ

A. RÉNYI

Резюме

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ последовательность случайных величин, которые при всяком данном значении параметра Θ независимы и одинаково распределены. Предположим, что сама Θ случайная величина с дискретным распределением $\mathbf{P}(\Theta = t_j) = w_j (j = 1, 2, \ldots, r; \sum_{j=1}^{r} w_j = 1)$. В работе доказывается следующая теорема: Существуют постоянные A и $q (A > 0,\ 0 < q < 1)$,

так что, если I_n обозначает количество информации в выборке $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ относительно Θ и $\mathbf{H}$ означает энтропию от Θ, тогда имеет место неравенство

$$0 \leqq \mathbf{H} - I_n \leqq Aq^n$$

Из этого следует, что для достаточно большого числа n решение Δ_n правильно с вероятностью 1. Здесь Δ_n означает решение, что после наблюдения значений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ мы выберем как «истинное» значение от Θ то значение t_j, для которого условная вероятность $\mathbf{P}(\Theta = t_j \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)$ максимальна.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Dáloki János
A kézirat nyomdába érkezett: 1964. XII. 19. – Példányszám: 800. – Terjedelem: 33,6 (A/5) ív

65.60052 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Ára: 15,– Ft

INDEX: 25577

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

IX. ÉVFOLYAM, B. SOROZAT, 4. FÜZET

1964

★

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ IX, СЕРИЯ B, ВЫПУСК 4.

1964

★

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME IX, SERIES B, FASC. 4.

1964

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST ·

1965

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

IX. ÉVFOLYAM, B. SOROZAT, 4. FÜZET

1964

*

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ IX, СЕРИЯ В, ВЫПУСК 4.

1964

*

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE

HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME IX, SERIES B, FASC. 4.

1964

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST

1965

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ: RÉNYI ALFRÉD

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaív terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. A közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEInek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft. *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержашие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусках серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюмами на языках отличающих от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов ($ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR IN CHIEF: ALFRÉD RÉNYI

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers and papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft ($ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

TÖBBFOKOZATÚ SZÁLLÍTÁSI PROBLÉMA

KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA

Bevezetés

A többfokozatú szállítási probléma, amellyel ebben a cikkben foglalkozunk, abban különbözik a közönséges szállítási feladattól, hogy nemcsak két fajta telephelyet különböztetünk meg — az egyik, ahonnan, a másik, ahová szállítunk —, hanem közbülső helyek is vannak, amelyeken átmenő szállítás történik. Ezen közbülső helyek kapacitása korlátozott. A továbbiakban részletesen tárgyalt gabonaraktárak — malmok — lisztraktárak közötti szállítási problémán kívül ilyen problémára vezet például, ha a termelőhelyekről bizonyos árucikkeket elszállítanak a központi raktárakba, majd onnan második fokozatként az üzletekbe. További példaként megemlítjük az olyan termékek esetét, amelyeket több különböző típusú üzemben munkálnak meg egymás után, és mindegyik fajta gyárból több van. Meghatározandó az összes gyárat magábafoglaló kooperációs program úgy, hogy a kombinált szállítási és termelési összköltség minimális legyen. (A termelési költséget hozzászámíthatjuk a megfelelő szállítási költséghez.)

Matematikailag a probléma a következő:
Keresendő az

$$x_{il} \geqq 0\,, \quad y_{lj} \geqq 0$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_{il} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{il} = \sum_{j=1}^{p} y_{lj} \leqq k_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{l=1}^{n} y_{lj} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

rendszert kielégítő azon x_{il}, y_{lj} változó-értékek, melyek minimalizálják a

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{il}x_{il} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} d_{lj}y_{lj}$$

lineáris kifejezést. Az itt szereplő $a_i > 0$, $b_j > 0$, $k_l > 0$, c_{il}, d_{lj} mennyiségek adott konstansok, amelyekre a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{p} b_j \leqq \sum_{l=1}^{n} k_l$$

relációk teljesülnek. Itt a_i jelenti az i-edik termelőhely kínálatát, b_j a j-edik felhasználó fogyasztását és k_j a j-edik közbülső hely kapacitását.

A probléma jelentőségét mutatja, hogy már többen foglalkoztak a megoldásával. Az egyik megfogalmazás szerint, amikor az i-edik termelőhelyről az l-edik közbülső helyen keresztül a j-edik fogyasztóhoz x_{ilj} mennyiséget juttatunk. Ekkor az $x_{ilj} \geqq 0$

$$\sum_l \sum_j x_{ilj} = a_i \qquad \sum_i \sum_j x_{ilj} \leqq k_l \qquad \sum_i \sum_l x_{ilj} = b_j$$

$$\min \sum_i \sum_l \sum_j (c_{il} + c_{lj}) x_{ilj}$$

ún. multiindexes szállítási problémához jutunk. (L. például [5]) Ekkor azonban a változók száma mnp, ami viszonylag kis m, n és p esetén is igen nagy. A változók nagy száma miatt még az elektronikus géppel való megoldás is komoly problémát okoz. Például $m = n = p = 30$ esetén hazai gépekkel már nem tudnánk megoldani a problémát. A korábbi megfogalmazásban csak $mn + np$ változó szerepel!

A másik megoldás W. SZWARC lengyel matematikus [3] dolgozatában olvasható az ún. szállítási séma alkalmazásaként. Ebben negatív változók is lehetnek. A meg nem engedett szállításokat, például gabona a lisztraktárba, $+\infty$ ill. $-\infty$ megfelelő költségekkel zárja ki az optimumból. Ezek a lehetőségek a jelen tárgyalásban már nem is szerepelnek. További rövidítést jelent a pótváltozók egyszeri szerepeltetése a megoldó táblázatokban a Szwarc-modellben található kétszeres felhasználással szemben.

A bizonyításokat illetően nem SZWARC eredményeit használtuk fel, hanem a klasszikus szállítási probléma megfelelő tételeit általánosítottuk. A standard szállítási feladat elmélete megtalálható például HADLEY [2] és G. B. DANTZIG [1] könyvében. Az utóbbi könyv tartalmazza a teljesen általános gráffal jellemezhető rendszeren való szállítási problémát („transshipment problem"), azonban az éppen az általános volta miatt meglehetősen bonyolult.

A jelen cikk 1—2. pontja a feladat ismertetését és változatait tárgyalja. A 3. pont az előkészítő tételeket tartalmazza, melyek a klasszikus szállítási probléma megfelelő tételeinek általánosításai. Az algoritmus lényegének leírása a 4. pontban van, míg az 5—7. és 9. pontok kiegészítéseket tartalmaznak. Végül az egész eljárást egy numerikus példán szemléltetjük a 8. pontban.

1. Egy gyakorlati alkalmazás

Abból a célból, hogy a probléma lényegét és gyakorlati jelentőségét jobban láthassuk, kezdjük vizsgálódásainkat egy konkrét feladaton.

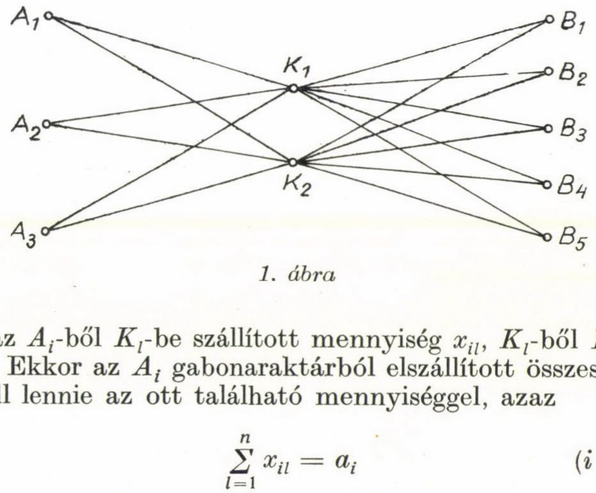
Néhány évvel ezelőtt az optimális gabona ill. liszt szállítástervezés kérdésével a Matematikai Kutató Intézethez fordultak a gazdasági szakemberek. Az áttekinthetőség kedvéért most leegyszerűsítve tárgyaljuk ezt a problémát.

A feladatban m gabonaraktár, n malom és p liszttárolóhely szerepel. Ezeket rendre A_i, K_l és B_j-vel jelöljük. Adva van továbbá az i-edik gabonaraktárból az l-edik malomba való szállítás egységköltsége, c_{il}, és az l-edik malomból a j-edik liszttárolóhelyre való szállítás egységköltsége, d_{lj}. Megjegyzendő, hogy ekkor a malomba beérkező és onnan elszállított mennyiség nem azonos, hiszen 1q búzából nem lesz 1q liszt, hanem csak kevesebb. Ezt a nehézséget elkerülhetjük úgy, hogy a lisztet is búza egységekben mérjük, azaz például egy egységnyinek nevezzük azt a lisztmennyiséget, ami 1q (általában egységnyi) búzából lesz. Ezen egységnyi liszt szállítási költsége lesz d_{lj}, és a lisztraktárak „igényét" is ebben az egységben állapítjuk meg. Az i-edik gabonatárolóhelyen a_i mennyiségű gabona áll rendelkezésre, a j-edik liszttárolóhely szükséglete pedig b_j. Ekkor a fenti megjegyzést figyelembe véve, az összes gabona mennyisége megegyezik az összes lisztkereslettel:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{p} b_j . \tag{1.1}$$

Legyen továbbá az l-edik malom kapacitása k_l.

Készítsünk egy vázlatot, melyen ábrázoljuk a gabonaraktárakat (A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$), a malmokat (K_l, $l = 1, 2, \ldots, n$) és a liszttárolóhelyeket ($B_j, j = 1, 2, \ldots, p$), valamint a közöttük levő szállítási útvonalakat. Nyilvánvaló, hogy A_i-kből K_l-ekbe és K_l-ekből B_j-kbe vezetnek utak, de közvetlenül az A_i-kből B_j-kbe nem, hiszen gabonát egyenesen nem szállíthatunk a lisztraktárba. Az 1. ábrán az $m = 3$, $n = 2$ és $p = 5$ esetet vázoltuk.



1. ábra

Legyen az A_i-ből K_l-be szállított mennyiség x_{il}, K_l-ből B_j-be szállított mennyiség y_{lj}. Ekkor az A_i gabonaraktárból elszállított összes mennyiségnek egyenlőnek kell lennie az ott található mennyiséggel, azaz

$$\sum_{l=1}^{n} x_{il} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.2}$$

hasonlóan a különböző malmokból B_j-be szállított mennyiségnek egyenlőnek kell lennie az ottani kereslettel,

$$\sum_{l=1}^{n} y_{lj} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p). \tag{1.3}$$

Továbbá minden malomból pontosan ugyanannyi lisztet vihetünk el (gabonaegységekben mérve!), amennyi gabonát odaszállítottunk, ezenkívül ez a „keresztülszállított" mennyiség nem lehet nagyobb, mint az illető malom kapacitása, azaz

$$\sum_{i=1}^{m} x_{il} = \sum_{j=1}^{p} y_{lj} \leqq k_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.4}$$

Mivel az A_i-ből a K_l-be való szállítás egységköltsége c_{il}, a teljes mennyiség, x_{il} szállítási költsége $c_{il}x_{il}$. Minden gabonaraktár-malom viszonylatra kiszámolva az összköltség $\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{il}x_{il}$. Hasonlóan malom-lisztraktár szállítási összköltsége $\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} d_{lj}y_{lj}$. Így a szállítások teljes költsége:

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{il}x_{il} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} d_{lj}y_{lj}\,. \tag{1.5}$$

A feladat tehát a következő: Keresendők olyan $x_{il} \geqq 0$ és $y_{lj} \geqq 0$ számok $(i = 1,\ldots, m;\ l = 1,\ldots, n;\ j = 1,\ldots, p)$, amelyek kielégítik az (1.2)—(1.4) feltételeket és emellett az (1.5) függvény a lehető legkisebb értéket vesz fel.

A most vázolt modell természetesen nem írja le pontosan a valóságot, bizonyos kiegészítésekre szorul. Például nem vettük figyelembe azt, hogy a malmok különböző költséggel őrölnek. Ezen könnyen segíthetünk olymódon, hogy az őrlési költséget hozzászámítjuk vagy az odaszállítás vagy az elszállítás költségeihez.

2. A probléma változatai

A többfokozatú szállítási feladat felmerülhet a tervezés stádiumában is bizonyos ipari létesítményeknél vagy bizonyos termékeknél, amelyeket egymás után különböző helyeken különböző műveleteknek vetnek alá. A megművelés költségeit — amennyiben azok azonos típusú gyáranként is változnak — hozzászámíthatjuk ismét a megfelelő szállítási költségekhez.

Jelentsenek most az A_i-k gyárakat, ahol a munkadarabokon az első műveletet végzik. Ezután a munkadarabok a K_l-lel jelölt kooperáló gyárakba jutnak, majd átadják a kész termékeket a B_j-vel jelölt fogyasztóknak. Legyen az A_i üzem termelési kapacitása a_i $(i = 1, 2,\ldots, m)$, a K_l üzemeké k_l $(l = 1,\ldots, n)$, végül legyen a B_j fogyasztó igénye b_j. Ez a példa mindössze abban különbözik az 1. pontban tárgyalttól, hogy nem kívánjuk meg a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{p} b_j$$

egyenlőséget, ugyanis lehet, hogy az A_i gyárak összkapacitása nagyobb, mint az összkereslet (ekkor bizonyos gyárakban marad kihasználatlan kapacitás), azonban kisebb nem lehet, azaz a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqq \sum_{j=1}^{p} b_j \tag{2.1}$$

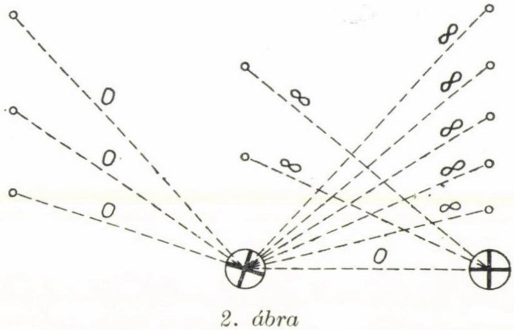
egyenlőtlenség fogja helyettesíteni az 1. pontban szereplő példában feltételezett (1.1) egyenlőséget. Szerencsére ez a probléma könnyen visszavezethető az előbbire. Vegyünk fel ugyanis egy fiktív gyárat a középső csoportban, valamint egy fiktív fogyasztót, ahova a többletkapacitásnak megfelelő mennyiséget szállítjuk, azaz legyen

$$k_{n+1} = b_{p+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{p} b_j\,.$$

Természetesen most már

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{p+1} b_j ,$$

azonban azt még biztosítanunk kell, hogy ez a fiktív szállítás ne jelentsen többletköltséget, tehát ne zavarja meg az igazi szállítást, valamint azt, hogy a K_{n+1} közbülső (fiktív) állomásról ne szállíthassunk árut a $B_1, \ldots, B_p$ valódi fogyasztókhoz, továbbá valódi árut ne szállíthassunk a fiktív fogyasztóhoz. Ezt a három kívánalmat könnyen kielégíthetjük, ha $c_{i,n+1} = d_{n+1,p+1} = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ egységköltséget választjuk a fiktív szállításokra, valamint $d_{n+1,j} = \infty$ $(j \neq p+1)$ és $d_{l,n+1} = \infty$ $(l \neq n+1)$ egységköltséget választjuk a meg nem engedett szállításokra. Az eddig elmondottak azonnal világossá válnak, ha egy pillantást vetünk a 2. ábrára, melyen ismét az $m = 3$, $n = 2$, $p = 4$ esetet vázoltuk, de bejelöltük a fiktív állomásokat és a hozzátartozó egységköltségeket is. Az ábrán az eredeti utakat nem tüntettük fel, hogy elkerüljük a sok vonal okozta zavart. Természetesen a ∞ költségek helyett a gyakorlati számításoknál egy kellően nagyra választott költséget választunk, amely az optimális megoldásban lehetetlenné teszi a meg nem engedett szállítások részvételét.



2. ábra

Előfordulhat az is, hogy bizonyos gyárakat csak ezután fogunk létesíteni, így azok kapacitását tetszőlegesen nagynak tekinthetjük a számítások megkezdésekor. Könnyen elkerülhetjük az ebből adódó nehézségeket, ugyanis ha például K_l egy ilyen tetszőleges kapacitású gyár, akkor a $k_l = \sum_{j=1}^{n} b_j$ kapacitás felvételével nem korlátoztuk a K_l gyáron keresztülhaladó mennyiséget, mert a legrosszabb esetben a teljes kereslet ezen az üzemen mehet keresztül. A most elmondottak érvényesek a kiinduló, A_i gyárakra vagy raktárakra is. Megjegyzendő, hogy a $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{l=1}^{n} k_l = \sum_{j=1}^{p} b_j$ esetben, amikor biztosan nem lesz kihasználatlan kapacitás a feladat egyszerűen mint két egymásutáni szállítási probléma oldható meg. Az eddig elmondottak érvényesek akkor is, ha az $A_1, \ldots, A_m$ kiinduló helyekről a $K_1, \ldots, K_n$, majd innen az $L_1, \ldots, L_r$ közbülső feldolgozó helyekre és innen a $B_1, \ldots, B_p$ célállomásokra kerül az áru, sőt a közbülső fázisok száma még ennél is több lehet. (L. bővebben a 9. pontban.)

3. Előkészítő tételek

A megoldás alapvetően a közönséges szállítási feladat gondolatmenetét követi, így a megfelelő általánosabb tételeket kell először bebizonyítanunk. Áttekinthetőség kedvéért foglaljuk össze a feladatot. Tegyük fel, hogy az (1.1) feltétel teljesül, azaz

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{p} b_j . \tag{3.1}$$

Keresendők az (1.2)—(1.4) feltételnek eleget tevő oly x_{il}, y_{lj} számok, melyre az (1.5) függvény a minimumát veszi fel.

Az (1.4) feltétel rendkívül kényelmetlen, alapjában két feltételt foglal össze. Az egyik azt jelenti, hogy a K_l-be beérkező összmennyiség megegyezik az onnan elszállított összmennyiséggel, azaz

$$\sum_{i=1}^{m} x_{il} = \sum_{j=1}^{p} y_{lj} \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

a másik pedig azt, hogy ez a közös érték, azaz az áthaladó mennyiség nem több, mint a K_l pontbeli k_l kapacitás.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{il} \leqq k_l \qquad (l = 1, \ldots, n) . \tag{3.3}$$

Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a K_l-ben mind a befutó, mind a kiszállított összmennyiség az adott k_l korlát alatt marad, éspedig ugyanannyival. Azaz a (3.2) és (3.3) együtt equivalens az alábbi két egyenlőség rendszerrel:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{il} + s_l = k_l \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{p} y_{lj} + s_l = k_l \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

ahol $s_l \geqq 0$ $(l = 1, \ldots, n)$.

Ennek alapján tehát a feladatunk a következőképpen írható fel, az (1.4)-et, ill. (3.2)—(3.3)-t a (3.4)—(3.5)-tel helyettesítve:

$$\sum_{l=1}^{n} x_{il} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{il} + s_l = k_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{p} y_{lj} + s_l = k_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.8}$$

$$\sum_{l=1}^{n} y_{lj} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{3.9}$$

$$\begin{array}{ll} x_{il} \geqq 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ y_{lj} \geqq 0 & (l = 1, 2, \ldots, n) \\ s_l \geqq 0 & (j = 1, 2, \ldots, p) \end{array} \tag{3.10}$$

$$\min \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{il} x_{il} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} d_{lj} y_{lj} \right) . \tag{3.11}$$

A közönséges szállítási problémához hasonlóan ezt is könnyen ábrázolhatjuk egy egyszerű sémával, amely azonban két egymásutáni szállításról lévén szó két téglalap alakú táblázatból áll, ezek azonban nem függetlenek egymástól. Az összefüggést az s_l pótváltozók kettős szereplése jelenti, amely azt biztosítja, hogy pontosan ugyanannyit szállítsunk el egy közbülső állomásról, mint amennyit odaszállítottunk.

Az 1. táblázaton láthatók az említett résztáblázatok is, amelyeken könnyen látható, hogy a (3.6)—(3.10) követelmények itt azt jelentik, hogy soronként, illetőleg oszloponként összeadva a változókat a sor, ill. oszlop szélére írt számot kell megkapnunk.

Az egészet együtt tekintve is emlékeztet egy szállítási problémára, amely $(m+n)\cdot(n+p)$ változót tartalmaz, ezek közül azonban valójában csak $mn+n+np$ létezik. Természetesen a feladat megoldható volna úgy is, hogy ezeket a változókat hozzávesszük, ∞ hozzárendelt költséggel, ezáltal azonban a változók száma $(m+n)(n+p)-(mn+n+np) = n^2-n+ + mp$-vel növekedne, amely különösen nagy n (vagy több mint két fokozatú probléma) esetén jelentős többletmunkát eredményezne.

Most vizsgáljuk meg a (3.6)—(3.11) lineáris programozási feladat mátrixát, azaz azt a mátrixot, amely a (3.6)—(3.9) egyenlőségek bal oldalán szereplő x_{il}, y_{lj} és s_l ismeretlenek együtthatóiból áll. Könnyebb áttekinthetőség kedvéért, valamint, hogy a bizonyítások megértését megkönnyítsük, ezt a mátrixot részletesen kiirjuk:

(3.12)

$$A = \left[\begin{array}{cccccccccccc}
11\ldots1 & & & & & & & & & & & \\
 & 11\ldots1 & & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & & 11\ldots1 & & & & & & & & \\
1 & 1 & \ldots & 1 & & & & & 1 & & & \\
1 & 1 & \ldots & 1 & & & & & & 1 & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & & \ddots & \\
1 & 1 & \ldots & 1 & & & & & & & & 1 \\
 & & & & 11\ldots1 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 11\ldots1 & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 11\ldots1 & & & & 1 \\
 & & & & 1 & 1 & \ldots & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \ldots & 1 & & & & \\
 & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \ldots & 1 & & & &
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ m \text{ sor} \\ (+) \\ \\
\\ n \text{ sor} \\ (-) \\ \\
\\ n \text{ sor} \\ (+) \\ \\
\\ p \text{ sor} \\ (-) \\ \\
\end{array}$$

$m \times n$ oszlop $\qquad$ $n \times p$ oszlop $\qquad$ n oszlop

a_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	x_{m1}	x_{m2}	$\dots$	x_{mn}

k_1	s_1			
k_2		s_2		
$\vdots$				
k_n				s_n
	k_1	k_2		k_n

y_{11}	y_{12}	$\dots$	y_{1p}
y_{21}	y_{22}	$\dots$	y_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_{n1}	y_{n2}	$\dots$	y_{np}
b_1	b_2	$\dots$	b_p

1. táblázat

A (3.12) összefüggésben az A mátrix többi helyén zérusok állnak. A mátrix tehát csupa olyan oszlopból áll, amelyik két egyest tartalmaz. Ezenkívül két részmátrixa hagyományos szállítási feladatmátrix. Az $m \times n$ és $n \times p$ szállítási mátrixot az utolsó n oszlop kapcsolja össze.

Ezek után vizsgáljuk meg az A mátrix néhány tulajdonságát. Jelöljük az x_{il}, y_{lj}, s_l változók együtthatóiból álló vektorokat rendre $\mathbf{p}_{il}$, $\mathbf{q}_{lj}$ és $\mathbf{r}_l$-lel.

1. Tétel. *Az A mátrix rangja, ha $n \geqq 2$,*

$$r(A) = m + 2n + p - 1\,. \tag{3.13}$$

Bizonyítás. Mivel a mátrix rangja a lineárisan független oszlopvektorok (vagy sorvektorok) maximális száma, könnyen beláthatjuk, hogy

$$r(A) < m + 2n + p\,. \tag{3.14}$$

Ehhez csak annyit kell igazolni, hogy az A mátrix $m + 2n + p$ számú sorvektora együttesen nem lineárisan független. Adjuk össze az A mátrix sorait úgy, hogy előzőleg az első m sort pozitív, a következő n sort negatív, az utána levő n sort ismét pozitív, majd az utolsó p sort negatív előjellel lássuk el, ahogy azt az A mátrix (3.12) felírásánál a zárójelbe tett előjelek mutatják. Az eredmény nullvektor, így a kérdéses mátrix sorvektorai nem lineárisan függetlenek, tehát a (3.14) egyenlőtlenséget beláttuk.

Most igazoljuk, hogy

$$r(A) > m + 2n + p - 2\,. \tag{3.15}$$

Jelöljük az A mátrix első mn oszlopából álló részmátrixot A_1-gyel. Az első mn oszlop, mint már említettük, egy közönséges $m \times n$ méretű szállítási probléma mátrixa (ha az utolsó $n + p$ koordinátát, melyek mind zérusok, elhagynánk). Ismeretes, hogy az A_1 mátrix rangja $m + n - 1$. Ezt azonban könnyen ki is mutathatjuk. Az A_1 mátrix első m sorának pozitív és a következő n sorának negatív előjellel vett összege null-vektor, így $r(A_1) \leqq m + n - 1$. Ha azonban kiválasztjuk az első n oszlopvektorát, valamint minden további n-es csoportból az elsőt, könnyen belátható, hogy ezek lineárisan függetlenek, azaz $r(A_1) = m + n - 1$. Hasonlóan az A_2 mátrixra, mely az $mn + 1$-edik oszloptól az

$mn + np$-edik oszlopig terjed: $r(A_2) = n + p - 1$. Ez annyit jelent, hogy az A_1 és A_2 mátrixból kiválaszthatunk $m + n - 1$, ill. $n + p - 1$ lineárisan független oszlopvektort, amelyek természetesen együttesen is lineárisan függetlenek, hiszen amelyik sorban az egyik mátrixban a nemzérus elemek állnak, ott a másikban a zérus elemek, és viszont. Együttesen tehát van $m + 2n + + p - 2$ lineárisan független oszlopvektorunk, amelyekről be kell látnunk, hogy az A mátrixra nézve nem alkotnak bázist, azaz van olyan oszlopvektor, amely nem fejezhető ki lineáris kombinációik segítségével. Ez az oszlopvektor nem kerülhet ki természetesen az A_1 vagy A_2 mátrixból, hiszen onnan egy-egy bázist választottunk. Ezért tekintsük kéldául az s_1 változó együttható-vektorát $\mathbf{r}_1$-et, amely az $(m + 1)$-edik és $(m + n + 1)$-edik hely kivételével csupa zérust tartalmaz az említett pozíciókban pedig egyesek állnak. Jelöljük az A_1-ből kiválasztott bázis indexhalmazát B_1-gyel, az A_2-ből kiválasztott bázisét B_2-vel, a két bázis tehát

(3.16) $$\mathbf{p}_{il}\,(i, l) \in B_1 \quad \text{és} \quad \mathbf{q}_{lj}\,(l, j) \in B_2\,.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy az

(3.17) $$\mathbf{r}_1 = \sum_{(i,l)\in B_1} \lambda_{il}\,\mathbf{p}_{il} + \sum_{(l,j)\in B_2} \mu_{lj}\,\mathbf{q}_{lj}$$

előállítás mégis létezik, valamilyen λ_{il} és μ_{lj} konstansokkal. Az $m + 1$-edik helyen szereplő egyes előállításában azonban csak az első összeg vesz részt, hiszen a $\mathbf{q}_{lj}$ vektorok első $m + n$ komponense zérus. Eszerint, ha (3.17) fennáll, akkor

(3.18) $$\mathbf{e}_{m+1} = \sum_{(i,l)\in B_1} \lambda_{il}\,\mathbf{p}_{il}$$

ahol $\mathbf{e}_{m+1}(e_{m+1,1}; \ldots ; e_{m+1,m+2n+p})$ az $(m + 1)$-edik egységvektort jelenti.

Minthogy a $\mathbf{p}_{il}$ vektorok mindegyikének pontosan két eleme 1-es, mégpedig egyik az első m elem, a másik pedig az $m + 1, \ldots, m + n$-edik elemek valamelyike, ezért a (3.18) vektoregyenlőség első m sorát összeadva

(3.19) $$\sum_{(i,l)\in B_1} \lambda_{il} = \sum_{k=1}^{m} e_{m+n,k} = 0$$

az $m + 1, \ldots, m + n$-edik sorát összeadva pedig

(3.20) $$\sum_{(i,l)\in B_1} \lambda_{il} = \sum_{k=m+1}^{m+n} e_{m+1,k} = 1\,.$$

Mivel (3.19) és (3.20) ellentmond egymásnak, befejeztük annak a bizonyítását, hogy $\mathbf{r}_1$ nem állítható elő az A_1-ből választott $m + n - 1$ és az A_2-ből választott $n + p - 1$ elemű, összességében is lineárisan független vektor segítségével, így beláttuk, hogy az $m + 2n + p - 2$ elemű lineárisan független vektorrendszer még nem bázis, azaz (3.15) igaz. Azonban (3.14) és (3.15) együtt a tétel állítását bizonyítja.

Megjegyzés. Ugyanúgy belátható, hogy az A mátrix bármelyik sorát elhagyva ismét egy olyan mátrixhoz jutunk, melynek rangja $m + 2n + p - 1$.

Egy mátrix minormátrixáról (A_k) beszélünk akkor, ha az eredeti mátrix tetszőleges számú sorát és ugyanannyi oszlopát kiválasztva, az ezek kereszteződéseiben álló elemek összességét tekintjük (az eredeti sorrendben!). A minormátrix determinánsát az eredeti mátrix minorának nevezzük.

2. Tétel. *Az A mátrix minden minorának értéke* $0, +1$ *vagy* -1.

Bizonyítás. Az A mátrix minden oszlopában pontosan két egyes szerepel, ezért egy tetszőleges minorának minden oszlopában 0, 1 vagy 2 egyes szerepelhet. A minorokat három csoportba oszthatjuk:

a) Van olyan oszlopa, amelyben nincsen egyes, ekkor értéke 0.

b) Minden oszlopában pontosan két egyes van. Ekkor könnyen beláthatjuk, hogy a minor értéke ismét zérus. Vizsgáljuk meg ugyanis, hogy melyik sora való az A mátrix első m sorából, ennek előjelét hagyjuk pozitívnak. A következő n sorból valót lássuk el negatív előjellel, a további n sorbeli előjele ismét pozitív marad, majd az utolsó p sorbeliét megint negatívra változtatjuk, mint az A mátrix (3.12) felírásánál látható. Ha az így előjelezett sorokat összeadjuk, zérus vektort kapunk, ugyanis minden egyes eredeti párja szerepel és a másik előjelű csoportba esik, így összegük zérus. Ezzel beláttuk, hogy az ilyen típusú minorok értéke is zérus.

c) Végül tekintsük azt az esetet, amikor bizonyos oszlopokban egy egyes van, a többiben kettő. Ekkor fejtsük ki a determinánst az egyedülálló egyesek szerint. Egy kifejtés után a minor abszolút értéke változatlan, legfeljebb az előjele változhat meg:

$$|A_k| = \pm |A_{k-1}| .$$

A kifejtést addig folytatjuk, amíg van olyan oszlop, amelyben egy egyes van. Így vagy eljutunk egy egyetlen 0, ill. 1-ből álló minorig, melynek értéke 0, ill. $+1$ (ekkor az eredeti minor értéke ennek megfelelően 0, ill. ± 1), vagy eljutunk az *a)*, ill. *b)* esetek valamelyikéhez, amikor is az eredeti minor értéke 0.

Mivel az *a)*, *b)* és *c)* az összes esetet tartalmazza, a bizonyítást befejeztük.

Mint azt az 1. tételben láttuk, az A mátrix rangja $m + 2n + p - 1$, azaz a bázis, melynek segítségével A összes oszlopvektorát kifejezhetjük lineáris kombinációként, A pontosan ennyi oszlopvektorából fog állni. Jelöljük ismét az x_{il}, y_{lj}, s_l változók együtthatóvektorait rendre $\mathbf{p}_{il}$, $\mathbf{q}_{lj}$, $\mathbf{r}_l$-lel. Legyen továbbá

$$(3.21) \quad G = \{g_{\alpha,\beta}\} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{m+2n+p-1}] \qquad \begin{matrix} (\alpha = 1, 2, \ldots, m + 2n + p) \\ (\beta = 1, 2, \ldots, m + 2n + p - 1) \end{matrix}$$

az A oszlopvektoraiból álló tetszőleges bázis. Ezen vektorok lineáris kombinációjaként kifejezzük az összes együttható vektort:

$$(3.22) \quad \begin{matrix} \text{(a)} \quad G\mathbf{h}_{il} = \mathbf{p}_{il} \qquad \text{(b)} \quad G\mathbf{z}_{lj} = \mathbf{q}_{lj} \qquad \text{(c)} \quad G\mathbf{w}_l = \mathbf{r}_l \\ (i = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, p) , \end{matrix}$$

ahol $\mathbf{h}_{il}$, $\mathbf{z}_{lj}$ és $\mathbf{w}_l$ a megfelelő lineáris kombinációs együtthatók.

3. Tétel. *Az* $\mathbf{h}_{il}$, $\mathbf{z}_{lj}$ *és* $\mathbf{w}_l$ *vektorok minden komponense* $0, +1$ *vagy* -1.

Bizonyítás. Az állítás helyességét csak $\mathbf{h}_{il}$-re mutatjuk be, a másik két típusú vektor esetén a bizonyítás teljesen hasonlóan történik.

A $\mathbf{p}_{il}$ vektor pontosan két egyest tartalmaz, egyiket az i-edik, másikat az $(m+l)$-edik helyen. Ha elhagyjuk a (3.22(a)) egyenletrendszer $(m+l)$-edik sorát, azaz a G mátrix $(m+l)$-edik sorát (a kapott mátrixot H-val jelöljük) és a $\mathbf{p}_{il}$ vektor $(m+l)$-edik komponensét, akkor a

$$H\,\mathbf{h}_{il}=\mathbf{e}_i \tag{3.23}$$

egyenletrendszerhez jutunk, ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik egységvektort jelenti. A H mátrix nemszinguláris ($|H|\neq 0$), ugyanis az 1. Tétel utáni megjegyzés szerint elhagyhatjuk az eredeti feladatból az A mátrix tetszőleges — jelen esetben az $m+l$-edik — sorát, rangja továbbra is $m+2n+p-1$ lesz. Mivel a G-nek megfelelő H a redukált rendszer bázisa marad (az $m+l$-edik komponensek elhagyása előtti előállítás fennáll a sor törlése után is), így rangja $m+2n+$ $+p-1$. Mivel ez a szám megegyezik sorainak, ill. oszlopainak számával, tehát H nemszinguláris, ahogy állítottuk, tehát létezik inverze. Igy a (3.23) rendszerből:

$$\mathbf{h}_{il}=H^{-1}\,\mathbf{e}_i \tag{3.24}$$

$\mathbf{h}_{il}$ tehát a H^{-1} inverzmátrix i-edik oszlopát jelenti. Minthogy azonban H és minorai az eredeti, A mátrixnak minora, $|H|=+1$, vagy -1 (H nemszinguláris, tehát $|H|\neq 0$), ezenkívül H összes minora is 0, $+1$ vagy -1 értékű. Az inverz mátrix elemeit azonban úgy kaphatjuk meg, hogy a megfelelő elemhez tartozó aldeterminánst osztjuk a teljes mátrix determinánsával. Innen az inverz mátrix minden eleme csak 0, $+1$ vagy -1, ami érvényes $\mathbf{h}_{il}$ komponenseire is, és ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés. Ismeretes, hogy a bázis segítségével történő előállítás egyértelmű, így a fenti tétel egyben azt is jelenti, hogy minden vektor csak úgy állítható elő, hogy a bázisból veszünk bizonyos vektorokat pozitív, másokat negatív előjellel, és összeadjuk őket.

4. Az algoritmus ismertetése

Tekintsünk most egy tetszőleges megengedett bázist. (Azaz egy olyan bázist, amely segítségével a (3.6)—(3.9) egyenletrendszer jobb oldalán álló vektort kifejezve a bázisvektorok együtthatójaként — azaz x_{il}, y_{lj} és s_l számára — nemnegatív értékek adódnak, amint azt a (3.10) feltételben megköveteltük.)

$$\mathbf{p}_{il}\ (i,l)\in B_1 \quad \mathbf{q}_{lj}\ (l,j)\in B_2 \quad \mathbf{r}_l\ l\in B_3 \tag{4.1}$$

ahol B_1, B_2 és B_3 a bázisban levő $\mathbf{p}_{il}$, $\mathbf{q}_{lj}$, illetve $\mathbf{r}_l$ indexpárjainak, ill. indexeinek halmazát jelöli. Ezen bázis segítségével szeretnénk kifejezni az A mátrix egy tetszőleges oszlopvektorát, mondjuk $\mathbf{p}_{i_0l_0}$ vektort. Legyen ez a keresett kifejezés az alábbi:

$$\mathbf{p}_{i_0l_0}=\sum_{(i,l)\in B_1}\lambda^0_{il}\,\mathbf{p}_{il}+\sum_{(l,j)\in B_2}\mu^0_{lj}\,\mathbf{q}_{lj}+\sum_{l\in B_3}\nu^0_l\,\mathbf{r}_l\,. \tag{4.2}$$

Tudjuk, hogy valamennyi λ^0_{il}, μ^0_{lj}, ν^0_l csak 0, $+1$ vagy -1 lehet (3. Tétel). Ezenkívül a $\mathbf{p}_{i_0l_0}$ vektort is ismerjük: az i_0-adik és $m+l_0$-adik eleme egyes, a többi zérus. Kell lenni tehát legalább egy olyan vektornak a (4.2) előállításban, amelynek i_0-adik komponense szintén egyes. Ez a bázisváltozó, mint a (3.12)-ből könnyen kiolvasható, egy olyan változót jelent, amely $x_{i_0l_0}$-lal egy sorban van az 1. táblázatban. Legyen ez az oszlopvektor $\mathbf{p}_{i_0l_1}$, a hozzátartozó együttható $\lambda_{i_0l_1} = 1$. Ekkor azonban a (4.2) előállításban van egy -1 együtthatójú vektor, amelyiknek egy egyes komponense az $(m + l_1)$-edik helyen van, mint $\mathbf{p}_{i_0l_1}$-nek, azaz $x_{i_0l_1}$-gyel egy oszlopban van a következő változó. Igy például az alábbi előállítás adódhat:

$$\mathbf{p}_{i_0l_0} = \mathbf{p}_{i_0l_1} - \mathbf{p}_{i_1l_1} + \mathbf{p}_{i_1l_2} - + \dots - \mathbf{p}_{i_\alpha l_\alpha} + \mathbf{p}_{i_\alpha l_0}\,. \tag{4.3}$$

Természetesen az előállításban szerepelhet $\mathbf{r}_l$ és $\mathbf{q}_{lj}$ típusú oszlopvektor is, például lehet, hogy a báziselőállítás ilyen alakú:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{i_0l_0} = \mathbf{p}_{i_0l_1} - \mathbf{r}_{l_1} + \mathbf{q}_{l_1j_2} - \mathbf{q}_{l_2j_2} + - \dots - \mathbf{q}_{l_\alpha j_\alpha} + \mathbf{r}_{l_\alpha} - \mathbf{p}_{i_\alpha l_\alpha} + \\ + \mathbf{p}_{i_\alpha l_{\alpha+1}} - + \dots - \mathbf{p}_{i_\beta l_\beta} + \mathbf{p}_{i_\beta l_0}\,.\end{aligned} \tag{4.4}$$

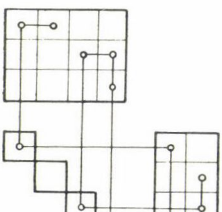
Hogy ezeket az előállításokat jobban megvilágítsuk, tekintsünk egy konkrét példát. Legyen $m = 3$, $n = 4$, $p = 2$. A bázis pedig álljon a következő vektorokból (B_1, B_2, B_3 definícióját lásd (4.1) után):

$$B_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

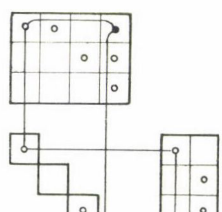
$$B_2 = \{(1,1),(2,2),(3,2),(4,1)\}$$

$$B_3 = \{1,3,4\}\,.$$

Az 1. táblázatnak megfelelő 2. táblázatban kis körrel jelöltük a bázis elemeit. Ha a sorok, illetve oszlopok mentén összekötjük a báziselemeket, látjuk, hogy nincs benne körút (2a. táblázat). Az együtthatómátrix segítségével (3. táblázat, ill. általánosan a (3.12) mátrix) könnyen belátható, hogy a körút a 2. táblázatban azt jelenti, hogy a megfelelő együtthatóvektorok lineárisan összefüggők, ha pedig nincs körút, akkor az együtthatóvektorok lineárisan függetlenek. Mivel a kijelölt változók együtthatóvektorai lineárisan függetlenek, és számuk $m + 2n + p - 1 = 12$, valóban bázist alkotnak.



a)



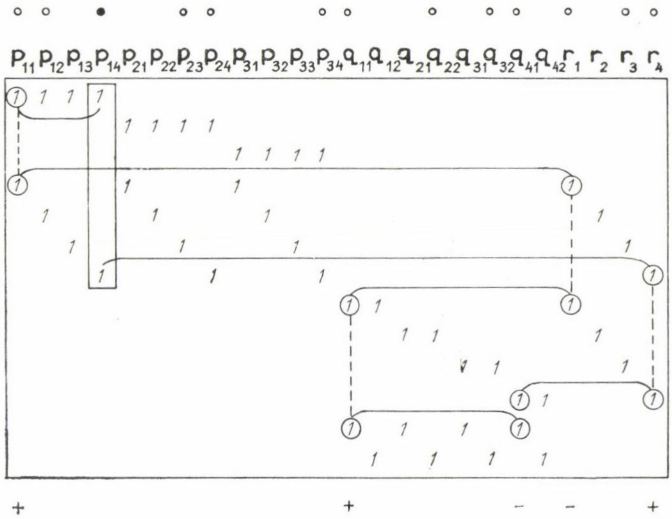
b)

2. táblázat

Állítsuk elő például az x_{14} változó együttható vektorát. (Ezt a táblázatban ponttal jelöltük.) Mint a rajzból is világos, az előállítás a következő:

$$\mathbf{p}_{14} = \mathbf{p}_{11} - \mathbf{r}_1 + \mathbf{q}_{11} - \mathbf{q}_{41} + \mathbf{r}_4 \tag{4.5}$$

Ugyanis a fenti megjegyzés értelmében ha találunk egy hurkot, amely tartalmazza az x_{14} változót, akkor a megfelelő együtthatóvektorok lineárisan össze-függnek. Az együtthatómátrixból (3. táblázat) az is világos, hogy ekkor a (4.5) előállítás érvényes.



3. *táblázat*

Ha a berajzolt utat követve az utolsó sorban levő előjelekkel összeadjuk a vektorokat, pontosan a $\mathbf{p}_{14}$ vektort kapjuk.

Természetesen a 2. táblázat kisebb mérete és jobb áttekintése miatt alkalmasabb számolásra, mint a 3.

Ha már egy tetszőleges, a bázison kívüli x_{il}, y_{lj} vagy s_l változó együtthatóvektorát előállítottuk, akkor következhet a szimplex módszer általános tárgyalásában szereplő $c_{ij} - z_{ij}$ kiszámítása, amely megmutatja, hogy a megfelelő változót bevonjuk a bázisba, fog-e csökkenni a célfüggvény, vagy nem. A c_{ij} jelenti a kiválasztott változóhoz tartozó költséget, z_{ij} pedig a következőt:

(4.6) $$z_{ij} = \mathbf{c}_B B^{-1} \mathbf{a}_{ij}$$

ahol $\mathbf{a}_{ij}$ a változó együtthatóvektora, B a bázisvektorok együtteséből álló mátrix, $\mathbf{c}_B$ pedig a bázisbeli változókhoz tartozó költségek. Az erre vonatkozó részletek megtalálhatók pl. Krekó Béla [4] és Hadley [2] könyvében. $B^{-1}\mathbf{a}_{ij}$ azonban nem más, mint a vizsgált változó együtthatóvektorának kifejezése a bázisvektorokkal, jelen esetben 0, $+1$ és -1 számokból álló vektor. A korábban elmondottak szerint (lásd például (4.3)—(4.5) előállításokat) a $+1$ és -1 együtthatóval szereplő változók a vizsgált változóval együtt, amelynek költségtényezője $+1$ együtthatóval szerepel, együttesen egy hurkot alkotnak (például 2. táblázat). Könnyen belátható, hogy ez a hurok olyan tulajdonságú, hogy az egymásra következő élei mindig merőlegesek, ezenkívül minden sorból vagy oszlopból legfeljebb két változót tartalmaz, és a vizsgált bázison kívüli változó együtthatója úgy állítható elő, hogy az említett hurok mentén szereplő változók együtthatóvektorait váltakozva $+1$ és -1-gyel szorozzuk és összeadjuk. A fenti 0, $+1$, -1 komponensekből álló vektort kell megszorozni skalárisan a bázisváltozókhoz tartozó költségekkel, azaz például a (4.3) előállítás esetében

$$z_{i_0 l_0} = c_{i_0 l_1} - c_{i_1 l_1} + c_{i_1 l_2} - + \ldots + c_{i_\alpha l_\alpha} + c_{i_\alpha l_0} \tag{4.7}$$

vagy a (4.4) előállításnál, figyelembe véve, hogy az s_l pótváltozóhoz (kihasználatlan kapacitás) rendelt költség 0 az y_{lj} szállításokhoz rendelt költség pedig d_{lj}:

$$z_{i_0 l_0} = c_{i_0 l_1} - 0 + d_{l_1 j_2} - d_{l_2 j_2} + - \ldots - d_{l_\alpha j_\alpha} + \tag{4.8}$$

$$+ 0 - c_{i_\alpha l_\alpha} + - \ldots - c_{i_\beta l_\beta} + c_{i_\beta l_0}\,.$$

Vagy a konkrét példában a (4.5) előállításnál

$$z_{14} = c_{11} - 0 + d_{11} - d_{41} + 0\,. \tag{4.9}$$

Az általános szimplex módszerből ismeretes, hogy ha minden változóra a $c_{ij} - z_{ij} \geqq 0$, akkor az optimumnál vagyunk, amennyiben pedig van olyan változó, amelyre $c_{ij} - z_{ij} < 0$, akkor annak a bázisba való bevonásával a célfüggvény értéke csökkenthető, amennyiben degeneráció nem áll elő. Degenerációról beszélünk akkor, ha a bázisban szereplő $m + 2n + p - 1$ számú változó nem mind pozitív, hanem zérus is van közöttük. Minden oszlopvektorra a báziselőállítást természetesen csak $r(A) = m + 2n + p - 1$ lineárisan független oszlopvektor segítségével tudjuk elvégezni, tehát a bázisnak ennyi vektorból kell állni, még akkor is, ha némelyik bázisváltozó zérus. A degeneráció esetével a 7. pontban foglalkozunk.

Az eddig elmondottakra tekintsünk most egy számpéldát. Mint a fenti példában, legyen $m = 3$, $n = 4$, $p = 2$. A költségeket a 4. táblázatban tüntettük fel.

Legyenek továbbá az elszállítandó mennyiségek, a korlátok és a felvevőhelyek igényei rendre a következők:

$a_1 = 6$	$k_1 = 4$	
$a_2 = 6$	$k_2 = 4$	$b_1 = 6$
$a_3 = 3$	$k_3 = 6$	$b_2 = 9$
15	$k_4 = 7$	15

Könnyen belátható, hogy az 5. táblázaton feltüntetett

$$x_{11} = 2\,,\quad x_{12} = 4\,,\quad x_{23} = 5\,,\quad x_{24} = 1\,,\quad x_{34} = 3$$

$$s_1 = 2\,,\quad s_3 = 1\,,\quad s_4 = 3$$

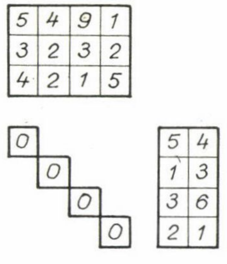
$$y_{11} = 2\,,\quad y_{22} = 4\,,\quad y_{32} = 5\,,\quad y_{41} = 4$$

egy megengedett bázismegoldás.

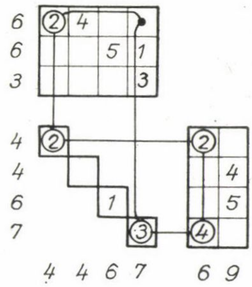
Számítsuk ki például az x_{44}-re vonatkozó $c_{ij} - z_{ij}$ mennyiséget. Mint már korábban láttuk

$$\mathbf{p}_{14} = \mathbf{p}_{11} - \mathbf{r}_1 + \mathbf{q}_{11} - \mathbf{q}_{41} + \mathbf{r}_4 \tag{4.10}$$

$$z_{14} = c_{11} - 0 + d_{11} - d_{41} + 0 \tag{4.11}$$



4. táblázat



5. táblázat

és innen

$$c_{14} - z_{14} = c_{14} - c_{11} + 0 - d_{11} + d_{41} - 0 = 1 - 5 + 0 - 5 + 2 - 0 = -7$$

tehát az x_{14} változót érdemes bevonni a bázisba. Ha az x_{14} változó értékét egy egységgel növeljük, akkor a célfüggvény értéke 7 egységgel csökken. Jelöljük $\mathbf{b}$-vel az $(a_1, a_2, a_3, k_1, k_2, k_3, k_4, k_1, k_2, k_3, k_4, b_1, b_2)$ komponensekből álló $m + 2n + p = 13$ dimenziós oszlopvektort. Ekkor a (3.6)—(3.9) egyenlőségek a jelen példánkban, a bázisvektorok segítségével felírva a következőképpen alakultak:

(4.12)

$$2\mathbf{p}_{11} + 4\mathbf{p}_{12} + 5\mathbf{p}_{23} + \mathbf{p}_{24} + 3\mathbf{p}_{34} + 2\mathbf{q}_{11} + 4\mathbf{q}_{22} + 5\mathbf{q}_{32} + 4\mathbf{q}_{41} + 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 + 3\mathbf{r}_4 = \mathbf{b}\,.$$

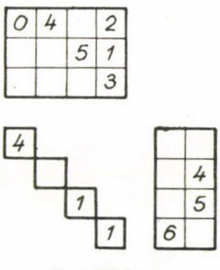
A (4.10) egyenlőséget nullára redukálva, és λ-val megszorozva hozzáadjuk (4.12)-höz, azaz a $\mathbf{p}_{14}$ oszlopvektort λ szinten behoztuk a $\mathbf{b}$ vektor előállításába:

$$\begin{aligned} &(2-\lambda)\,\mathbf{p}_{11} + 4\mathbf{p}_{12} + 5\mathbf{p}_{23} + \mathbf{p}_{24} + 3\mathbf{p}_{34} + (2-\lambda)\,\mathbf{q}_{11} + 4\mathbf{q}_{22} + 5\mathbf{q}_{32} + \\ &+ (4+\lambda)\,\mathbf{q}_{41} + (2+\lambda)\,\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 + (3-\lambda)\,\mathbf{r}_4 + \lambda\,\mathbf{p}_{14} = \mathbf{b}\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Korábban láttuk már, hogy a $\mathbf{p}_{14}$ vektor egységnyi bevonása (azaz x_{14} egységnyi növelése) 7 egységgel csökkenti a célfüggvényt. Tehát λ értékét minél nagyobbra kell választani. Ennek azonban határt szab, hogy minden változónak nemnegatívnak kell maradnia, tehát

$$2 - \lambda \geqq 0\,, \quad 2 - \lambda \geqq 0\,, \quad 3 - \lambda \geqq 0\,.$$

Ennek alapján $x_{14} = \max \lambda = 2$ értéket vehet fel legfeljebb. Ha az új bázist kiszámítjuk, akkor a 6. táblázathoz jutunk. Figyelembe vettük azonban azt is,



6. táblázat

hogy a bázisnak továbbra is $m + 2n + p - 1 = 12$ vektorból kell állnia, tehát mivel két bázisváltozó vált egyszerre zérussá, az egyiket (x_{11}) nulla szinten benthagytuk a bázisban.

A most elmondottak szó szerint megismételhetők teljes általánosságban, ha a $\mathbf{b}$ vektor komponensei helyébe a (3.6)—(3.9) egyenletrendszer jobb oldalait tesszük, a (4.10) bevonandó vektor előállítása helyébe pedig az általános (4.3) ill. (4.4) előállítását.

Részletesebben kifejtve, kiszámítjuk minden változóhoz a $c_{ij} - z_{ij}$ értéket. Az általános lineáris programozásból ismeretes (l. id. művek), hogy a bázisváltozókhoz tartozó $c_{ij} - z_{ij} = 0$. Ha minden $c_{ij} - z_{ij} \geqq 0$, akkor a vizsgált bázismegoldás optimális. Ha találunk olyan változót, amelyhez tartozó $c_{ij} - z_{ij} < 0$, akkor ezt a változót vonjuk be a bázisba. Igy a célfüggvény értéke, amennyiben degeneráció nem lép fel (l. 7. pont), csökken. A báziscsere úgy történik, hogy elvégezzük a bevonandó változó előállítását a bázisváltozók segítségével, ill. a fent említett — a bevonandó változót tartalmazó — hurkot. Figyelembe véve, hogy ezekben az előállításokban egy, az előállítandó vektort tartalmazó, de egyébként csupa bázisvektorból álló hurok mentén váltakozva + és — előjelet vesznek fel az egyes vektorok, az új bázis meghatározása igen könnyű. Az új változó meghatározandó értékét jelöljük λ-val, akkor a hurokban rákövetkező változó értéke $-\lambda$-val változik, majd a következő ismét $+\lambda$-val stb. Mivel a hurok egymásra következő élei egymásra merőlegesek (azaz ha egy változót az előzővel egy sorban választottunk, akkor a következőt vele egy oszlopban választjuk stb.), könnyen belátható, hogy visszaérve az új változó másik szomszédja is $-\lambda$ értékkel változik, vagyis mindegy, hogy a hurkon milyen irányban indulunk el. A maximális javítást adó, tehát a legnagyobb λ értéke ezek alapján úgy határozható meg, hogy a változók nemnegativitása miatt azon régi változók közül, amelyekhez $-\lambda$ járult, a legkisebbet vesszük. Egyúttal meghatároztuk a kieső bázisváltozót is. Ha egyszerre több bázisváltozó válik zérussá, akkor csak egyet hagyunk el, a többit zérus szinten a bázisban hagyjuk.

5. Induló bázismegoldás keresése

A fenti eljárást csak akkor alkalmazhatjuk, ha már egy megengedett bázismegoldás áll a rendelkezésünkre. Most bemutatunk egy módszert induló bázismegoldás keresésére. A közönséges szállítási problémára vonatkozó báziskereső eljárások csak akkor használhatók minden további nélkül, ha különkülön kereshetünk $m + n - 1$, ill. $n + p - 1$ elemű bázisokat, azaz mivel összesen $m + 2n + p - 1$ elemű a bázis, ez csak úgy lehetséges, hogy csak egy s_l legyen a bázisban. Ennek azonban az a feltétele, hogy

$$\sum_{l=1}^{n} k_l - \sum_{i=1}^{m} a_i = s_k \leqq k_n \leqq \max_{1 \leqq l \leqq n} k_l \tag{5.1}$$

teljesüljön. Ha ez teljesül, akkor a két szállítási problémát külön megoldjuk, és az optimális megoldásokra vonatkozóan folytatjuk együttesen a korábban elmondott eljárást. Ha az (5.1) feltétel nem teljesül, akkor a következőképpen járhatunk el: Az s_l pótváltozókat rendre a lehető legnagyobbnak választjuk, míg a kihasználatlan kapacitásokat teljesen szétosztjuk közöttük, úgy, hogy legfeljebb egy legyen töredékesen, azaz

$$\sum_{l=1}^{n} k_l - \sum_{i=1}^{m} a_i = s_1 + s_2 + \ldots + s_h + s_{h+1}$$

$$s_1 = k_1\,,\ s_2 = k_2\,, \ldots,\ s_h = k_h\,,\ s_{h+1} \leqq k_{h+1}$$

$$s_l = 0 \quad l > h + 1\,.$$

Ez annyit jelent, hogy az első $m \times n$ méretű probléma redukálódik egy $m \times (n - h)$ méretűre, mivel az első h oszlop összege $k_l - s_l = 0$ $(l \leq h)$. Hasonlóan a másik feladat redukálódik egy $(n - h) \times p$ méretűre. A két feladatban a szokásos módszerek egyikével — például a északnyugati sarok módszerrel (l. például HADLEY [2]) — keresünk egy-egy $m + (n - h) - 1$, ill. $(n-h) + p-1$ elemű bázist. A bázishoz vesszük még az s_l $(l=1, 2, \ldots, h+1)$ változókat. A megmaradó

$$(m + 2n + p - 1) - (m + n - h - 1 + n - h + p - 1 + h + 1) = h$$

számú bázisváltozót, melyek nulla szinten lesznek a bázisban, úgy választjuk, hogy a bázisváltozók együttható vektorai összességükben lineárisan függetlenek legyenek.

Természetesen most is kezdhetjük a két részprobléma külön-külön történő megoldásával, és csak az optimumok elérése után folytatva együtt, azonban minél szélsőségesebb az eloszlás, annál kevésbé valószínű, hogy az együttes optimumnak akár csak a közelébe is jutottunk.

Az eljárást a 8. pontban egy számpéldán is bemutatjuk.

6. A potenciál módszer

A hosszadalmas hurok keresések helyett — mint a közönséges szállítási problémánál — könnyen kidolgozható egy egyszerűbb mechanikus eljárás z_{ij} kiszámítására.

Ismeretes a szimplex módszer általános tárgyalásából, hogy $c_{ij} - z_{ij} = 0$ minden bázisváltozóra vonatkozóan fennáll. Rendeljünk hozzá a többfokozatú szállítási probléma minden sorához ill. oszlopához egy u_i, ill. v_j potenciált, mégpedig úgy, hogy minden elemre a megfelelő sor és oszlop potenciálok összege szolgáltatja a z_{ij} mennyiséget, azaz

$$z_{ij} = u_i + v_j \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m, \ldots, m + n \\ j = 1, 2, \ldots, n, \ldots, n + p \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Később belátjuk, hogy ez lehetséges. Ilyen választás mellett a bázisváltozókra $c_{ij} - z_{ij} = 0$ miatt

$$c_{ij} = u_i + v_j \qquad (i, j) \in B_0 \tag{6.2}$$

ahol a B_0 a bázishoz tartozó indexpárokat jelenti és

$$\begin{aligned} c_{ij} &= d_{i-m, j-n}\,, \quad \text{ha} \quad i > m\,; \quad j > n \\ c_{ij} &= 0 \qquad\quad\;\;, \quad \text{ha} \quad i = m + l\,;\ j = l \qquad (l = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{6.3}$$

A (6.2) egyenletrendszer segítségével, mivel c_{ij} költségek ismertek, a z_{ij} mennyiségek kiszámíthatók. Minthogy az egyenletek száma egyenlő a bázisváltozók számával, $(m + 2n + p - 1)$-gyel, az ismeretlenek száma pedig ennél eggyel nagyobb, egy potenciált (az u_i és v_j ismeretlenek bármelyikét) tetszőlegesen megválaszthatunk. Minthogy a bázisváltozók között nincsen hurok, a tetszőlegesen megválasztott potenciál segítségével a (6.2) egyenletrendszerből minden potenciál egyértelműen meghatározható. Ezek segítségével a (6.1) egyenlőségek alapján a z_{ij}, valamint a $c_{ij} - z_{ij}$ indikátorok is meghatározhatók. Természetesen a modell szerkezete miatt (lásd pl. 1. táblázat) csak az

$$(6.4)\qquad \begin{array}{ll} i \leqq m & j \leqq n \\ i = m + l & j = l \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \\ i > m & j > n \end{array}$$

eseteknek megfelelő $c_{ij} - z_{ij}$ mennyiségeket kell kiszámítani, mert csak ezek jelentenek tényleges változókat. Emiatt a táblázatot összevonhatjuk, lásd 8. pont.

Azt kell még belátnunk, hogy a (6.1) összefüggés a bázison kívüli változókra is igaz. (A bázisváltozók esetében azért nem kell erről meggyőződni, mert úgy határoztuk meg z_{ij} mennyiségeket, hogy (6.1) teljesüljön.)

Ezt az állítást könnyen beláthatjuk, ha figyelembe vesszük a z_{ij} (4.7), ill. (4.8) előállítását. Ezek most a (6.3) egyszerűsítés miatt minden esetben így írhatók:

$$(6.5)\qquad z_{ij} = c_{ik} - c_{lk} + c_{lm} - + \ldots - c_{pr} + c_{pj},$$

ahol az összes szereplő $c_{\alpha\beta}$ költségek bázisváltozókhoz tartoznak, tehát igaz rájuk az, hogy

$$(6.6)\qquad c_{\alpha\beta} = u_\alpha + v_\beta \,.$$

Felhasználva (6.6) előállítást, (6.5) így írható:

$$z_{ij} = (u_i + v_k) - (u_l + v_k) + (u_l + v_m) - + \ldots - (u_p + v_r) + (u_p + v_j) \,.$$

A zárójelek felbontása és az összevonások elvégzése után a kívánt

$$z_{ij} = u_i + v_j$$

összefüggést kapjuk a (6.4) esetekben, hiszen csak ekkor létezik a felhasznált (6.5) előállítás. Azonban ez az összes változót jelenti a probléma szerkezete miatt. Tehát a bázison kívüli változókra is igazoltuk a (6.1) összefüggést, amivel a módszer teljes.

7. Degeneráció

Degenerációnak nevezzük azt az esetet, amikor a bázisban szereplő változók között zérus is van. Másképpen fogalmazva, amikor az A mátrix rangjánál, jelen esetben $m + 2n + p - 1$-nél kevesebb pozitív változó van.

Például a korábban felírt példában a 6. táblázat degenerációt mutat. Ha például az x_{21} változót akarjuk bevonni, amelyhez a 4. költségtáblázat alapján a

$$c_{21} - z_{21} = 3 - 2 + 1 - 5 = -3$$

negatív érték tartozik, akkor azonnal látszik, hogy a

$$\mathbf{p}_{21} - \mathbf{p}_{24} + \mathbf{p}_{14} - \mathbf{p}_{11} = \mathbf{0}$$

előállítás miatt csak

$$\min (x_{24}, x_{11}) = \min (1, 0) = 0$$

szinten vonhatjuk be, azaz a célfüggvény értéke változatlan.

Eddig a ciklus, azaz a javítást nem hozó lépések ciklikus ismétlődésének elkerülését az biztosította, hogy a célfüggvény értéke minden lépésben csökkent. Degeneráció esetében nem ez a helyzet.

Bár a gyakorlati esetekben még nem fordult elő ciklus a szállítási problémák megoldása során, azonban nem biztos, hogy ez nem következhet be.

A degeneráció csak akkor következhet be, ha az a_i és a $k_l - s_l$ mennyiségek már egy részhalmazának összege is megegyezik.*

Tudjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{l=1}^{n} (k_l - s_l) . \tag{7.1}$$

Azonban előfordulhat, hogy létezik egy oly indexhalmaz pár, hogy

$$\begin{aligned} I &\subset \{1, 2, \ldots, m\} \\ L_1 &\subset \{1, 2, \ldots, n\} \end{aligned} \tag{7.2}$$

mégis

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{l \in L_1} (k_l - s_l) . \tag{7.3}$$

Hasonlóan előfordulhat, hogy

$$\sum_{l \in L_2} (k_l - s_l) = \sum_{j \in J} b_j , \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} L_2 &\subset \{1, 2, \ldots, n\} \\ J &\subset \{1, 2, \ldots, p\} . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Ezt elkerülendő, ha degeneráció lép fel, illetőleg ha degenerációs ciklussal találkozunk, akkor bevezetjük az

$$a_1 + p\varepsilon , \; a_2 + p\varepsilon , \; \ldots , \; a_m + p\varepsilon \tag{7.5a}$$

$$k_1, \; k_2, \ldots, \; k_n + mp\varepsilon \tag{7.5b}$$

$$b_1 + m\varepsilon , \; b_2 + m\varepsilon , \; \ldots , \; b_p + m\varepsilon \tag{7.5c}$$

új szállítandó mennyiségeket ill. korlátokat.

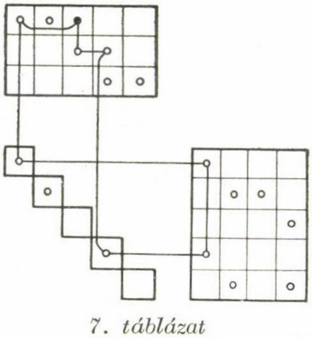
Található olyan kis ε_0, hogy $\varepsilon < \varepsilon_0$ esetén a (7.5) rendszerrel már nem következhet be (7.3) vagy (7.4). Ugyanis az a_i, $k_l - s_l$, b_j számokból csak véges sok részhalmaz választható ki, az ε pedig végtelen sok értéket vehet fel.

* A degeneráció ugyanis azt jelenti, hogy van zérus értékű is a bázisváltozók között. Ha ezt az elemet elhagyjuk, a bázis legalább két részre bomlik, úgy, hogy a különböző csoportokból nem választható úgy ki egy-egy bázisváltozó, hogy azok egy sorban vagy egy oszlopban legyenek. Ellenkező esetben ugyanis a zérus értékű bázisváltozó elhagyása előtt a bázisban hurok lett volna, ami lehetetlen a bázisváltozók együtthatóinak lineáris függetlensége miatt.

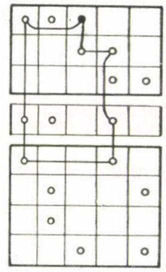
Feltéve tehát, hogy $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ tetszőlegesen kicsiny pozitív szám, az új rendszerben degeneráció nem léphet fel, tehát ciklus sem. Az ε értékét nem is szükséges konkrétan megadni. A konkrét számításokra vonatkozóan lásd pl. HADLEY [2] 299—304. oldal.

8. Egy numerikus példa

A továbbiakban az eljárás megvilágítása céljából kiszámítunk egy számpéldát. Legyen $m = 3, n = 5$ és $p = 4$. Jobb helykihasználás és áttekinthetőség kedvéért az eddig tárgyalt típusú 7. táblázat helyett a 8. táblázat formájában fogunk számolni, ami abban különbözik, hogy az előző táblázat második mátrixának transzponáltját vettük, és hozzáillesztettük — az s_h pótváltozók számára fenntartott egy sor kihagyásával — az előző mátrixhoz. Egy hurok, mint azt a táblázatokban feltüntettük, abban különbözik a korábbitól, hogy az első mátrixot továbbra is csak függőlegesen hagyhatjuk el, azonban a második mátrixba is csak függőlegesen léphetünk be a megfelelő pótváltozó közbeiktatásával.



7. táblázat



8. táblázat

A kidolgozandó feladat költségmátrixa legyen a következő (9. táblázat.)

a_i					
5	5	2	3	7	4
7	7	8	2	9	5
4	6	3	8	5	4
	6	8	5	3	6	k_l

0	0	0	0	0

					b_j
7	8	5	9	4	7
9	9	3	6	7	2
2	4	7	5	6	3
3	2	5	8	6	4

9. táblázat

Az első mátrix bal oldalán az a_i kínálatokat, a második mátrix jobb oldalán a b_j kereslteket és végül a két mátrix között a közbülső állomások korlátait tüntettük fel. Természetesen az s_i pótváltozókhoz tartozó költségek zérusok, ezt tüntettük fel a két mátrix közötti második sorban. Mivel a változók sorösszegei változatlanok (a melléírt a_i vagy b_j számmal egyenlők) szabad a 9. táblázat minden sorából tetszőleges számot levonni, ez az egyes megengedett programokhoz rendelt célfüggvény értékek sorrendjét nem változtatja meg, a jobb (olcsóbb) program a levonások utáni mátrixszal számolva is jobb lesz. Jelöljük ugyanis x_{ij}-vel az i-edik sor j-edik ismeretlenét ($i = 1, 2, \ldots, m + p + 1$; $j = 1, 2, \ldots, n$) és c_{ij}-vel a megfelelő költséget. Használjuk továbbá az $a_{m+j+1} = b_j$ ($j = 1, 2, \ldots, p$) jelölést, és $\{x'_{ij}\}$, valamint $\{x''_{ij}\}$ jelentse a feladat két tetszőleges megengedett megoldását, amelyekre

$$z' = \sum_i \sum_j c_{ij} x'_{ij} < \sum_i \sum_j c_{ij} x''_{ij} = z'' . \tag{8.1}$$

Vonjuk le most a c_{ij} költségmátrix i-edik sorának minden eleméből egy M_i számot ($i = 1, 2, \ldots, m + p + 1$), amely természetesen negatív is lehet. Ekkor azt kell belátnunk, hogy az $\{x'_{ij}\}$ és $\{x''_{ij}\}$ programokra az új költségekkel a (8.1) összefüggésben szereplő irányú egyenlőtlenség áll fenn. Ezt az alábbi átalakítással mutatjuk ki, felhasználva, hogy $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ minden megengedett megoldásra:

$$\sum_i \sum_j (c_{ij} - M_i)\, x'_{ij} = z' - \sum_i M_i (\sum_j x'_{ij}) = z' - \sum_i M_i a_i \tag{8.2}$$

$$\sum_i \sum_j (c_{ij} - M_i)\, x''_{ij} = z'' - \sum_i M_i (\sum_j x''_{ij}) = z'' - \sum_i M_i a_i . \tag{8.3}$$

Tehát minden programhoz tartozó célfüggvényérték ugyanazzal a konstanssal változott, amivel állításunkat beláttuk. Megjegyzendő, hogy ugyanezt az oszlopokkal nem tehetjük, mivel az oszlop összeg nem állandó. Vonjuk le tehát a 9. táblázat minden sorából az ott szereplő legkisebb elemet:

5	3	0	1	5	2	
4	5	6	0	7	3	
7	3	0	5	2	1	
	6	8	5	3	6	
	0	0	0	0	0	
	3	4	1	5	0	7
	6	6	0	3	4	2
	0	2	5	3	4	3
	1	0	3	6	4	4

10. táblázat

5	5					
4	1	3				
7		5	2			
	6	8	2	0	0	$k_j - s_j$
	0	0	3	3	6	s_j
	6	1				7
		2				2
		3				3
		2	2			4

11. táblázat

5				
1	3			
	5	2	0	
		3	3	6
6	1			0
	2			
	3			
	2	2		

$z = 94$

12. táblázat

Az 5. pontban leírtak szerint keresünk egy induló bázist (11. táblázat), figyelembe véve, hogy az itt használt jelölésekkel

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = k_j - s_j = \sum_{i=m+2}^{m+p+1} x_{ij} \qquad (s_j = x_{m+1,j}). \tag{8.4}$$

Ezt kiegészítjük két további, zérus szinten bevont változóval, hogy bázist kapjunk (12. táblázat). Az x_{34} és x_{55} bevonása azért célszerű, mert így bázist kapunk és kis költségű változókat vontunk be ($c_{14} = 2$ és $c_{55} = 0$). A 12. táblázat pedig mutatja, hogy az így kiválasztott változók között nincs hurok, tehát valóban bázist kaptunk.

Most külön-külön megoldjuk a 12. táblázat két, szaggatott vonallal leválasztott szállítási problémáját a 4. pontban leírt hurok módszerrel:

I.

3	0	1
5	6	0
3	0	5

c_{ij}

5	•	
1	3	
	5	2

2	3	
4		•
	5	2

4	1	·
2	·	2
·	7	·

II.

3	4	1
6	6	0
0	2	5
1	0	3

c_{ij}

6	1	
	2	•
	3	
	2	2

6	1	•
		2
	3	
	4	0

6	1	0
		2
•	3	
	4	

3	4	0
·	·	2
3	·	·
·	4	·

12. *táblázat*

Most megoldjuk az együttes optimalizálási feladatot az így kapott részoptimumok mint induló bázis segítségével. Az első lépésben hurok módszerrel bevonjuk az s_1 pótváltozót, majd potenciál módszerrel (l. 6. pont) folytatjuk a megoldást.

III.

3	0	1	5	2
5	6	0	7	3
3	0	5	2	1
0	0	0	0	0
3	4	1	5	0
6	6	0	3	4
0	2	5	3	4
1	0	3	6	4

c_{ij}

III./1

4	1			
2		2		
	7		0	
•		3	3	6
3	4	0		0
		2		
3				
	4			

12. *táblázat*

A következőkben egy táblázatsor egy lépést jelent. Mindig felírjuk a jelenlegi bázisváltozókhoz tartozó c_{ij} költségeket, és az $u_i + v_j = z_{ij}$ összefüggések segítségével $u_1 = 0$-ból kiindulva megkapjuk a potenciálokat, majd a $c_{ij} - z_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ összefüggés segítségével kiszámítjuk a $c_{ij} - z_{ij}$ indikátorokat. Ha ezek között van negatív, akkor a megfelelő változót bevonjuk a bázisba. Ezt a számítást természetesen a pótváltozókra is elvégezzük. A fenti hurok segítségével bevont változóval kapjuk a következő megengedett bázismegoldást. (A megoldások alatt mindig feltüntetjük a célfüggvény hozzátartozó értékét). Az eljárást az optimumig folytatjuk. (Minden $c_{ij} - z_{ij} \geqq 0$.)

III./2

4	1			
		4		
	7		0	
2		1	3	6
1	4	2		0
		2		
3				
	4			

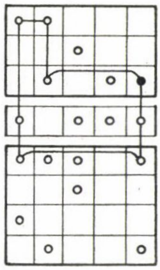
$z = 33$

$u_1=$	0	−3	2	−1	3
3	3	0			
−2			0		
3		0		2	
	0		0	0	0
3	3	4	1		0
2			0		
0	0				
−1		0			
v_j/u_i $(i>5)$	0	1	−2	1	−3

u_i $(i \leq 5)$

0	0	−4	3	−4
7	11	0	10	2
0	0	0	0	−5
0	2	0	0	0
0	0	0	1	0
4	3	0	0	5
0	1	7	2	7
2	0	6	6	8

$c_{ij} = z_{ij}$



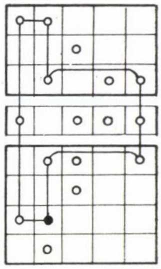
III./3

3	2			
		4		
	6		0	1
3		1	3	5
	4	2		1
		2		
3				
	4			

$z = 28$

3	3	0			
3			0		
3		0		2	1
	0				
−2		4	1		0
−3			0		
0	0				
−6		0			
	0	6	3	−1	2

0	0	1	1	1
2	6	0	3	2
0	0	5	0	0
0	0	0	0	0
5	0	0	8	0
9	3	0	7	5
0	−4	2	4	2
7	0	6	13	8



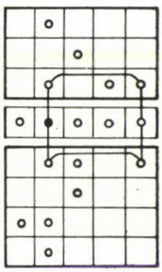
III./4

	5			
		4		
	3		0	4
6		1	3	2
	1	2		4
		2		
0	3			
	4			

$z = 16$

	0	1	1	3	2
−1		0			
−1			0		
−1		0		2	1
	0		0	0	0
2		4	1		0
1			0		
0	0	2			
−2		0			
	0	2	−1	−3	−2

4	0	1	3	1
6	6	0	5	2
4	0	5	0	0
0	−3	0	0	0
1	0	0	4	0
5	9	0	5	5
0	0	6	6	6
3	0	6	11	10



III./5

	5			
		4		
	2		0	5
6	1	1	3	1
		2		5
		2		
0	3			
	4			

$z = 13$

	0	−2	−2	0	−1
2		0			
2			0		
2		0		2	1
	0	0	0	0	0
−1			1		0
−2			0		
0	0	2			
−2		0			
	0	2	2	0	1

1	0	1	3	1
3	6	0	5	2
1	0	5	0	0
0	0	0	0	0
4	3	0	6	0
8	6	0	5	5
0	0	3	3	3
3	0	3	8	5

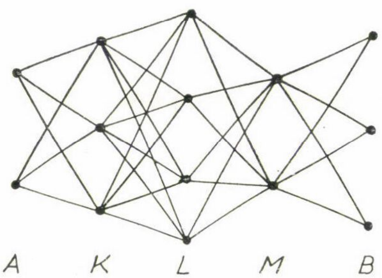
Minden $c_{ij} - z_{ij} \geq 0$

Optimum!

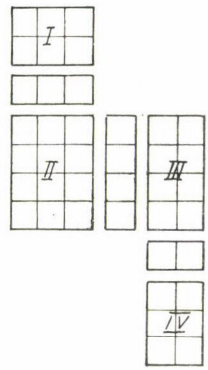
12. táblázat

9. Megjegyzések

Ez a megoldási módszer értelemszerűen kettőnél több fokozatú szállítási probléma esetén is alkalmazható. Például a 3. ábrán látható feladathoz tartozó mátrix elrendezést a 4. ábra mutatja, ilyen elrendezésben kell megadni a szállítási költséget is, és a változók aktuális értékeit. Az első csoportból (A) a másodikba (K) szállítandó mennyiségeket kifejező változók az I mátrixba kerültek. A második csoportból (K) a harmadikba (L) szállítandó mennyiségeket a II. mátrixba írjuk stb.



3. ábra



4. ábra

Minden egyes közbülső csoportba (K, L, M) tartozó állomáshelynek adott kapacitása van. Az egyes mátrixok közé kerülnek azok a pótváltozók, amelyek azt mutatják, hogy az egyes helyeken mennyivel kevesebbet szállítunk keresztül, mint az ottani kapacitás.

A dolgozatban leírt algoritmus változtatás nélkül alkalmazható. Most az egyes hurkok természetesen több mátrixra is kiterjedhetnek, azonban minden mátrixból csak a vele szomszédosba mehetünk át és csak egy közöttük levő pótváltozón keresztül.

A vizsgált feladat felmerülhet egészen más jellegű problémáknál is. Például, ha egy üzem termelését akarjuk megszervezni, amelyben bizonyos munkafolyamatok elvégzésére több gép is alkalmas, azonban a megmunkálás ideje vagy költsége nem azonos. Ekkor az egyes szállítási fokozatokat az azonos munkát végző gépek jelentik, amelyeket megmunkálási sorrendben vázolunk a 3. ábrához hasonlóan. A szállítási költségekhez (amely esetleg elenyészően kicsi lehet a többi költséghez képest) hozzászámítjuk a megfelelő termelési költséget is. Ekkor a feladat megoldásaként megkapjuk, hogy melyik gépen milyen mennyiségű anyagot munkáljunk meg, hogy az egyes gépkapacitásokat ne haladja meg, és a teljes termelési költség minimális legyen. (Költség helyett az időt is számolhatjuk.)

Természetesen előfordulhat, hogy egy későbbi fázisban a gyártmány (termék) ugyanoda kerül, ahol már egyszer volt, azaz a 3. ábrán látható különböző pontok azonos várost, gyárat vagy gépet reprezentálnak. Ez a megoldás szempontjából semmi problémát nem okoz. Például, ha egy gabonatároló helyen őrlésre is lehetőség van, akkor a megfelelő szállítási költség zérus.

(Beérkezett: 1964. december 5.)

IRODALOM

[1] DANTZIG, G. B.: *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1963.
[2] HADLEY, G.: *Linear Programming.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts. 1962.
[3] SZWARC, W.: *The Applications of the Transportation Scheme.* Carnegie Institute of Technologie. Research Papers 1963.
[4] KREKÓ B.: *Lineáris programozás.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1962.
[5] SCHELL, E. D.: „Distribution of a Product of Several Properties" Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming. (Directorate of Management Analysis and National Bureau of Standards, Washington, D. C.) 1955. 615—642.

ЗАДАЧА МНОГОСТУПЕНЧАТОГО (ТРАНЗИТНОГО) ТРАНСПОРТА

Л. Б. КОВАЧ

Резюме

В статье рассматривается задача транспорта такого в котором имеются не только исходные и конечные станции, а также промежуточные места через которых совершается транспорт. Точнее, имеются исходные станции $A_1, \ldots, A_m$, промежуточные пункты: $K_1, \ldots, K_n; L_1, \ldots, L_r; \ldots$ и места назначения: $B_1, B_2, \ldots, B_p$. Условия задачи следующие:

(а) Исходная станция A_i предлагает количество $a_i (i = 1, \ldots, m)$; спросом места назначения B_j является $b_j (j = 1, \ldots, n)$ а емкостю промежуточных пунктов являются $k_s (s = 1, \ldots, n)$, $l_t (t = 1, \ldots, r)$ ит. д.

(б) Перевозку какого-нибудь места можно производить только до какого-нибудь места последующей группы. Специфические расходы для допустимых перевозок заданы. Задачей является сделать минимальными полные расходы для перевозок. Эту проблему можно было разрешить, если представить ее в виде мультииндексной задачи (см. например [5]) или, если исключить как перевозки с бесконечными транспортными расходами все недопустимые перевозки как например в статье [3]. Для обоих методов получается сравнительно очень большое число переменных. Например, если имеются m исходные станции, p места назначения и в отдельных группах $n_1, n_2, \ldots, n_q$ промежуточные станции, тогда при применении первого метода в выкладках участвуют $mn_1 \ldots pn_q$ переменные, а при втором методе число переменных равно $(m + n_1 + \ldots + n_q)(n_1 + \ldots + n_q + p)$. В настоящей статье представляется алгоритм, основивающиеся на классической транспортной задаче, такой что в нем число переменных равно $mn_1 + n_1 + n_1n_2 + + n_2 + \ldots + pn_q$.

Проблема переходит из задачи из практики: Требуется перевозить зерно в мельницы из амбаров, а муку из мельниц к мест назначения так, чтобы суммарная затрата средств для этой цепи была минимальной. (Количество муки измеряется в единицах зерна). Применение результатов к этой задаче, а также к другим задачам рассматриваются в статье подробно.

За исключением п. 9 в статье рассматривается случай трех групп — места исходные, места назначения и одна группа промежуточных станций, однако алгоритм применим без всяких изменений также и в случае неличия многих групп промежуточных станций.

TRANSIT TRANSPORTATION PROBLEM

by

L. B. KOVÁCS

Summary

This paper deals with a transportation problem which has not only origins and destinations but some other places in which the transportation passes through. More exactly there are origins $A_1, \ldots, A_m$, one or more group of other places $K_1, \ldots, K_n; L_1, \ldots, L_r; \ldots$ and destionations $B_1, \ldots, B_p$. The conditions of the problem are the following:

(a) The supply of the origin A_i is a_i $(i = 1, \ldots, m)$, the demand of the destination B_j is $b_j\,(j = 1, \ldots, n)$; the capacities of the other places k_s $(s = 1, \ldots, n)$, $l_t(t = 1, \ldots, r)$ etc.

(b) It is allowed to transport from any place only to the next group of places. The unit costs of the permitted shipments are given.

The problem is to minimize the total transportation cost. It is possible to solve this problem as a multi-index problem. (see for example [5]) or by excluding the non-permitted transportations with ∞ costs as in [3]. In both these methods the number of variables are relatively very large. For example if there are m origins p destinations and $n_1, n_2, \ldots, n_q$ places in the other groups then the first method needs for $mn_1 \ldots n_q p$ variables and the second one needs for $(m + n_1 + \ldots + n_q)\,(n_1 + \ldots + n_q + p)$ variables. The present paper guarantees an algorithm — based on the classical transportation problem — having $mn_1 + n_1 + n_1 n_2 + n_2 + \ldots + n_q p$ variables.

The problem appeared as a practical task of minimal total cost transportation of corn from granaries to mills and flour from mills to the destinations. (The flour is measured in corn measure.)

The above application and other ones are written in the paper in details.

Except the point 9 the paper deals with the case having three groups at places — origins, destinations and one group of intermediate places — but the algorithm is suitable without any changes for the case having more groups of places.

AZ ANALÓG SZÁMOLÓGÉPEK PROGRAMOZÁSÁRÓL

TÓTH KÁROLY

Bevezetés

A tudományos kutatással, műszaki tervezéssel foglalkozók számára az elektronikus számológépek használata egyre elkerülhetetlenebb lesz. Mint ismeretes, a számológépek két alapcsoportba sorolhatók, a digitális és analóg számológépek csoportjába. Amíg azonban a digitális gépek és felhasználási területük szélesebb körben ismert, addig az analóg gépek csak egyes szakterületek számára ismertek. Ennek oka részben abban rejlik, hogy az analóg gépek kevésbé univerzálisak, mint a digitálisok. Az analóg számológép ugyanis főleg közönséges differenciálegyenletek különböző kezdeti- és peremfeltételek melletti megoldására, valamint szabályozástechnikai rendszerek vizsgálatára alkalmas, ami természetesen nem zárja ki annak lehetőségét, hogy más matematikai feladatok megoldására is alkalmazzuk. Lényegében minden olyan feladat, amely közönséges differenciálegyenletekre visszavezethető, megoldható az analóg gépen. A differenciálegyenletek lehetnek lineárisak, vagy nemlineárisak. Különösen az utóbbiak megoldására előnyös az analóg számológép alkalmazása, mivel ezeket ritkán tudjuk zárt alakban integrálni.

Az analóg gépek alkalmazási területének bővítése, a pontosság növelése az utóbbi években nagy lendületet vett. A világszerte épülő analóg számológépek között egyre több hibrid (digitális—analóg kombináció) és iteratív működésű gép található. Az ilyen irányú fejlesztés oka az, hogy az analóg számológép gyors és szemléletes módon oldja meg a közönséges differenciálegyenleteket, a pontossága azonban viszonylag kicsi. A hibrid berendezéssel az analóg elemekkel végzett integrálás pontosságát növelik, ugyanakkor a digitális programozást egyszerűsítik, az iteratív működésű gépek pedig az analóg gép alkalmazási területét bővítik ki digitális elemek (vezérlésben) felhasználásával. Ez a világszerte tapasztalt nagymérvű fejlesztés azonban nem jelenti azt, hogy kisebb analóg gépeket többé nem gyártanak. A kis és közepes méretű gépek a jövőben is egyre fokozottabb elterjedésre számíthatnak olcsóságuk és gyorsaságuk miatt. Szükségesnek látszik tehát az analóg gépek működését és alkalmazását minél szélesebb körökben ismertetni.

Az alábbiakban összefoglaljuk az analóg gép legfontosabb műveleti elemeinek fizikai alapelveit, valamint a gép programozásához szükséges alapvető ismereteket.

A programozás megértéséhez a műveleti elemek fizikai felépítésének ismerete nem feltétlenül szükséges. Tárgyalásunkat ezért két részre bontottuk. Az I. rész a fizikai alapelvekkel foglalkozik, míg a tulajdonképpeni programozást a II. részben ismertetjük. Az I. rész végén foglaltuk össze a műveleti elemek szimbolikus jelöléseit és az általuk elvégezhető műveleteket. Ennek áttekintése a programozás megértéséhez nem nélkülözhető.

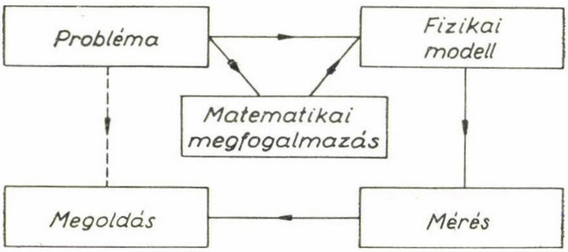
I.

Az elektronikus analóg számológép műveleti elemei

Ha a megoldandó feladathoz található olyan fizikai folyamat, amelyre formálisan ugyanazok a törvényszerűségek érvényesek, mint a megoldandó feladatra, akkor a megoldást az analóg modellen is kereshetjük. Ilyenkor a megoldást úgy kapjuk, hogy a feladat változóit a megfelelő fizikai változókra transzformáljuk, és a keresett értékeket a modellen a fizikai változók mérésével határozzuk meg. Az ilyen fizikai modell a lehetőségekhez képest sokoldalú kell legyen, hogy minél több problémakört lehessen vele megoldani.

A matematikai változók az analóg gépben fizikai mennyiségekkel vannak ábrázolva. Mechanikus analóg számológépeknél elmozdulás, forgásszög stb. elektronikus gépeknél feszültség, vagy áram a változó, továbbá az idő — mint fizikai mennyiség — reprezentálja a független változót.

Az analóg rendszerű számológépek alapelvét vázlatosan az 1. ábrán láthatjuk.



1. ábra

Mint az ábrából kitűnik, a probléma matematikai megfogalmazása gyakran nem szükséges, mert a feladat közvetlenül is modellezhető. Az ilyen típusú feladat analóg géppel történő megoldását szimulációnak nevezzük. Tekintve, hogy az ilyen feladatok a szabályozástechnikában fordulnak elő, és magyar nyelvű irodalom is rendelkezésre áll ([1]), tárgyalásunkban csak olyan elektronikus analóg számológépekről lesz szó, amelyek matematikai megfogalmazást tesznek szükségessé.

Az univerzális alkalmazhatóság céljából az elektronikus analóg számológépet *műveleti (operációs) elemekből* építik fel. Az adott matematikai feladatnak megfelelően ezekből az elemekből egy analóg rendszert kapcsolhatunk össze. A legáltalánosabb analóg műveleti elemek fizikai alapelvét csak röviden ismertetjük.

Integráló elem

Ismeretes, hogy egy C kapacitás sarkain levő U feszültség és a rajta levő Q töltés között a

$$Q = CU$$

összefüggés áll fenn. Tehát a kondenzátor töltésének időbeli változását — ha a C-t időtől függetlennek tekinthetjük — az

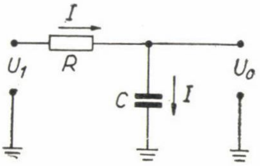
$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

differenciálegyenlet írja le. Az egyenletet idő szerint integrálva láthatjuk, hogy

$$U = \frac{1}{C}\int\limits_0^t I\,dt\,,$$

tehát a kondenzátoron levő feszültség a töltőáram idő szerinti integráljával arányos.

Mivel a bemeneti jel nem állítható elő könnyen szabályozható áram formájában, a C kondenzátort egy R ellenálláson keresztül töltjük fel egy könnyebben előállítható U_1 feszültségforrásból. A megfelelő kapcsolást a 2. ábra mutatja.



2. *ábra*

Az R ellenálláson átfolyó I áram szigorúan véve nem arányos az U_1 feszültséggel, ugyanis a kondenzátor kapcsain levő U_0 feszültség az arányosságot zavarja. Az I áram tehát Ohm törvényét alkalmazva felírható

$$I = \frac{U_1 - U_0}{R}$$

alakban. Másrészt a már fentebb mondottak értelmében

$$I = C\frac{dU_0}{dt}.$$

E két összefüggésből tehát az

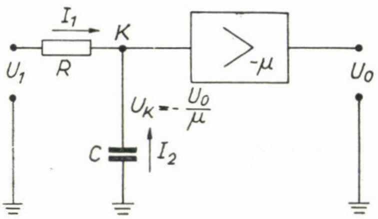
$$\frac{U_1 - U_0}{R} = C\frac{dU_0}{dt}$$

differenciálegyenletre jutunk, amely idő szerint integrálva és U_0-ra kifejezve az

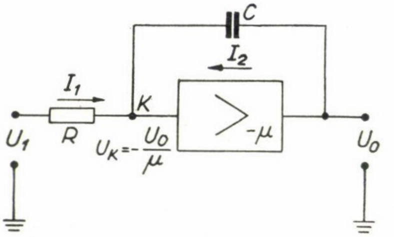
$$U_0 = -\frac{1}{RC}\int\limits_0^t U_1 dt + \frac{1}{RC}\int\limits_0^t U_0 dt$$

megoldást adja. Eszerint U_0 az U_1 bemenő feszültség integráljával arányos, de hibafeszültség is fellép, amelynek értékét a jobb oldal második tagja adja. Utóbbi értéke csak igen rövid időintervallumra és nagy időállandóra (RC)

lenne elhanyagolható. Az U_0 feszültségnek a bemenetre (a K csomópontra) gyakorolt hatását csökkenthetjük, ha a csomópont után egy egyenfeszültségű erősítőt kapcsolunk, amelynek erősítési tényezője $\mu \gg 1$. Igy elérhetjük, hogy a C kondenzátor sarkain fellépő U_k feszültség (lásd 3. ábrát) az erősítő kimenetén mérhető U_0 feszültségnek csak μ-edrésze lesz.



3. ábra



4. ábra

U_0 pillanatnyi értéke tehát kevésbé befolyásolja az I áram és az U_1 feszültség közötti arányosságot. Az egyenfeszültségű erősítő stabilitási okokból páratlanszámú fázisfordító fokozatból áll, így $\mu < 0$. Megjegyezzük még, hogy az erősítő bemenete úgy van kialakítva, hogy az erősítőn keresztül áram nem folyik. Eszerint az I áram megegyezik a C kapacitás töltőáramával, de ennek kapcsain most U_k feszültség van. Ohm törvényét és a kapacitás töltőáramának összefüggését alkalmazva az

$$\frac{U_1 - U_k}{R} = C\,\frac{dU_k}{dt}$$

differenciálegyenletet írhatjuk fel. Az $U_k = -\frac{U_0}{|\mu|}$ behelyettesítést elvégezve és idő szerint integrálva a differenciálegyenletet az U_0 értékére a következő összefüggést nyerjük:

$$U_0 = -\frac{|\mu|}{RC}\int_0^t U_1 dt - \frac{1}{RC}\int_0^t U_0\,dt\,.$$

Az összefüggés azt mondja ki, hogyha μ elég nagy, valamint az RC időállandó a μ nagyságrendjébe esik, a második tag gyakorlati szempontból elhanyagolható, így a 3. ábra szerinti kapcsolás a $\frac{\mu}{RC}$ arányossági tényezőtől és előjeltől eltekintve elegendő kis hibával szolgáltatja a bemenő feszültség integrálját. Látható azonban, hogy az arányossági tényezőben μ értéke is szerepel, tehát az erősítési tényező ingadozásai befolyásolják az eredményt. Ennek kiküszöbölésére alkalmazzák az ún. Miller-integrátort (4. ábra), amely az előbbi kapcsolással ekvivalens, azonban a visszacsatoló körben elhelyezett kapacitás értéke az előbbi kapcsolásban alkalmazottnak $1 - \mu$-ed része.

Az U_1 irányából a K csomópont irányába folyó áram Ohm törvénye értelmében:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_k}{R}.$$

Az U_0-tól a csomópont felé irányuló áram értéke pedig:

$$I_2 = C\frac{d(U_0 - U_k)}{dt}.$$

Ha a K csomópontra Kirchoff 1. törvényét felírjuk, az

$$I_1 + I_2 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelybe behelyettesítve az áramok értékét az

$$\frac{U_1 - U_k}{R} + C\frac{d(U_0 - U_k)}{dt} = 0$$

differenciálegyenletet nyerjük. Az $U_k = -\frac{U_0}{|\mu|}$ behelyettesítés útján nyert

$$\frac{U_1 + \frac{U_0}{|\mu|}}{R} + C\frac{d\left(U_0 + \frac{U_0}{|\mu|}\right)}{dt} = 0$$

differenciálegyenletre a $|\mu| \to \infty$ határátmenetet elvégezve és idő szerint integrálva az

$$U_0 = -\frac{1}{RC}\int_0^t U_1 dt$$

összefüggést kapjuk. RC-t az integrálás *időállandó*jának nevezzük. Meg kell jegyeznünk, hogy a C kapacitás frekvenciafüggő elem lévén fellép a kapcsolásban egy frekvenciától függő hiba is. Ezért az analóg számológépeken a jelfeszültségek frekvenciáját korlátozzák.

Összeadó elem

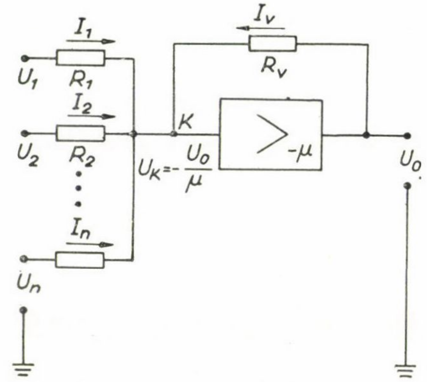
Helyettesítsünk a 4. ábra C visszacsatoló kondenzátorának helyébe R_v ellenállást, az erősítő bemenetét pedig alakítsuk ki úgy, hogy az $U_1, U_2, \ldots, U_n$ feszültségeket rendre $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokon keresztül kapcsoljuk a K csomópontra (5. ábra).

Kirchoff 1. törvényét és az Ohm törvényt a csomópontra alkalmazva nyerjük a következő összefüggést:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i - U_k}{R_i} + \frac{U_0 - U_k}{R_v} = 0\,.$$

Az $U_k = -\frac{U_0}{|\mu|}$ értékét behelyettesítve és U_0-ra kifejezve az

$$U_0 = \frac{-R_v \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{R_i}}{1 + \frac{1}{|\mu|}\left(1 + R_v \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}\right)} \tag{1}$$



5. *ábra*

egyenletet kapjuk, amelyből $|\mu| \to \infty$ esetén következik, hogy

$$U_0 = -R_v \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{R_i}.$$

Az $R_1, R_2, \ldots, R_n$, valamint R_v értékeit 1-nek választva egyszerű összeadó elemet kapunk, az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ megválasztásától függően pedig tetszőleges állandó szorzótényezőket is beállíthatunk. Az előjelfordító elem az összeadó elem speciális esete, amikor $R_v = R_1$ és $U_2 = U_3 = \ldots = U_n = 0$. Ez esetben az elem tehát az

$$U_0 = -U_1$$

összefüggést valósítja meg.

Az (1) összefüggésből látható, hogy véges μ esetén a bemenetek száma és a bemenő ellenállások értéke nem lehet tetszőleges. μ értékét olyan nagyra szokták választani, hogy az (1) nevezőjében szereplő hibatag a gyakorlatban előforduló esetekben elhanyagolható legyen.

Az előbbiekhez hasonlóan beláthatjuk, hogy ha egy integráló elem bemenetét az összeadó elemnél ismertetett módon alakítjuk ki, tehát $U_1, U_2, \ldots, U_n$ feszültségeket rendre $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ellenállásokon át kapcsoljuk a K csomópontra, az így kapott elem az

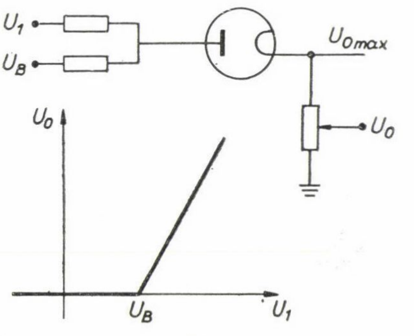
$$U_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i C} \int_0^t U_i dt$$

matematikai műveletet valósítja meg. $C = 1$ esetén különböző állandó szorzótényezőkkel szorzott feszültségjelek integráljainak összegét képezhetjük ilyen módon.

Függvénygenerátor

Az $x = f(t)$ vagy $y = F[x(t)]$ alakú függvények előállítására különböző elektronikus megoldású függvénygenerátorokat szokás alkalmazni. Ezek alapelveinek ismertetése meghaladja jelen cikk kereteit, így csak a leggyakrabban előforduló típus lényegét vázoljuk.

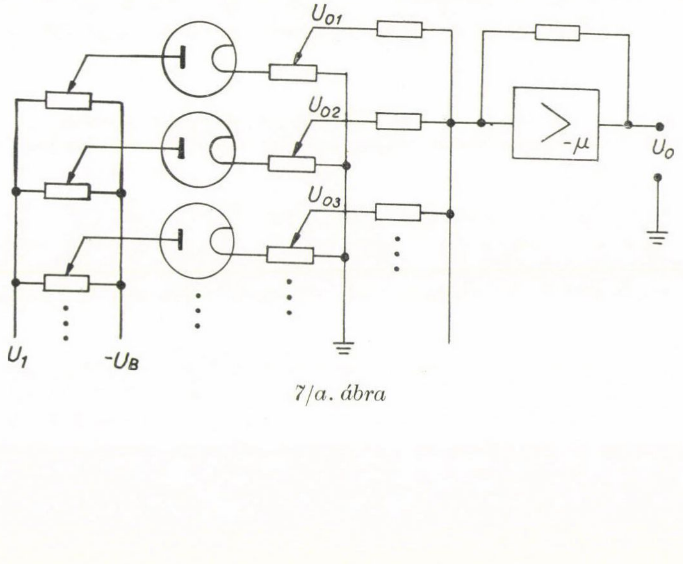
A *diódás függvénygenerátor* segítségével az $x = f(t)$ függvényt egyenes szakaszokkal approximáljuk, amely egyenes szakaszok előállítására diódákat alkalmazunk.



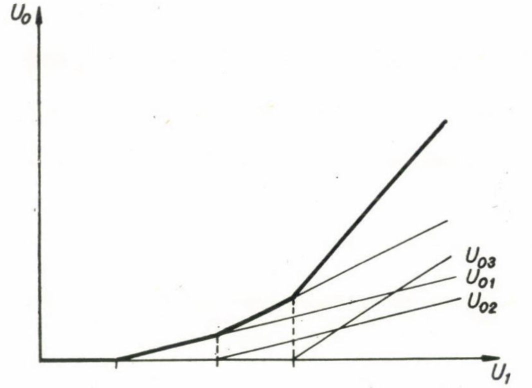
6. ábra

A 6. ábrán feltüntettünk egy egyszerű diódakapcsolást, valamint a hozzá tartozó feszültségkarakterisztikát. A karakterisztika meredekségét a $0 \leq U_0 \leq U_{0\,max}$ tartományban állíthatjuk be az alkalmazott potenciométer segítségével. Az U_1, U_B, ill. mindkettő előjelének megváltoztatásával vagy a dióda megfordításával valamennyi szükséges karakterisztikát előállíthatjuk. Megfelelő diódakörök párhuzamos kapcsolásával állítjuk elő a függvényt approximáló törtvonalat.

A 7. ábrán egy ilyen kapcsolást és a hozzá tartozó karakterisztikát mutatjuk be.



7/a. ábra



7/b. ábra

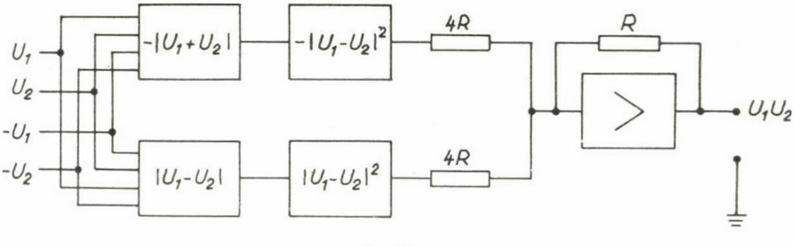
Szorzóegység

Két függő változó szorzására igen sokféle elektronikus kapcsolást lehet készíteni. Itt csak a kis és közepes gépeknél leginkább alkalmazott negyednégyzetes elven alapuló szorzóberendezés elvét vázoljuk. E szorzóegység két mennyiség szorzását az

$$U_1U_2 = \frac{1}{4}[(U_1 + U_2)^2 - (U_1 - U_2)^2]$$

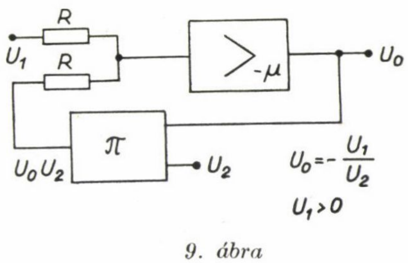
összefüggés alapján végzi el.

A szorzótényezők összeadása és kivonása, valamint az egyszerűbb kapcsolás érdekében alkalmazott abszolútérték képzése diódák segítségével történik, a négyzetreemelést pedig a függvénygenerátornál említett diódás approximációval előállított parabolaágakon képezzük. A kapott abszolútérték négyzeteket összegező erősítővel összegezzük. Egy ilyen szorzóegység blokksémáját a 8. ábrán láthatjuk.

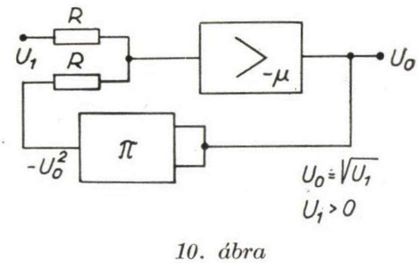


8. ábra

A szorzóegység felhasználásával végezhetjük el az *osztást* és a *gyökvonást* az ún. implicit függvénytechnika segítségével. Tekintsük pl. az alábbi kapcsolást (9. ábra):



9. ábra



10. ábra

Itt a π-vel jelölt blokk szorzóegységet jelent. Irjuk fel a K csomópontra a Kirchoff-törvényt, és alkalmazzuk az Ohm-törvényt:

$$\frac{U_1 - U_k}{R} + \frac{U_0U_2 - U_k}{R} = 0 .$$

Oldjuk meg az egyenletet U_k-ra,

$$U_k = -\frac{U_0}{|\mu|} = \frac{1}{2}(U_1 + U_0U_2) ,$$

ahonnan az $\frac{U_0}{|\mu|} \approx 0$ miatt következik, hogy

$$U_0 \approx -\frac{U_1}{U_2} .$$

Az implicit függvénytechnika alkalmazásánál állandóan ügyelnünk kell a stabilitási feltételekre. Igy a 9. ábra szerinti osztóberendezés csak $U_2 > 0$ esetén szolgáltat stabil megoldást (negatív visszacsatolás).

Igen egyszerűen származtathatjuk a 9. ábra szerinti kapcsolásból a négyzetgyökvonó elemet. Képezzük a 9. ábra szerinti kapcsolásban U_0U_2 helyett $-U_0^2$-et. Az osztóegységnél alkalmazott gondolatmenet szerint bizonyítható, hogy a kapcsolás (10. ábra) az

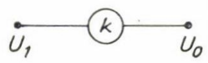
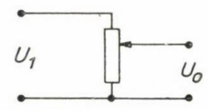
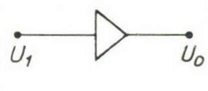
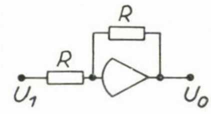
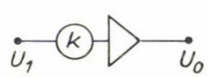
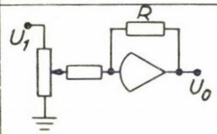
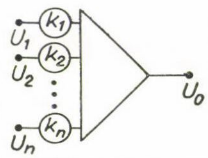
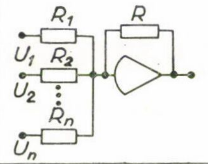
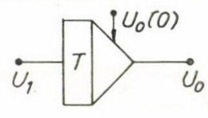
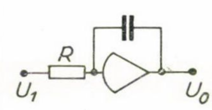
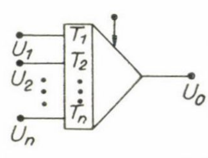
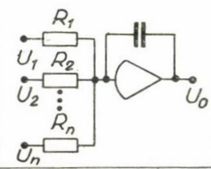
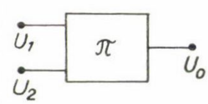
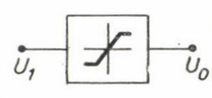
$$U_0 \approx \sqrt{U_1}$$

műveletet valósítja meg.

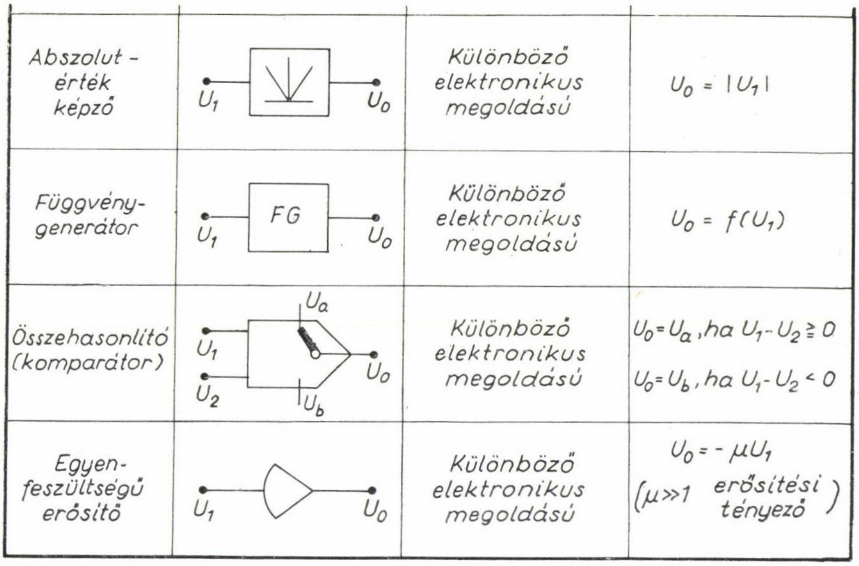
A kapcsolás csak $U_1 > 0$ esetén stabil. A legáltalánosabb analóg műveleti elemeket a 11. ábrán foglaltuk össze.

Az egyes műveleti elemeket az irodalomban szokásos szimbólumokkal jelöltük. A lineáris műveleti elemeknél az elektromos kapcsolást is feltüntettük. A nem-lineáris műveleti elemeknél, amelyek különböző elektronikus megoldásúak lehetnek, az elektromos kapcsolást mellőztük. A táblázat végül tartalmazza a műveleti elemnek megfelelő matematikai operációt.

Az egyes műveleti elemek pontossága a műszaki kivitelezéstől függ. A jóminőségű elektronikus műveleti elem hibája nem haladja meg az 1%-ot.

Műveleti elem megnevezése	Szimbólum	Elektromos kapcsolás	Matematikai művelet
Együttható potenció-méter			$U_0 = kU_1$ $0 \le k \le 1$
Előjelfordító			$U_0 = -U_1$
Állandó szorzótényező			$U_0 = -kU_1$
Összeadó			$U_0 = -\sum_{i=1}^{n} k_i U_i$ $k_i = \frac{R}{R_i}$
Integráló			$U_0 = -\frac{1}{T}\int_0^t U_1(\tau)d\tau + U_0(0)$ $(T = RC)$
Összeadó integráló			$U_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{T_i} \int U_i d\tau + U_0(0)$ $(T_i = R_i C)$
Szorzó		Különböző elektronikus megoldású ld. pl. 8. ábra	$U_0 = \frac{U_1 U_2}{E}$ (E = gépi egység)
Határoló		Különböző elektronikus megoldású	A nemlinearitás szimbolikusan jelölve (itt: határoló)

11. ábra



11. ábra

II.

1. Az elektronikus analóg számológép gépi változói

Mint a 11. ábrából láthatjuk, az analóg számológép független változója a *gépidő*, amit a továbbiakban τ-val jelölünk. A függő változók a gépben *egyenfeszültség* alakjában szerepelnek (U_i). Mind a független, mind a függő változók korlátosak, amely korlátok a gép műszaki felépítésétől függenek. Igy a gépidőre nézve általánosságban a

$$(2) \qquad 0 \leqq \tau \leqq \tau_{\max}$$

feltétel érvényes, a feszültség alakjában szereplő változókra pedig a

$$(3) \qquad -E \leqq U_i \leqq +E$$

korlátok érvényesek. E az ún. *gépi egység*, amely pl. csöves berendezéseknél többnyire 100 V. Ugyancsak korlátosak a 11. ábrán látható együtthatók értékei is. Igy a T_i *időállandók* és a k_i *konstans együtthatók* kielégítik az alábbi feltételeket:

$$(4) \qquad T_{\min} \leqq T_i \leqq T_{\max} \qquad (T_i > 0)\,,$$

$$(5) \qquad k_{\min} \leqq k_i \leqq k_{\max} \qquad (k_i > 0)\,.$$

Az itt szereplő $T_i = R_i C_i$ az integrátoron, ill. összegező integrátoron beállítható *időállandó*.

A (2) feltétel tehát azt jelenti, hogy a függő változók csak egy megadott értelmezési tartományban ábrázolhatók a gépen, így minden megoldandó matematikai feladatot erre a tartományra kell transzformálnunk. $\tau_{\max}$ értékétől függően két alaptípust különböztetünk meg az analóg gépek között. Ha $\tau_{max} < 1$, akkor ismétlő rendszerű a gép, azaz az értelmezési tartományban a megoldást gyors egymásutánban állandóan ismétli. Ez a géptípus igen alkalmas peremértékfeladatok vizsgálatára. E gépnél a $[0, \tau_{max}]$ tartományra kell transzformálnunk a független változót. Ha τ_{max} értéke nagy (pl. 100 sec nagyságrendű), az ismétlési frekvencia olyan kicsi, hogy az ismétlő üzemmód gyakorlati szempontból már érdektelen. Az ilyen gépeknél τ_{max} több szakaszban folytonosan állítható.

A függő változók értékkészlete a (3) feltétel szerint korlátozott. Ha ismerjük a megoldás lehetséges maximális értékét a szükséges transzformációt a programozással egyidejüleg elvégezhetjük. Ellenkező esetben a program végrehajtása során kell szükségképpen megváltoztatnunk a transzformációt.

A T_i időállandók kisebb berendezéseknél többnyire csak R_i taggal változtathatók, nagyobb berendezések szakaszosan változtatható C_i tagokat is tartalmaznak. Igy már közepes nagyságú berendezésekben is találunk 0,1; 1; 10 értékeknek megfelelő C_i tagokat. A k_i állandó szorzótényezők általában 3—4 nagyságrendet fognak át.

2. Léptéktranszformáció

Mielőtt az adott feladatot analóg gép segítségével megoldhatnánk, egy sor előkészítő munkára van szükség. A továbbiakban csak olyan feladatokat tekintünk, amelyek közönséges differenciálegyenletre vagy ezek rendszerére visszavezethetők.

Az előző pontban már láttuk, hogy a műveleti elemek a matematikai operációkat csak meghatározott tartományban hajtják végre. Igy a differenciálegyenletben vagy rendszerben szereplő valamennyi változót az ún. *gépi változó*kra kell átírnunk. Az adott differenciálegyenletből ilyen úton származtatott egyenletet *gépi egyenlet*nek nevezzük. Tárgyalásunk során a problémaváltozókat kisbetűvel, a gépi változókat nagybetűvel jelöljük. A differenciálhányadosokat operátoros alakban fogjuk felírni, és megkülönböztetésül a gépi változó szerinti differenciáloperátort ismét nagybetűvel jelöljük. Igy a továbbiakban jelentse p^n a $\frac{d^n}{dt^n}$, P^n a $\frac{d^n}{d\tau^n}$ operátort.

A függő változók transzformálását a (3) feltételnek megfelelően az

$$X = M_x x\,, \quad Y = M_y y\,, \ldots \tag{6}$$

összefüggésekkel írhatjuk le, ahol

$$M_x = \frac{Maximális\ üzemfeszültség}{|\,x\,|_{max}}\ \frac{[V]}{[\mathrm{Dim}]}\,,$$

ill.

$$M_x = \frac{Gépi\ egység}{|\,x\,|_{max}}\ \frac{[E]}{[\mathrm{Dim}]}$$

aszerint, hogy feszültségekben vagy gépi egységekben számolunk. Mindkét programozási mód gyakorlatilag egyenértékű, ügyelnünk kell azonban arra, hogy a szorzóegységeknél más az átviteli egyenlet, ha feszültségben számolunk:

$$X_0 = \frac{1}{100} X_1 X_2 [V] ,$$

ill. egységben:

$$X_0 = X_1 X_2 [E] .$$

Hasonlóképpen transzformálhatók a függő változók differenciálhányadosai is, ha ezek maximális értéke ismert. Igy általában az n-edik deriváltra a

(7) $$p^n X = M_{p^n x} x$$

összefüggés érvényes, ahol

$$M_{p^n x} = \frac{Gépi\ egység}{| p^n x |_{\max}} \frac{[E]}{[\mathrm{Dim}]}$$

gépi egységben kifejezve.

3. Időtranszformáció

A független változót is általában transzformáljuk, mégpedig a gépidőbe. E transzformációt a

(8) $$\tau = M_t t$$

összefüggés alapján hajtjuk végre, ahol

$$M_t = \frac{\tau_{\max}}{t_{\max}}$$

az időtranszformáció léptéke.

Hasonlóképpen transzformálnunk kell a differenciálhányadosokat is, így az n-edik deriváltra általában a

(9) $$p^n = M_t^n P^n$$

összefüggés érvényes.

Ügyelnünk kell arra, hogy a függő változók differenciálhányadosai alá vannak rendelve a léptéktranszformációnak is. Így pl. az n-edik derivált (7) és (9) alapján a következőképpen írható át gépi változókra:

(10) $$P^n X = \frac{M_{p^n x}}{M_t^n} p^n x .$$

A léptéktranszformációk összefüggéseit a 12. ábrán táblázatosan is összefoglaltuk.

4. Programvázlatok

Amint már az I. részben említettük, az analóg gépen a műveleti elemek segítségével az adott matematikai feladathoz egy analóg rendszert kell összeállítanunk. A programozás lényege tehát az, hogy az adott differenciálegyenletet gépi egyenletre transzformáljuk, s utóbbira kapcsolási vagy programvázlatot állítunk össze. Az adott feladatra alapvetően különböző programvázlatok készíthetők. Többnyire nehéz előre eldönteni, hogy melyik programvázlat szolgáltatja majd nagyobb pontossággal az eredményt. Célszerű először csak elvi kapcsolási vázlatot felépíteni, számadatok nélkül. Ez gyors tájékoztatást nyújt arra nézve, hogy hozzávetőlegesen milyen műveleti elemekre lesz szükség a feladat megoldásához. Az elvi programvázlatot gyakran a lépték-

A feladat változója	Lépték	Gépi változó	Visszatranszformálás
y	M_y	$Y = M_y \cdot y$	$y = \frac{1}{M_y} \cdot Y$
py	$M_{p^n y}$	$p^n Y = M_{p^n y} \cdot p^n y$	$p^n y = \frac{1}{M_{p^n y}} \cdot p^n Y$
t	M_t	$\tau = M_t t$	$t = \frac{1}{M_t} \cdot \tau$
p		$P = \frac{1}{M_t} \cdot p$	$p = M_t \cdot P$
p^n		$P^n = \frac{1}{M_t^n} p^n$	$p^n = M_t^n \cdot P^n$

12. ábra

transzformációk elvégzése előtt el szoktuk készíteni. Mivel az integráló elemek sokkal kisebb hibával működnek, mint a differenciálók, a programvázlat elkészítéséhez rendszerint előbbieket szoktuk alkalmazni. Így a vázlat elkészítését az ún. visszavezetés elvén valósítjuk meg. Feltételezzük, hogy a legmagasabbrendű differenciálhányados értéke ismert. Ebből kiindulva integráló egységek segítségével előállíthatjukaz alacsonyabbrendű deriváltakat. Ha a legmagasabbrendű deriváltat kifejezzük a programozandó egyenletből, láthatjuk, hogy előállíthatjuk az alacsonyabbrendű deriváltak megfelelő együtthatókkal való szorzása és összegezése útján. Inhomogén egyenlet esetén a szükséges zavaró függvényt, rendszer esetén pedig a megfelelő függő változókat is összegeznünk kell. A programvázlatot a fentiek alapján a 11. ábra szerinti szimbólumokkal készítjük el.

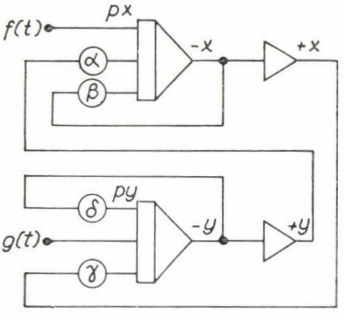
A mondottakat egy példán is megvilágítjuk. Készítsünk programvázlatot

$$\begin{aligned} px &= 2y - 5x + e^t \\ py &= x - 6y + e^{-2t} \end{aligned} \tag{11}$$

differenciálegyenletrendszerre. Az elvi vázlatot numerikus számadatok nélkül, tehát a

$$\begin{aligned} px &= ay - \beta x + f(t) \\ py &= \gamma x - \delta y + g(t) \end{aligned} \tag{12}$$

alakú egyenletrendszerre készítjük el. px értékét megkapjuk, ha a (12) első egyenletének jobboldalán álló függvényeket összegezzük, és teljesen hasonlóan nyerhetjük a második egyenletből py értékét. Így tehát, ha az összegezendő függvényeket egy-egy összegező integráló egység bemeneteire vezetjük, $-x$ ill. $-y$ értékét kapjuk az erősítők kimenetein. A szükséges előjelfordító egységek és az állandó szorzótényezők segítségével a kapott értékeket a bemenetekre visszavezethetjük. A vázlatot a 13. ábrán láthatjuk.



13. ábra

Az $f(t)$ és $g(t)$ függvények előállítására még visszatérünk az 5. pontban.

5. Optimális programozás

A program összeállítása során arra is törekednünk kell, hogy a megoldást a lehető legkisebb hibával kapjuk meg. Ennek érdekében célszerű a kapcsolásban szereplő összes műveleti elemet teljesen kivezérelni. Ezalatt azt értjük, hogy a műveleti elemek kimenetein jelentkező változók a vizsgált időszakaszban a (3) feltételben megadott határokat legalább egyszer elérjék, de egyszer se lépjék túl. Amennyiben a változók maximális értékeiről semmilyen becslés nem áll rendelkezésünkre, megkíséreljük egy kiinduló programmal értéküket meghatározni. A kiinduló program akkor alkalmas erre, ha a kapcsolásban szereplő műveleti elemek egyike sem vezérlődik túl a vizsgált időszakaszban. A kezdeti feltételek léptékének, és adott esetben a zavarófüggvény léptékének alkalmas megválasztásával ezt elérhetjük.

Az általánosság csorbítása nélkül tekintsük tehát a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i y = 0 \qquad (a_n = 1,\ a_i > 0) \tag{13}$$

állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet a

$$p^j y(0) = p^j y_0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{14}$$

kezdeti feltételekkel. Legyenek adva továbbá a megoldásfüggvény és deriváltjai abszolútértékeinek maximumaira a következő becslések:

$$\varrho_j = | p^j y |_{\max} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)\,.$$

Ezekkel (6), ill. (7) alapján képezhetjük a gépi változókat, tehát a j-edik derivált gépi változókban

(15) $$p^j Y = \frac{p^j y}{\varrho_j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

lesz. Ekkor valamennyi j-re érvényes, hogy

$$|p^j Y| \leq 1 .$$

Ha most (13) és (14)-be a gépi változókat bevezetjük, a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \varrho_i \left[\frac{p^i y}{\varrho_i}\right] = \sum_{i=0}^{n} a_i \varrho_i p^i Y = 0 \qquad (\varrho_n = 1)$$

gépi egyenletet kapjuk a

$$p^j Y_0 = \frac{p^j y_0}{\varrho_j}$$

kezdeti feltételekkel.

Figyelembevéve, hogy (7) és (9) miatt

(16) $$p^n X = M_{p^n x} p^n x = M_{p^n x} \int p^{n+1} x \, dt = \frac{1}{M_t} \frac{M_{p^n x}}{M_{p^{n+1} x}} \int p^{n+1} X \, d\tau$$

és (15) szerint $M_{p^j x} = \frac{1}{\varrho_j}$, tehát az $n - i$-edik integrálóegység bemenete az M_t időléptéktől eltekintve $\frac{\varrho_{i+1}}{\varrho_i}$-vel szorzódik, így az $n - 1$-edik integrálóegység bemenete $\frac{1}{\varrho_{n-1}}$-el, lévén $\varrho_n = 1$.

Az előző pontban említett példát oldjuk meg most optimális programozással. Megoldandó tehát a (11) differenciálegyenletrendszer az

$$x(0) = 0{,}375 \quad \text{és} \quad y(0) = 0{,}325$$

kezdeti feltételek mellett. A megoldást a $0 \leq t \leq 3$ intervallumban keressük. Ismeretesek az $|x|_{\max} = 3{,}5$ és $|y|_{\max} = 0{,}5$ becslések. A gépidő, amelyre a független változót transzformálhatjuk legyen 15 sec. Először foglalkozzunk az elvi programvázlattal. Láthatjuk, hogy a (11) egyenletrendszer zavaró függvényei maguk is közönséges differenciálegyenletek megoldásai, így ezeket célszerű differenciálegyenletükkel generálni. Vázlatot készítünk tehát a

(17) $$pz - z = 0 \quad \text{és} \quad pw + 2w = 0$$

differenciálegyenletekre a $z(0) = 1$ és $w(0) = 1$ kezdeti feltételekkel. Ezután elkészítjük a (11) differenciálegyenletrendszer elvi vázlatát is. Ez lényegében megegyezik a 13. ábrán bemutatott vázlattal, amelyhez kiegészítésül az $f(t) = z$ és $g(t) = w$ függvényeknek a (17) egyenletek alapján elkészített programvázlatát csatoljuk (14. ábra). Mindeddig számadatokat nem használtunk fel. Ezek az ideiglenes vázlatok azonban megmutatják, hogy négy integráló és három előjelfordító egységre lesz szükségünk a feladat megoldásához. Következő feladat a léptéktranszformációk végrehajtása és a gépi egyenletek felállítása. Az $|x|_{\max}$ és $|y|_{\max}$-ra adott becslések alapján (6) szerint $M_x = \frac{1}{3,5}$ és $M_y = \frac{1}{0,5}$, ill. (8) alapján $M_t = 5$. Mivel $e^t < 20$ és $e^{-2t} < 1$ a $0 \leq t \leq 3$ intervallumban, így $M_z = \frac{1}{20}$ és $M_w = 1$ lesz. A px, py, pz, pw differenciálhányadosokat (10) alapján átszámítva és (16)-ot figyelembevéve (11)-et a következő gépi egyenletekre írhatjuk át;

$$3,5 \cdot 5\left[P\frac{x}{3,5}\right] = 2 \cdot 0,5\left[\frac{y}{0,5}\right] - 5 \cdot 3,5\left[\frac{x}{3,5}\right] + 20\left[\frac{e^t}{20}\right], \quad 20 \cdot 5\left[P\frac{z}{20}\right] = 20\left[\frac{z}{20}\right],$$

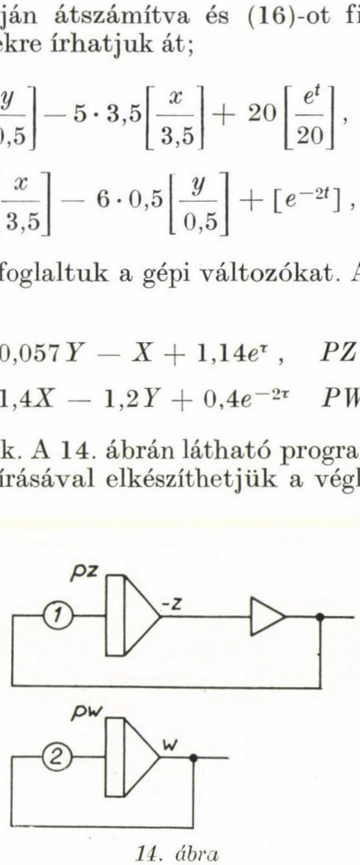
$$0,5 \cdot 5\left[P\frac{y}{0,5}\right] = 3,5\left[\frac{x}{3,5}\right] - 6 \cdot 0,5\left[\frac{y}{0,5}\right] + [e^{-2t}], \quad 5 \cdot [Pw] = -2[w],$$

ahol szögletes zárójelbe foglaltuk a gépi változókat. Az egyszerűsítések elvégzése után végül a

$$PX = 0,057Y - X + 1,14e^{\tau}, \quad PZ = 0,2Z,$$

$$PY = 1,4X - 1,2Y + 0,4e^{-2\tau} \quad PW = -0,4W$$

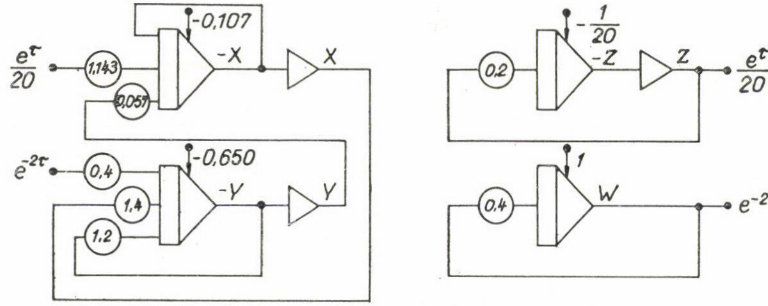
gépi egyenleteket nyerjük. A 14. ábrán látható programvázlatból a gépi egyenletek együtthatóinak beírásával elkészíthetjük a végleges vázlatot.



14. ábra

A kezdeti feltételek értékeit ugyancsak a (6) léptéktranszformációval állapítjuk meg. A végleges vázlat a 15. ábrán látható.

Már korábban említettük, hogy a végleges programvázlat elkészítése meglehetősen sok szabadságot enged meg a programozónak. A rendelkezésre álló analóg gép adottságai és a programozó gyakorlatban kialakított módszere döntik el, milyen sorrendben és hány lépésben alakul ki a végleges programvázlat, amely végül a gépen megvalósításra kerül. Esetenként maguk a megoldandó feladatok is szükségessé tehetik a már begyakorlott módszer megváltoztatását. A programozás iránt behatóbban érdeklődők számára ajánlhatjuk



15. ábra

H. ADLER kézikönyvét [4], valamint R. SCHÖNEFELD dolgozatát [3]. A szabályozástechnikával kapcsolatos programozási módszerek tanulmányozására B. JA. KOGAN [1] és A. SYDOW [2] munkái ajánlhatók.

Példa

Egy hidraulikus rendszer méretezésével kapcsolatosan merült fel a következő probléma.

Keresettek a

$$p^2x + apx + bx + ct + d + e \int_0^t \sqrt{p^2x + fpx + d}\, dt = 0 \tag{18}$$

állandó együtthatós integro-differenciálegyenlet megoldása első és második deriváltjainak maximális értékei az a, b, c, d, e, f együtthatókban összefoglalt meghatározott műszaki paraméterek függvényében. A (18) egyenletben szereplő együtthatók c kivételével pozitívok.

A (18) differenciálegyenletből az integrált t-szerinti differenciálással kiküszöbölve a

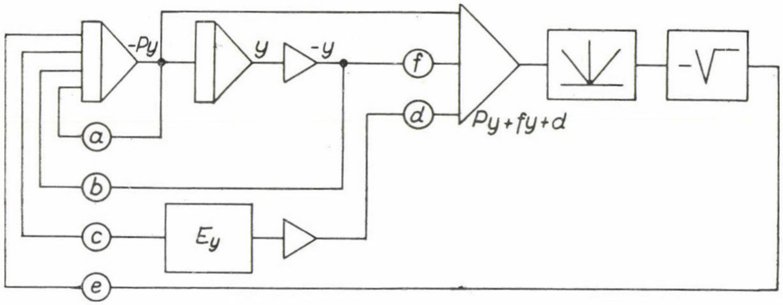
$$p^3x + ap^2x + bpx + c + e\sqrt{p^2x + fpx + d} = 0$$

differenciálegyenletre jutunk, amelyből az $y = px$ helyettesítéssel a

$$p^2y + apy + by + c + e\sqrt{py + fy + d} = 0 \tag{19}$$

állandó együtthatós nemlineáris differenciálegyenletet kapjuk. A továbbiakban tehát a (19) differenciálegyenlet megoldásának és az első deriváltjának a maximális értékeit keressük az $y(0) = 0$ és $py(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett. Az analóg gép alkalmazása ez esetben mindenképpen indokolt, mert egyrészt a (19) differenciálegyenletet zárt alakban integrálni nem tudjuk, másrészt a megoldásokat az együtthatók paramétereinek függvényében keressük, ami a numerikus számítást tenné hosszadalmassá.

Mivel y és py maximális értékeiről nincs becslésünk, a programozási munkát egy elvi vázlat elkészítésével kezdhetjük. Figyelembevéve, hogy az együtthatók c kivételével pozitívok, az elvi vázlatot az 5. pont alatt mondottak alapján elkészíthetjük. A 16. ábrán látható elvi vázlatban néhány műveleti elemet blokk alakjában tüntettünk fel. Így a gyökvonást egyelőre blokkal jelöltük. A gyök alatti mennyiségről nem tudjuk, hogy a vizsgálandó tartományban jelet vált-e, célszerű tehát a gyökvonó egység elé egy abszolútértékképző elemet is beiktatni, amit ugyancsak blokkal jelöltünk a vázlaton. A harmadik blokk, amit E_y-nal jelöltünk, az egységnyi feszültséget adja. Ennek változtatására szükségünk lesz, amíg az $|y|_{\max}$ és $|py|_{\max}$ értékét meg nem becsültük.



16. ábra

A (19) egyenlet együtthatóinak határai ill. numerikus értékei az alábbiak:

$$\begin{aligned} 2{,}11 &\leq a \leq 18{,}7\,, & c &= -945 \\ 476 &\leq b \leq 511\,, & d &= 41{,}5 \\ 0 &\leq f \leq 16{,}6\,, & e &= 15{,}3 \end{aligned} \tag{20}$$

A megoldást MN-7 típusú analóg gépen keressük, amelynek a gépi változókra megadott korlátai az alábbiak:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \tau_{\max} \leq 250 \text{ sec}\,, \\ -100\text{V} &\leq U_i \leq +100\text{V}\,, \\ 0 &\leq T_i \leq 10\,, \\ 0 &\leq k_i \leq 10\,. \end{aligned} \tag{21}$$

A (19) egyenlet változóit ennek megfelelően transzformálnunk kell. Ha c és e értékét zérusnak választjuk, egy másodrendű homogén differenciálegyenletet kapunk, amelynek a megoldása harmonikus rezgés 3—4 közötti másodpercenkénti rezgésszámmal. A (21) alatti adatokból láthatóan $\tau_{\max}$ legkisebb értéke 1 másodperc, így a maximális amplitúdó kimérése nehézkes. Célszerűnek látszik tehát a

$$\tau = 10\,t$$

időtranszformáció bevezetése, amellyel a (19) egyenlet

$$100P^2y + 10aPy + by + c + e\sqrt{10\,Py + fy + d} = 0$$

alakba megy át. 100-zal osztva és $\sqrt{10}$-et kiemelve a

$$P^2y + a'Py + b'y + c' + e'\sqrt{Py + f'y + d'} = 0 \tag{22}$$

egyenletre jutunk, ahol most már az

$$(23)\qquad a' = \frac{a}{10},\ b' = \frac{b}{100},\ c' = \frac{c}{100},\ e' = \frac{e\sqrt{10}}{100},\ f' = \frac{f}{10},\ d' = \frac{d}{10}$$

együtthatók — mint ez a (20) alatt megadott numerikus adatok behelyettesítéséből kiderül — a gépen beállítható tartományba esnek. A (22) egyenlet elvi programvázlata egyezik a (19) egyenlet 16. ábrán látható vázlatával.

A (23) együtthatókat a vázlatba beírjuk, és a vázlat szerint a programot a gépen is beállítjuk, hogy a függő változók maximális értékeit megbecsülhessük. Példaképpen ragadjuk ki az együtthatók alsó határainak megfelelő értékeket. Programozzuk tehát a

$$(24)\qquad P^2y + 0{,}211\,Py + 4{,}76\,y - 9{,}45 + 0{,}484\sqrt{Py + 4{,}15} = 0$$

egyenletet, és válasszuk az E_y blokkban állítandó egységet eleinte kicsire. Megindítva az integrálást, ellenőrizzük, hogy az egyes műveleti elemek nem vezérlődnek-e túl, amit a gépen elhelyezett jelzőberendezések jeleznek. Ha az $E_y = 0{,}143\,E$ értéket elértük, a gyök alatti mennyiség éppen eléri a gépi egységet (100 V). A maximumokat most kimérjük, és eszerint a következő becslések állnak rendelkezésre az optimális programozáshoz:

$$|Py + f'y + d'|_{\max} = E = 100\text{V}\,,\quad |y|_{\max} = 0{,}333E,\quad |Py|_{\max} = 0{,}397E\,.$$

Megfigyelhettük továbbá, hogy a gyök alatti mennyiség a vizsgált szakaszban végig pozitív, s így az abszolútérték képző elemet elhagyhatjuk. Az 5. pontban említettek alapján (24)-ből a

$$(25)\qquad \left[\frac{1}{0{,}397}P^2y\right] + 0{,}211\frac{0{,}397}{0{,}397}\left[\frac{Py}{0{,}397}\right] + 4{,}76\frac{0{,}333}{0{,}397}\left[\frac{y}{0{,}333}\right] - \frac{9{,}45}{0{,}397} + \frac{0{,}484}{0{,}397}\sqrt{0{,}397\left[\frac{Py}{0{,}397}\right] + 4{,}15} = 0$$

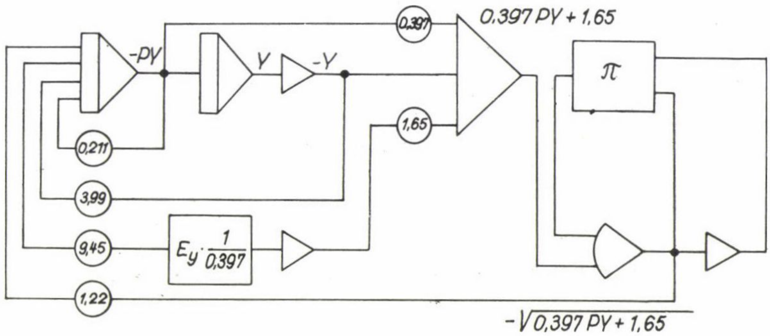
gépi egyenletet nyerjük, ahol az optimálisan programozott gépi változókat szögletes zárójellel zártuk be. A szükséges egyszerűsítéseket (25)-ben elvégezve végül is a

$$(26)\qquad P^2Y + 0{,}211\,PY + 3{,}99\,Y - 23{,}8 + 1{,}22\sqrt{0{,}397PY + 4{,}15} = 0$$

gépi egyenletre jutunk, amelynek gépi változói most már optimálisan programozottak. A (26) egyenletből kitűnik, hogy az állandó tag értéke ismét meghaladja a (21) alatt megadott felső korlátot. Ezen segíthetünk E_y értékének megváltoztatásával. Ha E_y értékét pl. $\frac{1}{0{,}397}$-szeresére választjuk, 23,8 értéke $\frac{1}{0{,}397}$-ed részére, tehát éppen 9,45-re csökken, ami beállítható a gépen. A 15. ábrából azonban kitűnik, ha E_y értékét $\frac{1}{0{,}397}$-szeresre választjuk, ezzel 4,15 értékét is $\frac{1}{0,397}$-szeresre növeljük. 4,15 értékét tehát még 0,397-el szoroznunk kell. Így végül is a

$$P^2Y + 0{,}211\,PY + 3{,}99\,Y - 9{,}45 + 1{,}22\,\sqrt{0{,}397PY + 1{,}65} = 0$$

gépi egyenletet állítjuk be a gépen. A programvázlatot a gyökvonó egységgel együtt a 17. ábrán láthatjuk. Mint az imént megállapítottuk, E_y értéke $\frac{0{,}143}{0{,}397}$ gépi egységben kifejezve. A szükséges méréseket elvégezve E_y értékének ismeretében a transzformációs összefüggések felhasználásával a változókat eredeti léptékükre transzformálhatjuk vissza.



17. ábra

Megjegyezzük, hogy a feladat a paraméterváltoztatások miatt egy sorozat differenciálegyenlet megoldását írja elő, tehát az optimális programozás meglassítja a munkát. Ha az együtthatók felső határaival képezett differenciálegyenletet megvizsgáljuk, a (24) differenciálegyenlet megoldásához nagyságrendben közelálló értéket kapunk, tehát a gyök alatti mennyiség maximuma itt is mintegy ötszöröse $|y|$ maximumának. Ez indokolttá teszi, hogy a gyök alatti mennyiség képzésére használt a 17. ábrán 2. sz.-mal jelölt erősítő bemenő jeleit 5-tel leosszuk, majd a gyökvonó egység után $\sqrt{5}$-tel szorozva kompenzáljunk.

Ezután az E_y értékének növelésével hozzuk a gépi változókat közel optimális értékre. Tehát a (22) egyenlet helyett a

$$P^2y + a'Py + b'y + c' + e'\sqrt{5}\,\sqrt{\frac{Py}{5} + \frac{f'y}{5} + \frac{d'}{5}} = 0$$

egyenletet használjuk valamennyi esetben, s E_y értékét szükség szerint változtatjuk.

(Beérkezett: 1965. március 8.)

IRODALOM

[1] KOGAN, B. Ja.: *Analóg számológépek és alkalmazásuk önműködő szabályozások vizsgálatára.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.
[2] SYDOW, A.: „Analoge Programierungstechnik mittels Übertragungsfaktoren." *Zeitschrift für Messen, Seuern, Regeln.* **6** (1961) S. 245.
[3] SCHÖNEFELD, R.: „Beitrag zur Programierung elektronischer Analogrechner". *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Elektrotechnik.* Ilmenau. **9** (1963) 2. S. 113.
[4] ADLER, H.: *Elektronische Analogrechner.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

О СОСТАВЛЕНИИ ПРОГРАММЫ ДЛЯ МОДЕЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

КАРЛ ТОТ

Резюме

Автор излагает основные физические принципы наиболее важных элементов операций электронных моделирующих устройств и резюмирует основные сведения, знакомство с которыми необходимо для составления программы. Для того, чтобы уяснить их, он приводит пример из технической практики.

ÜBER DIE PROGRAMMIERUNGSTECHNIK VON ANALOGRECHNERN

von

K. TÓTH

Zusammenfassung

Die Arbeit handelt um die physikalischen Grundlagen der wichtigsten Rechnenelementen der Analogrechner, und versucht die Programierungstechnik kurz zusammenfassen, wobei auch die optimale Programierung gezeigt wird. In einem Beispiel wird das Letztere angewandt.

VÉGES STRUKTÚRÁK ÉS DIGITÁLIS ÁRAMKÖRÖK KAPCSOLATA I

DÉNES JÓZSEF és RADA TIBOR

Bevezetés

Egy tipikus digitális hírközlő rendszer egyszerűsített ábrázolása a következő:

$$\boxed{\text{Hírforrás}} \xrightarrow[\text{információ}]{\text{eredeti}} \boxed{\text{kódoló}} \xrightarrow[\text{kódolt inf.}]{\text{csatorna}} \boxed{\text{dekódoló}} \xrightarrow[\text{információ}]{\text{visszanyert}} \boxed{\text{hírfel-használó}}$$

Az ideális csatorna zajtalan, vagyis a kódolóból kikerülő információ 1 valószínűséggel megegyezik a dekódolóba érkező információval. A gyakorlatban előforduló csatornák azonban zajosak. Egy adott csatornára vonatkozó zajszint mérőszáma a *jel/zaj* viszony. Az információtovábbítás zavartalanná tételének két szokásos módja van: az egyik a csatorna minőségének javítása (a zajszint csökkentése), a másik a továbbításra kerülő információk redundanciájának növelése. Ez utóbbi képezi a hibajelző és hibajavító kódok, gyűjtőnéven az algebrai kódoláselmélet tárgyát. (Az információelmélet alapfogalmai megtalálhatók pl. SHANNON [526]-ban.)

Mielőtt részletesebb vizsgálat alá vennénk az algebrai kódoláselméletet, néhány szóval utalunk arra, hogy a csatorna minőségének javítása nem mindig lehetséges. Erre példaként szolgál a következő: az elektronikus számológépek nagymértékű elterjedésével sem várható a berendezések árának olyan csökkenése, amely lehetővé tenné minden információfeldolgozással foglalkozó egység ilyen berendezésekkel való ellátását, s így a központokban elhelyezett elektronikus számológépek optimális kihasználása a távolsági adatközlést teszi indokolttá. Mint ismeretes, a numerikus adatok redundancia nélküliek, így ezek átvitele nagy biztonságot igényel. Ennek a problémának megoldásaként az országos hírközlő hálózatnak a távolsági adatközlés szempontjait figyelembe vevő kicserélése kellő anyagi alap hiányában majdnem lehetetlen nemcsak Magyarországon, de gazdaságilag lényegesen fejlettebb országokban is. Így a gyakorlatban a közlésre kerülő adatok redundanciájának növelését alkalmazzák. Másik példaként, az űrhajózásban használt irányítás-technika szolgálhat, ahol az űrben lezajló természeti jelenségek szolgálnak kiküszöbölhetetlen zajforrásként, és így a hibátlan hírtovábbítás csak redundáns információkkal lehetséges.

Az információ hiba elleni védelmének nem csupán az információ redundanciájának növelése az egyetlen módja, hanem redundáns áramkörök alkalmazása is hasonló eredményre vezet. Az irodalom az előzőeknek megfelelően különbséget tesz *információs* illetve *áramköri redundancia* között. Mivel az elmélet alkalmazása szempontjából a két eset azonos, így dolgozatunkban ezeket egységesen kezeljük.

A hibajelző, hibajavító kódok és áramkörök felhasználásának indokolását automaták esetében M. Nadler [419] adta meg. A következőkben M. Nadler számításait közöljük. Az automatákban levő alkatrészek (elektroncsövek, kristálydiódák, stb.) meghibásodásának időbeli eloszlása Poisson-eloszlással jól közelíthető. Ha az egyes alkatrészek meghibásodásáról feltesszük, hogy azok egymástól függetlenek, annak $p(k, t)$ valószínűsége, hogy t idő alatt k hibásodás forduljon elő,

$$p(k, t) = \frac{z^k e^{-z}}{k!},$$

ahol $z = \dfrac{nt}{\tau}$, n az automatákban levő kapcsoló elemek száma, τ az átlagos élettartam. Így a közelebbről megvizsgálandó $p(0, t)$ valószínűség, vagyis annak valószínűsége, hogy t idő alatt nem történik hiba,

$$p(0, t) = e^{-z}.$$

Ha a hibátlan működés időtartamát t_0-val jelöljük és $p(0, t_0) = 0{,}5$ által értelmezzük, ebből $t_0 \approx \dfrac{0{,}75\,\tau}{n}$, így a $\tau = 10^4$, $n = 10^4$ esetre $t_0 = 0{,}7$ *óra* adódik. Ha figyelembe vesszük, hogy a modern elektronikus számológépekben a kapcsoló elemek száma jelentősen 10^4 felett van, és az élettartam arányos növelésének technológiai akadályai vannak, nyilvánvaló az áramkörök redundanciája fokozásának szükségessége.

A biztonságos hírtovábbítás módszerei közül a hibajelző kódokhoz legközelebb álló Pollák—Virág rendszer már több évtizeddel ezelőtt ismert volt. A rendszer lényege, hogy minden jelet háromszor adnak le, és a végponton a legalább kétszer azonosan felfogott jelet fogadják el helyesnek. ([321], [403], [404], [415], [422], [445], [565], [612]). Korunkban amikor az információ-áramlás sebessége nagymértékben emelkedett, a teljes információ megismétlése, mint hibaelhárító módszer, nem kielégítő. Érdekes megjegyezni, hogy az áramköri redundanciát először vizsgáló Neumann János által kidolgozott többségi logika (majority logic) a Pollák—Virág-rendszer áramköri redundanciára vonatkozó analogonja. Neumann J. [422] és később L. A. M. Verbeek, S. Muroga [415], J. G. Tyron, R. E. Lyons s W. Wanderhulk kissé más utakon, D. B. Armstrong [10] és Winograd [612] azzal a problémával foglalkoztak, hogyan lehet kevésbé megbízható alkatrészekből tökéletes automatákat készíteni.

Az előzőekből világosan kiderül, hogy a hibajelző és hibajavító kódok felhasználása a híradástechnikában indult meg először. Jelenleg számos egyéb területen való alkalmazás is ismeretes. A teljesség igénye nélkül utalunk a következő területekre:

1. Az automaták (pl. elektronikus számológépek) tervezése. Itt számos esetben nem a rendszeren keresztül haladó információ redundanciáját növelik, hanem az áramkörét, hibajelző, hibajavító áramkörök alkalmazásával.

A hibajelző és hibajavító áramkörök alkalmazása jelentős pl. olyan automaták előállításánál, ahol a meghibásodási valószínűség csökkentése az alkatrészek megbízhatóságának növelése révén már nem biztosítható. Másik példaként megemlíthető, hogy mesterséges égitestekbe épített számológépek karbantartása nem lehetséges, így a működési idő redundáns áramkörökkel hosszabbítható meg.

2. Távolsági adatközlés. Itt az információban levő redundancia nulla, ugyanakkor a továbbítás sebessége megabit nagyságrendű (1 millió bit másodpercenként), így a hibajelző, hibajavító kódok különös jelentőséget kapnak.

3. Biokémiai alkalmazás. A fehérjékben 20 féle aminosav van, a hozzájuk kapcsolódó nukleinsavakban 4 különböző nukleotida fordul elő. Ezek képezik a sejt információs rendszerét. A fehérje keletkezése a következő folyamattal jellemezhető:

$$\text{DNS} \rightarrow \text{RNS} \rightarrow \text{fehérje}$$

(DNS = dezoxiribonukleinsav, a sejtmag információs anyaga, RNS = ribonukleinsav, a sejt információs anyaga.) A fehérje az ezekben a nukleinsavakban levő nukleotidák mintájára épül fel. Több elmélet szerint a fehérje kódolása hibajavító kódok segítségével megy végbe. (Lásd. pl. [119].)

1. §. A hibajelző és hibajavító kódok elmélete

Az információtovábbítás matematikai modellje a következő. Adott a továbbítandó információk K' halmaza, a H alaphalmaz (más elnevezéssel ábécé), és a K kódszókészlet, amely a H-beli elemekből álló összes lehetséges, legfeljebb n hosszúságú jelsorozatok halmazának egy részhalmaza. K' és K elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn. Ha H elemei a 0, 1 számok, akkor K-t *bináris kódnak* nevezzük. A bináris kódolás elmélete az algebrai kódoláselmélet legjobban kidolgozott fejezete. Az algebra szerepe akkor kerül előtérbe, ha a H és K halmazok algebrai struktúrák, pl. H test, K vektortér. Az algebrai struktúrák használatából adódó előny a műszaki realizálásnál mutatkozik meg.

Ha H test, K vektortér, és tetszőleges kódszó hossza rögzített n szám, akkor K-t *lineáris kódnak* nevezzük. Ha H a két elemű test, akkor K-t *blokk-* vagy *csoport-kód*nak nevezzük [452].

A lineáris kódok és a vektorterek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, vagyis minden lineáris kódnak megfelel egy vektortér és megfordítva, minden vektortérnek egy lineáris kód, pontosabban n komponensű vektorokból álló vektortérnek n hosszúságú kódszavakból álló lineáris kód felel meg. A fentieknek megfelelően a bevezetett matematikai fogalmak hasznos segédeszközt jelentenek a lineáris kódok tulajdonságainak vizsgálatánál. A csoportkódok mint a két elemű test feletti vektorterek jellemezhetők.

Dolgozatunk alapvetően a csoportkódok tulajdonságait vizsgálja. Ez a tény nem csupán a csoportkódok jelentőségének, hanem annak is tulajdonítható, hogy elméletük egyéb kódtipusokhoz képest tökéletesebben kidolgozott.

Csoportkódok esetében a kódszavak *súlya* megegyezik a kódszavaknak megfelelő vektorokban levő 1-esek számával. Az x kódszó súlyát $w(x)$-szel fogjuk jelölni. Az x és az y kódszavak közötti $D(x, y)$ Hamming-távolság a két kódszó összegének súlyával egyenlő, vagyis

$$D(x, y) = w(x + y)\,.$$

Egy adott csoportkód *kódszókészletének* minimális Hamming-távolsága a következőképpen definiálható: legyen G egy csoportkód, ha $D(x, y) \geqq m$ mindig teljesül, valahányszor x és y egymástól különböző G-beli kódszavak és alkalmas x_0, y_0 párra $D(x_0, y_0) = m$ igaz, akkor m-et G *minimális Hamming-távolságának* nevezzük. Könnyen belátható, hogy akkor, ha G minimális Hamming-távolsága m, G $m - 1$ hibát jelez, vagyis G egy kódszavában levő $m - 1$ hiba esetén nem található G-ben egy másik kódszó, amely a hibással megegyezik.

Sok esetben a hibajelzés (ami után emberi beavatkozásnak kell következnie) nem elégséges, az is szükséges, hogy a hiba automatikusan kijavítható legyen. E célt a hibajavító kódok szolgálják.

Szükségünk lesz a generátor-mátrix és a párosságvizsgáló mátrix fogalmára és néhány tulajdonságára. Egy G lineáris kód bázisvektorainak halmazát felfoghatjuk, mint egy M mátrix sorait, ekkor M-et G *generátor-mátrixának* nevezzük. Ha a G-hez tartozó vektortér dimenziója k, akkor M sorainak száma is k. Ha a G-ben levő kódszavak hossza n és generátor-mátrixa k sort tartalmaz, akkor G-t (n, k) *kódnak* nevezzük, vagyis G az n dimenziós teljes vektortérnek egy k dimenziós altere.

Az előzőekből következik, hogy ha G csoportkód, akkor kódszókészlete 2^k elemből áll. (Mivel a megfelelő vektortér additív struktúrája az általánosított Klein-csoport, vagy másképpen elemi 2-csoport.) Számoláshoz, de különösen a műszaki kivitelezéshez a generátor-mátrix, mint ábrázolási mód, nagy előnyt jelent az összes kódszavak felsorolásával szemben. A különbség szemléltetésére elég figyelembe venni azt a tényt, hogy ha $n = 50$, $k = 30$, akkor 10^9 egyenként 50 bináris jegyet tartalmazó kódszó helyett elég egy 30×50 méretű mátrix felírása.

Annak a magyarázata, hogy miért előnyös, ha a kódszókészlet nem csupán halmaz, hanem algebrai struktúra, többek között abban rejlik, hogy a halmazokkal szemben az algebrai struktúráknak általában van valódi (az egész struktúránál kevesebb elemet tartalmazó) generátor-rendszerük. Különösen fontos szerephez jutnak az egy elem által generált (ciklikus) struktúrák.

Az M által kifeszített vektortérre ortogonális vektorteret M *null-terének*, és M null-terének generátor-mátrixát *párosságvizsgáló* mátrixnak nevezzük. Ha G (n, k) kód, akkor párosságvizsgáló mátrixa $(n - k) \times n$ méretű.

A fogalmak jobb megvilágítására szolgálhat a következő példa. A G csoportkód elemei a következő vektorok (kódszavak):

$$v_1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0),\ v_2 = (1\ 0\ 0\ 1\ 1),\ v_3 = (0\ 1\ 0\ 1\ 0),\ v_4 = (1\ 1\ 0\ 0\ 1),$$

$$v_5 = (0\ 0\ 1\ 0\ 1),\ v_6 = (1\ 0\ 1\ 1\ 0),\ v_7 = (0\ 1\ 1\ 1\ 1),\ v_8 = (1\ 1\ 1\ 0\ 0).$$

G generátor-mátrixát jelölje M.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A generátor-mátrix nem egyértelműen rendelhető hozzá a kódszókészlethez, pl. G-nek egy másik M' generátor-mátrixa

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

G csoportkód elemei előállíthatók M, illetőleg M' lineáris kombinációiként.

Induljunk ki M'-ből. G csoportkód elemeit jelöljük, mint korábban $v_1, v_2, \ldots, v_8$-al, akkor G elemei felírhatók, mint a v_2, v_4 és v_8 vektorok lineáris kombinációi:

$$v_1 = v_2 + v_2, \quad v_3 = v_2 + v_4, \quad v_5 = v_4 + v_8, \quad v_6 = v_2 + v_5, \quad v_7 = v_2 + v_8.$$

G párosságvizsgáló mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(A párosságvizsgáló mátrix, akárcsak a generátor-mátrix, nem egyértelműen meghatározott.)

Tegyük fel, hogy a továbbításra kerülő kódszó (1 0 0 1 1), ez két helyen hibásodik meg, és így a hibás (1 1 1 1 1) kódszó jelenik meg.

A párosságvizsgáló mátrix soraira az (1 1 1 1 1) vektor nem ortogonális, mivel

$$1.1 \dotplus 1.1 \dotplus 0.1 \dotplus 1.1 \dotplus 0.1 = 1$$

$$1.1 \dotplus 0.1 \dotplus 1.1 \dotplus 0.1 \dotplus 1.1 = 1$$

ahol $\dotplus$ a mod 2 összeadást jelöli, így az (1 1 1 1 1) vektor nem tartozhat G-hez, vagyis az (1 1 1 1 1) vektor hibás és a hiba jelezhető.

A következőkben a hiba automatikus kijavításának lehetőségét mutatjuk meg.

Egy M generátor-mátrixhoz tartozó G csoportkód akkor és csak akkor képes m hibát kijavítani, ha M tetszőleges $2m$ oszlopa lineárisan független. (Lásd [256], [502].)

Két M_1, M_2 mátrixot *kombinatórikusan ekvivalensnek* nevezünk akkor, ha M_1 sorainak lineáris kombinációjával és oszlopainak permutálásával M_2 előállítható.

Fontosak a következő tételek. Tetszőleges generátor mátrix kombinatórikusan ekvivalens egy N'

$$N' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & p_{11} & \ldots & p_{1,n-k} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & p_{21} & \ldots & p_{2,n-k} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & p_{k1} & \ldots & p_{k,n-k} \end{bmatrix}$$

normál mátrix-szal, vagyis N' minorként tartalmazza a $k \times k$ méretű egység mátrixot. Az egységmátrixnak megfelelő komponenseket *információs jegyeknek*, a többi jegyeket *párosságvizsgáló jegyeknek* nevezzük.

M'' akkor és csakis akkor egy m hibát javító csoportkód párosságvizsgáló mátrixa, ha a következő, G. HOTZ [285] dolgozatában található kritérium teljesül:

1. $w(p_i) \geqq 2m$, ahol p_i $(i = 1, 2, \ldots, n - k)$ M'' mátrix utolsó $n - k$ oszlopvektorát jelöli, és

$$
\begin{aligned}
&2.\ w(p_i + p_r) \geqq 2m - 1 \qquad && i \neq r \quad i, r = 1, 2, \ldots, n - k \\
&\quad\vdots && \\
&w(p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_j}) \geqq 2m - j + 1 && \\
& && i_s \neq i_t \ (s \neq t)\ i_s = 1, 2, \ldots, n - k \\
& && j = \mathrm{Min}\,(n - k, 2m).
\end{aligned}
$$

Az M'' párosságvizsgáló mátrixhoz tartozó G'' csoportkód kódszavai (ezek hosszúsága n) k információs jegyet és $n - k$ párosságvizsgáló jegyet tartalmaznak, mivel az M'' párosságvizsgáló mátrix G'' tetszőleges $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ kódszavára teljesülnie kell a következő egyenletrendszernek:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\ &\dotplus p_{11}\, x_{k+1} \dotplus \ldots \dotplus p_{1,n-k} x_n = 0 \\
x_2 \ &\dotplus p_{21}\, x_{k+1} \dotplus \ldots \dotplus p_{2,n-k} x_n = 0 \\
&\vdots \\
x_k \ &\dotplus p_{k1}\, x_{k+1} \dotplus \ldots \dotplus p_{k,n-k} x_n = 0.
\end{aligned}
$$

A fentiekből következik, hogy az információs jegyek $(x_1 x_2 \ldots x_k)$ tetszőleges választása mellett a párosságvizsgáló jegyek $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ már meghatározottak. A korábban definiált (n, k) kód meghatározását megadhatjuk, mint olyan kódét, amelyben n a kódszavak hossza, és $n - k$ a párosságvizsgáló jegyek száma.

Tetszőleges G n hosszúságú kódszavakból álló csoportkódnak az összes n jegyű bináris számokból (n komponensű vektorokból) álló szám n-eseket tartalmazó V vektortérnek egy V_1 altere felel meg.

Jelölje V^+ V-nek additív struktúráját, vagyis V^+ a 2^n-ed rendű általánosított Klein-féle csoport. Tekintsük V^+-nak V_1^+ szerinti mellékosztályait. Minden egyes mellékosztályt a mellékosztályban levő minimális súlyú vektorral reprezentálhatunk, ezeket a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorokat *mellékosztály-vezetőknek* nevezzük (lásd [542]).

Nyilvánvaló, hogy a mellékosztály-vezetők között szerepel az egységelem (csupa 0 komponensű vektor), legyen ez v_1. Így

$$V^+ = V_1^+ v_1 \cup V_1^+ v_2 \cup \ldots \cup V_1^+ v_k\,.$$

V^+-nak az előbbi felbontását *standard elrendezésnek* nevezzük (lásd [542]).

A standard elrendezés jól felhasználható mint dekódoló tábla, és D. Slepian bebizonyította, hogy a hibátlan dekódolás átlagos valószínűsége egy csoportkódra vonatkozóan akkor a lehető legnagyobb, ha a standard elrendezést használjuk fel dekódoló táblának (lásd [542]).

A már példaként felhasznált kód elemeinek $\{(0\,0\,0\,0\,0), (1\,0\,0\,1\,1), (0\,1\,0\,1\,0), (1\,1\,0\,0\,1), (0\,0\,1\,0\,1), (1\,0\,1\,1\,0), (0\,1\,1\,1\,1), (1\,1\,1\,0\,0)\}$ standard elrendezése a következő:

0 0 0 0 0	1 0 0 1 1	0 1 0 1 0	1 1 0 0 1	0 0 1 0 1	1 0 1 1 0	0 1 1 1 1	1 1 1 0 0
0 0 0 0 1	1 0 0 1 0	0 1 0 1 1	1 1 0 0 0	0 0 1 0 0	1 0 1 1 1	0 1 1 1 0	1 1 1 0 1
0 0 0 1 0	1 0 0 0 1	0 1 0 0 0	1 1 0 1 1	0 0 1 1 1	1 0 1 0 0	0 1 1 0 1	1 1 1 1 0
1 0 0 0 0	0 0 0 1 1	1 1 0 1 0	0 1 0 0 1	1 0 1 0 1	0 0 1 1 0	1 1 1 1 1	0 1 1 0 0.

A standard elrendezéssel kapcsolatosan felmerül a következő probléma: Legyen V^+ az összes, 0, 1-ből álló szám n-esekből álló vektortér additív struktúrája, és V_1^+ ennek egy részstruktúrája, $v_1, v_2, \ldots, v_k$ mellékosztályvezetők, $v_1', v_2', \ldots, v_k'$ tetszőleges V^+-ban levő elemek. Milyen V_1^+ esetén áll fenn a

$$\sum_{i=1}^{k} w(v_i) \leqq \sum_{i=1}^{k} w(v_i')$$

egyenlőtlenség? Az ezen egyenlőtlenségnek eleget tevő altereknek megfelelő kódokat *kvázitökéletes* kódoknak nevezzük. *Tökéletesnek* nevezünk egy kódot akkor, ha megadható egy olyan s pozitív egész szám, melynél az összes s vagy annál kisebb súlyú kódszavak és csak ezek mellékosztályvezetők, vagyis az előző egyenlőtlenség egyenlőségbe megy át.

Annak szükséges feltétele, hogy egy (n, k) kód tökéletes legyen, hogy létezzék olyan $(s \leqq n)$, amelyre fennáll a következő egyenlőség:

$$\sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i} = 2^{n-k}.$$

Nem sikerült eldönteni, hogy a szükséges feltétel egyben elégséges is. Ugyanakkor semmiféle elégséges feltételt sem sikerült megadni, így igen kevés tökéletes kód ismeretes.

Az eddig ismert tökéletes kódok a Hamming-kódok és a Golay által felfedezett (23, 12) kód. A Golay-kód esetében $n = 23$, $k = 12$, $s = 3$ és a szükséges feltétel teljesülését a

$$\binom{23}{0} + \binom{23}{1} + \binom{23}{2} + \binom{23}{3} = 2^{23-12} = 2^{11}$$

azonosság mutatja. Ebben az esetben a szükséges feltétel egyben elégséges is.

Kvázitökéletes kódok a következő (n, k) értékekre ismeretesek: (5, 2), (6, 2), (8, 2), (9, 5), (10, 5), (11, 4), (11, 6), (14, 6), (14, 8), (15, 9), (17, 9), (21, 12), (21, 14), (22, 12), (22, 15), (23, 16), (23, 12), (24, 12), (25, 12).

Egy (n, k) kódot akkor nevezünk egy bináris szimmetrikus csatornára nézve *optimálisnak*, ha a hibavalószínűség nem nagyobb, mint egy tetszőleges hasonló paraméterekkel (n, k értékekkel) rendelkező kódnál.

A tökéletes és kvázitökéletes kódok egyben optimálisak is.

Több szerző vizsgálta egy lineáris kódban a kódszavak súlyának összegét, illetve a kódszavak maximális számát.

Egy (n, k) csoport-kód kódszavai súlyának összege $2^{k-1} n$, egy kódszó minimális súlya legfeljebb $\dfrac{2^{k-1}n}{2^k - 1}$. Ha $B(n, d)$ a lehetséges kódszavak maximális száma olyan n hosszúságú kódszavakból álló csoportkódban, ahol az egységvektort kivéve, a kódszó súlya legalább d, akkor $B(n, d) \leqq 2B(n-1, d)$. Továbbá, ha $n \geqq 2d - 1$, akkor a párosságvizsgáló jegyek száma, amelyek szükségesek ahhoz, hogy minimális d súlyt érjünk el egy n hosszúságú csoportkódban, legalább $2d - 2 - \log_2 d$ kell, hogy legyen. Az ismertetett eredményeknél általánosabb eredmények olyan kódokra is érvényesek, amelyek nem csoportkódok és nem is lineáris kódok; ezek Plotkin-határ néven ismeretesek (lásd [464]). R. R. VARSAMOV és E. N. GILBERT egymástól függetlenül bebizonyította (lásd [587], [201]), hogy lehetséges n hosszúságú és d vagy annál nagyobb minimális Hamming-távolságú csoportkódot konstruálni úgy, hogy a párosságvizsgáló jegyek száma r, ha r a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelyre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{d-2} < 2^r - 1 .$$

Általában tetszőleges q elemű test feletti lineáris kód esetén

$$\binom{n-1}{1}(q-1) + \binom{n-1}{2}(q-1)^2 + \ldots + \binom{n-1}{d-2}(q-1)^{d-2} < q^r - 1 .$$

D. D. JOSHI [310]-ben bebizonyította, hogy tetszőleges kódban a kódszavak maximális száma $N \leq q^{n-d+1}$.

A következőkben néhány lineáris kódtípust ismertetünk.

A lineáris kódoknak egy párosságvizsgáló mátrixszal könnyen leírható osztályát a Hamming-kódok alkotják. A Hamming-kód párosságvizsgáló mátrixa m sort és $2^m - 1$ különböző oszlopot tartalmaz, az oszlopok között a null-vektoron kívül az összes m komponensű bináris vektor pontosan egyszer fordul elő. Így tetszőlegesen választott két különböző oszlopvektor összege nem a null-vektor. A Hamming-kódban a kódszavak hossza $2^m - 1$, ebből m párosságvizsgáló és $2^m - 1 - m$ információs jegy.

A Hamming-kód először a [257] dolgozatban fordul elő. A Hamming-kódok nem bináris általánosítását M. J. E. GOLAY adta meg [215]—[218] dolgozatokban. Hasonló irányú eredmények találhatók [103]-ban.

Ha a továbbításra kerülő kódszó v, és e olyan kódszó, amelyben 1 van a hiba helyén, a többi elem 0, és a vett kódszó $v + e$, akkor — H^T-vel a H mátrix transzponáltját jelölve —

$$(v + e)H^T = vH^T + eH^T = eH^T ,$$

mivel v H-ban van, így $vH^T = 0$, és az eH^T H^T-nek a meghibásodott jegynek megfelelő sorával egyezik meg. Ennek következtében válik lehetségessé a hibajavítás.

Példát mutatunk be a következőkben egy hibát javító kódra.

A kódszavak:

(0 0 0 0 0 0 0), (0 0 0 0 1 1 1), (0 0 1 1 0 0 1),
(0 0 1 1 1 1 0), (0 1 0 1 0 1 0), (0 1 0 1 1 0 1),
(0 1 1 0 0 1 1), (0 1 1 0 1 0 0), (1 0 0 1 0 1 1),
(1 0 0 1 1 0 0), (1 0 1 0 0 1 0), (1 0 1 0 1 0 1),
(1 1 0 0 0 0 1), (1 1 0 0 1 1 0), (1 1 1 1 0 0 0),
(1 1 1 1 1 1 1).

Tetszőleges kódszót jelöljünk $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$-tel, ekkor a párosságellenőrző mátrixnak megfelelő egyenletek:

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 0$$
$$a_2 + a_3 + a_6 + a_7 = 0$$
$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0.$$

Ha pl. az (1 0 1 1 0 1 0) kódszó hibásan (1 0 1 1 0 0 0)-ként érkezik, akkor a párosságvizsgáló egyenletek jobb oldalán álló számok bináris alakban megadják, hogy a hiba hányadik komponensben van, mivel

$$1 \dot{+} 1 \dot{+} 0 \dot{+} 0 = 0$$
$$0 \dot{+} 1 \dot{+} 0 \dot{+} 0 = 1$$
$$1 \dot{+} 0 \dot{+} 0 \dot{+} 0 = 1\,,$$

vagyis 110, azaz a hatodik jegy hibás.

Tetszőleges m és $r < m$ esetén létezik egy olyan (n, k) kód, amelyben

$$n = 2^m\,,$$

$$k = 1 + \binom{m}{1} + \ldots + \binom{m}{r}\,,$$

$$n - k = 1 + \binom{m}{1} + \ldots + \binom{m}{m-r-1}\,,$$

$$d = 2^{m-r}\,.$$

Az ilyen kódot *Reed—Müller-kódnak* nevezzük. Ezt a kódot a [482] és a [414] dolgozatokban vezették be. A Reed—Müller-kódra vonatkozó további eredményeket tartalmaznak a [282], [542], [543], [319], [122] dolgozatok.

Más fontos kódtípusok (MacDonald-kód, Hadamard-mátrixból készült kódok, iterált kódok) leírása megtalálható a [71], [132], [366], [365], [449], [464] dolgozatokban.

A továbbiakban a gyakorlat számára igen fontos ciklikus kódokra mutatunk példát. Az összes n-esekből álló V vektortér egy V' alterét *ciklikusnak* nevezzük, ha $v_1 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ vektor eleme V'-nek, akkor $v_2 = (a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-2})$ is eleme V'-nek. v_1-ből v_2 úgy nyerhető, hogy a komponenseket ciklikusan permutáljuk. Innen származik a ciklikus altér elnevezés. A ciklikus altérnek megfelelő lineáris kódokat ciklikus kódoknak nevezzük.

A polinomok $X^n - 1$ modulus szerint vett A_n algebrájában egy altér akkor és csak akkor ciklikus, ha ideál. Így A_n ideáljainak tulajdonságait figyelembe véve, egyszerű módszer adódik ciklikus kódok szerkesztésére.

Mielőtt a ciklikus kódokra példát adnánk, A_n ideáljainak néhány, a konstrukció szempontjából lényeges tulajdonságát ismertetjük.

Legyen $g(X)$ a legalacsonyabb fokú olyan polinom, hogy $g(X)$ legmagasabb hatványon levő változójának együtthatója 1 és a $g(X)$ által generált $I = \{g(X)\}$ struktúra ideál A_n-ben. Ha $f(X)$ n-nél alacsonyabb fokú polinom, amely osztható $g(X)$-szel, akkor $\{f(X)\}$ I-ben van, és megfordítva, ha $\{f(X)\}$ I-ben van, $f(X)$ osztható $g(X)$-szel.

Így egy ciklikus kód teljesen megadható $X^n - 1$-et osztó $g(X)$ polinommal. Másképpen a kód teljesen megadható úgy, mint az egyetlen

$$h(X) = \frac{(X^n - 1)}{g(X)}$$

polinom által generált ideál nulltere.

A következőkben ciklikus kódok szerkesztésére mutatunk példát.

Tekintsük az

$$1 - X^7 = (1 - X)(1 + X + X^3)(1 + X^2 + X^3)$$

polinomot a $GF(2)$ fölött. Itt a $g(X) = 1 + X^2 + X^3$ polinom segítségével állítunk elő egy (7, 4) ciklikus kódot, amelynek elemei a következő generátormátrix sorainak lineáris kombinációi:

$$\begin{aligned} \{g(X)\} &= (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0) \\ x\{g(X)\} &= (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0) \\ x^2\{g(X)\} &= (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0) \\ x^3\{g(X)\} &= (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1) \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a kód a nulltere a

$$h(X) = (1 - X)(1 + X + X^3) = 1 + X^2 + X^3 + X^4$$

polinom által generált ideálnak. Ennek generátor-mátrixa, M' a következő módon nyerhető:

$$\begin{aligned} \{h(X)\} &= (1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0) \\ x\{h(X)\} &= (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0) \\ x^2\{h(X)\} &= (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1) \end{aligned}$$

ahol $\{h(X)\}$ jelöli a $h(X)$ által generált ideált.

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy M és M' sorai ortogonálisak, és mivel M' oszlopai különböző nem csupa nullát tartalmazó vektorok, az M' által generált kód (7, 4) ciklikus Hamming-kód.

A ciklikus kódok első $n - k$ jegyét, vagyis az $1, x, \ldots, x^{n-k-1}$ együtthatóit szokás párosságvizsgáló jegyként, az utolsó k jegyet, vagyis az x^{n-k}, $x^{n-k+1}, \ldots, x^{n-1}$ elemek együtthatóit információs jegyként felhasználni.

A gyakorlat számára a ciklikus kódok azért jelentenek nagy előnyt, mert generátor-mátrixuk, illetőleg párosságvizsgáló mátrixuk ciklikus, így a teljes mátrix ismeretéhez elég méreteit és egyetlen sorát ismernünk. Műszaki szempontból ez azt jelenti, hogy elegendő a mátrix egyetlen sorát egy léptető regiszterben tárolni, és a kódolás, illetőleg a dekódolás a léptető regiszter segítségével ciklikus eltolással történik.

Bose és Shrikande [60], az ortogonális latin négyzetekre vonatkozó Euler sejtés megcáfolói kapcsolatot mutattak ki az Hadamard-mátrixok és a hibajavító kódok között. Nevezetesen, ha létezik $n \times n$ Hadamard-mátrix, akkor létezik olyan n hosszúságú kódszavakból álló $2n$ kódszót tartalmazó kód, amelynek minimális Hamming-távolsága $n/2$. (Ez a kód nem feltétlenül lineáris.) Így a hibajelző és hibajavító kódok elmélete szempontjából felhasználható K. A. Busch [71]-ben közölt eredménye, amely szerint $n = 4$ esetet kivéve, nincsen olyan $n = 4t^2$ $(t = 2, 3, \ldots)$ Hadamard-mátrix, amely ciklikus.

Nem került tárgyalásra sok érdekes és a gyakorlat szempontjából fontos kód, amelyek kívül esnek a tárgyalt kódtípusokon, mint pl. a nem bináris ([1], [118], [129], [148], [356], [375], [439], [441], [512], [540], [584], [593]), a vesszőmentes ([155], [206], [223], [224], [304], [327], [423], [426]), a többdimenziós ([80]), az equidistans ([47], [336], [337], [417]), a visszajelzett ([110], [109], [367]) kódok. Ugyanakkor a jelen dolgozatban felhasznált matematikai eszközökön kívüli pl. homologikus módszerekkel elért eredményeket (lásd [12]) sem érintettük. A permutációs hibajavításra, mint a terület legújabb irányzatára, csak utalhatunk, mivel az erről szóló előzetes jelentés csak a közelmúltban jelent meg [547]. A szerzők egy külön dolgozat keretében kívánnak az említett problémákra visszatérni. A dolgozat végén levő irodalomjegyzék a dolgozatban tárgyalásra nem került kódtípusokra is nyújt irodalmat.

2. §. A hibajavító kódok elméletének gyakorlati alkalmazásai

A hibajavító kódok egyik alkalmazási területe a mágnesszalagos adattárakkal kapcsolatos. A mágnesszalagos rendszer felől és felé történő megbízható adatátvitel biztosítására különböző ellenőrzési módszereket használnak. A legáltalánosabb módszer a kettős párosság-ellenőrzés. Egy ilyen párosságellenőrző kód elrendezésére és a párosságellenőrző jegyek elhelyezésére mutatunk be példát az alábbiakban. A kereten belül az információs jegyek helyezkednek el, az egyik keret mellett a sorok párosságát ellenőrző jegyek, a keret alján az oszlop párosságát ellenőrző jegyek vannak, végül a párosságellenőrző jegyek oszlopának és sorának metszéspontjánál ezek párosságát ellenőrzik.

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\,.
\end{array}$$

Az ilyen kód egyetlen hiba kijavítására alkalmas [454].

Sok esetben csak longitudinális párosságellenőrzést használnak az egyes blokkokban. (Ez a fenti példa oszlopainak felel meg.) Mindegyik pálya bitjei párosságának ellenőrzésére longitudinális ellenőrző jegyet képeznek és helyeznek el a blokk végén. Egy hiba esetén a hiba a fenti sémának megfelelően ilyen módon kijavítható. Általában azonban több hiba jelentkezik a blokkban, miután a hibák rendszerint szennyeződésből származnak. A legbonyolultabb rendszerek a blokk tartalmából kiszámított több ellenőrző jegyet használnak. Az ilyen rendszerek több egyidejű hiba jelzését és kijavítását teszik lehetővé. Ezek az adatok 12 nagy amerikai gyár által már forgalomba hozott készülékekre vonatkoznak. Ezek között a gyárak között szerepelnek olyan ismert vállalatok, mint a Borroughs, Control Data, IBM, Honeywell, RCA és UNIVAC [14].

Nemrégiben két amerikai vállalat, a General Electric Co. és a Codex Corporation tervezett és hozott forgalomba egyszerű ciklikus vagy rekurrens hibajavító kódoló és visszakódoló berendezéseket. Ezek felhasználási területéről nem találtunk adatot. Bizonyára használják ezeket távközlési célokra, és olyankor, amikor több számológép dolgozik együtt, és adatátvitel történik egyik gépről a másikra.

A Lincoln Laboratóriumban (Massachusetts Institut of Technology) BARTEE szerkesztett kódoló és visszakódoló berendezést. A berendezés alapja a Bose—Chaudhuri—Hocqeunghem-kód. BOSE—CHAUDHURI kódjának leírása megtalálható [57], [58], [59] dolgozatokban, a készülék leírását illetően [23], [24]-ben találhatók adatok. A berendezés a bináris hír 92 jegyéhez 35 ellenőrző jegyet tesz hozzá, úgyhogy a továbbítandó kódszó 127 jegyű. A visszakódoló berendezés ki tud javítani öt vagy ennél kevesebb hibát. A kódoló 35 elemű visszacsatolt léptető regiszterből áll, és egy vezérlő egységből. A visszakódoló 127 elemű léptető regiszterből áll, és egy kis, kb. egy kartotékfiók terjedelmű számológépből. Mindegyik 127 bites blokk először a léptető regiszterbe kerül, majd ciklikusan visszakering 12-szer a kis számológépen keresztül. Az első ciklusban a gép megvizsgálja a blokkot és megállapítja, előfordult-e hiba. A második ciklus alatt kijavítja a készülék a hibás jegyeket, vagy ha a vett blokk nem javítható, tehát a hibák száma az ötöt meghaladja, akkor a gép ennek megfelelően jelzést ad.

A hibás blokk kijavítása a regiszter két ciklusát számításba véve, 1/20 másodpercet igényel. A hibátlan blokk kezelése sokkal gyorsabb. Így a visszakódoló 2500 bináris jegyet tud venni másodpercenként külön puffertárolás nélkül, és még többet, ha van bemeneti puffer-tár.

A dekódoló eljárás általánosítja a különböző hosszúságú Bose—Chaudhuri—Hocquenghem-kódokat. A program csekély változtatásával a gép változtatni tudja az információs jegyek számát a 127 jegynyi hosszúságú blokkon belül, amivel természetesen vele jár az, hogy változik a javítható és jelezhető hibák száma. A készülék diódás-tranzisztoros logikával készült [23]. Hasonló készüléket tervezett MOSS [412].

Az adattárban foltokban (tehát nem elszigetelten, hanem több szomszédos komponenst érintően) jelentkező hibák automatikus kijavítására külön hibajavító egységet terveztek az IBM Ramac 305 számológépben. Itt ciklikus kódot használtak, amely 2%-os redundanciát kívánt meg. A hibajavító egység eredményesen javít minden négy vagy ennél kevesebb jegyre kiterjedő és a legtöbb ötjegyű hibát egy száz jegyet tartalmazó, hibás tárcsán tárolt szóban.

A hibajavítás megkívánja az adatok tárolását a dekódolás tartama alatt. Ezért az olyan számológép, amelyben van puffer-tár a memória és a kimenet között, nagyon megfelel egy olyan rendszer szempontjából, amely hibajavító berendezést is foglal magában. Az IBM Ramac 305 gépben az adatok dobon keresztül jutnak be a gépbe és hagyják el azt. A tárolandó információt a dobról egy puffer-tárba, azután tárcsára viszik át. A kiolvasás fordított sorrendben történik. Egy tárolt hír legfeljebb száz nyolcbites betűből vagy számból állhat. A bitekből hat jut az információra, egy, a „start" bit, az órával való szinkronizálásra szolgál, egy pedig, a párossági jegy, hibajelzésre.

A hibajavító berendezés ciklikus kódot és visszacsatolt léptető regisztert használ.

Ez a gép egyik példája a FIRE [163], ABRAMSON [3] és MELAS [393] által kidolgozott, foltokban jelentkező hibák javítására alkalmas kódok gyakorlati alkalmazásának. Ezek a kódok elég hajlékonyan alkalmazhatók mind a kódszavak hossza, mind azok hibajavító képessége tekintetében. A MEGGITT és PETERSON által javasolt kívitel gazdaságosnak bizonyult.

Egy-egy betű vagy szám kódjánál használt párossági bit (minthogy a kód 8 bites) 12,5%-os redundanciát jelent (a Ramac gépben használt hibajelzésnél). Megbízhatóbb hibajelzést biztosít egy ciklikus hibajelző kód, amely csak 1—2%-nyi redundanciát tesz szükségessé. Egy olyan rendszer, amely kombinált ciklikus hibajelző és hibajavító kódokat használ, ki tud javítani öt bitig terjedő folthibákat, és jelezni képes az összes ki nem javított hibák 99%-át, mindössze 3—4%-os redundanciával [117].

Az európai számológépekben egy régebbi (1961) kimutatás szerint párosságellenőrzést majdnem minden gépben használtak. 24 különböző fajta gép közül csak háromban nem volt semmiféle ellenőrzés, 13-ban volt legalább párosságellenőrzés, egyben volt párosság- és teljes aritmetikai ellenőrzés (Ferranti Perseus), egy gépben használtak minden műveletnél mod 7 ellenőrzést (Bull Gamma 60), egy gépnél (Zuse 231) 5-ből 2-es kódot használtak, két Philips gépnél párosságellenőrzést és az összeadóban való összehasonlítást használtak ellenőrzésül [14].

3. §. Alapáramkörök

Az áramkörök logikai áramköri elemekből, ún. alapáramkörökből építhetők fel. Az ilyen logikai alapáramköröknek két fő típusa: a döntési elemek és a tároló elemek. Döntési elemeknek nevezzük azokat a logikai alapáramköröket, amelyek alkalmasak egyes logikai műveletek (pl. konjunkció, diszjunkció) fizikai megvalósítására, de logikailag figyelembe veendő késleltetésük nincs, tehát „emlékezettel" nem bírnak. Tároló elemeknek nevezzük azokat a logikai alapáramköröket, amelyekben késleltető áramkör is van, amelyek tehát az információt tárolni is képesek.

A nem-kör (inverter, logikai funkcióját tekintve: negátor) a

$$z = \bar{x}$$

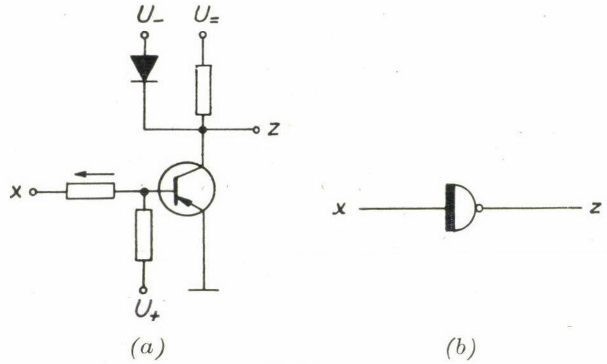
($\bar{x}$ olv.: nem x) logikai műveletet valósítja meg, ahol z a kimeneten megjelenő jel a bemenetre adott x jel esetén. Az elméletben a gerjesztés (ingerlés, állítás) jelölése többnyire $\triangleright$, a gátlás, tagadás jelölése $\circ$. A műszaki gyakorlatban az előbbit általában nem szokás külön jelölni. A továbbiakban, minthogy a kódoláselmélet eredményei különböző fizikai megvalósításokra alkalmasak, általában az elméleti jelöléseket fogjuk használni, amelyek nincsenek tekintettel arra, hogy a megvalósítás milyen fizikai elemekkel történik. Ahol a fizikai megvalósításra is utalunk, többnyire a nálunk is használt, félvezetőkből és ellenállásokból készített elemek jelöléseit használjuk, a hazai műszaki gyakorlatban használt jelölések alapulvételével, szükség esetén céljainknak megfelelő kisebb módosításokkal.

Az 1. és 2. ábrán a tagadást megvalósító logikai áramkörnek egy tranzisztor-diódás, illetőleg ferrit-tranzisztoros kivitelezését mutatjuk be.

Az és-kör vagy és-kapu működését a

$$z = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \cdots \wedge x_n$$

logikai művelet fejezi ki. Ez a logikai művelet az és-művelet (konjunkció), a



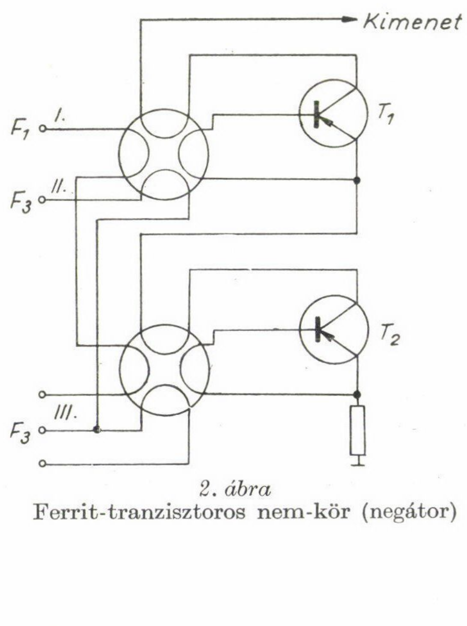
1. ábra

Inverter áramkör (nem-kör) dióda-tranzisztoros megoldása (*a*), és annak logikai kapcsolási rajzokon használt jelképi jelölése (*b*)

logikai szorzás. Művelettábláját (két bemenet esetén) az alábbi táblázat tünteti fel.

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

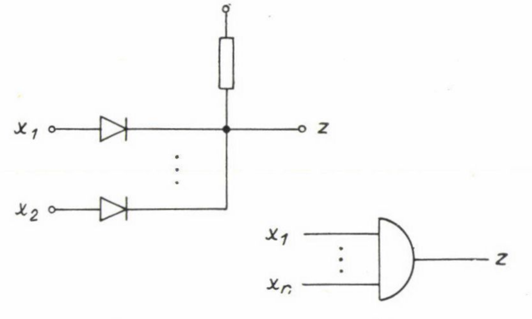
Látható, hogy a logikai szorzás a 0 és 1 elemekből álló halmazon félcsoportot alkot.



2. ábra

Ferrit-tranzisztoros nem-kör (negátor)

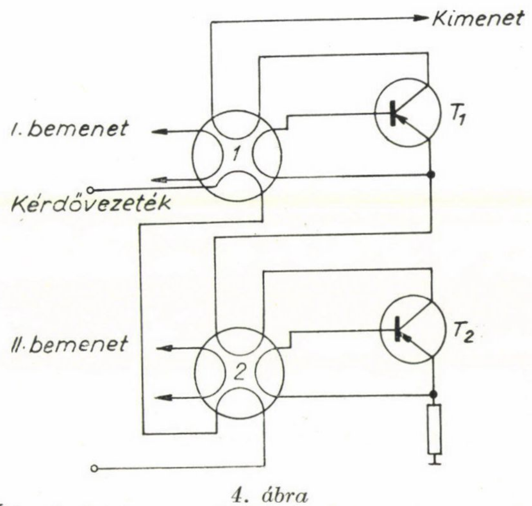
A 3. ábrán az és-kapu diódás megvalósítása és jelképi jelölése, a 4. ábrán ennek ferrites-tranzisztoros megvalósítása, az 5. ábrán a művelet elméleti jelölése látható, amelyet a fizikai megvalósítás módjára tekintet nélkül használunk. Az áramkör kimenetén akkor jelenik meg információ, ha minden egyes bemenetén van információ.



(a) (b)

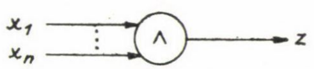
3. ábra

ÉS-kapu diódás áramköri megvalósítása (*a*) és jelképi jelölése (*b*)



4. ábra

ÉS-műveletet megvalósító ferrit-tranzisztoros elem



5. ábra

A logikai ÉS-művelet (konjunkció) elméleti jelképi jelölése

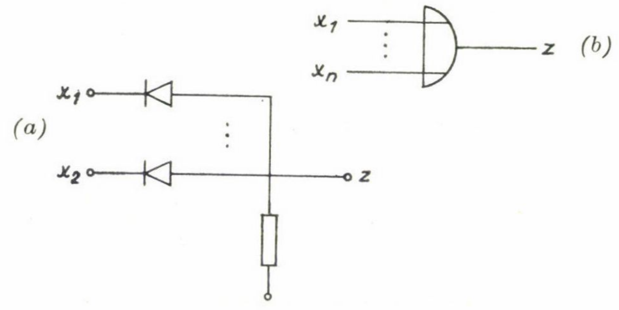
A vagy-kapu a

$$z = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n$$

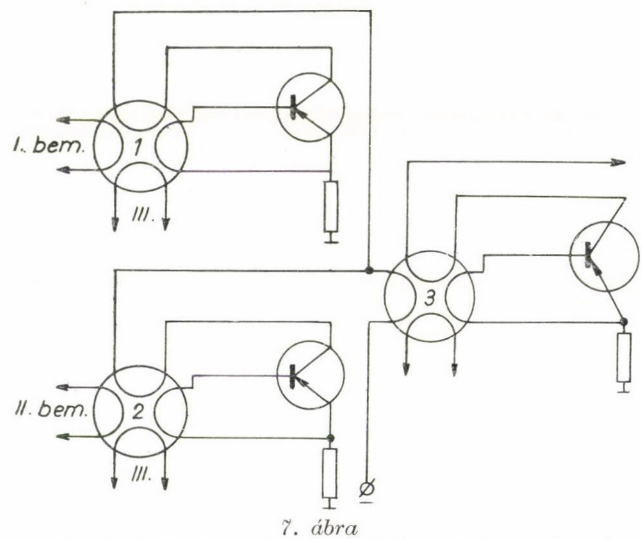
logikai műveletet valósítja meg. Ez a diszjunkció (vagy-művelet, megengedő vagy), a logikai összeadás. Műveletábláját (két bemenet esetén) az alábbi táblázat tünteti fel. A műveletábláből látjuk, hogy

V	0	1
0	0	1
1	1	1

a logikai összeadás is félcsoportot alkot a 0 és 1 elemekből álló halmazon. Az áramkör diódás megvalósítása, valamint jelképi jelölése a 6., ferrites-tranzisztoros megvalósítása a 7. ábrán látható.



6. ábra
VAGY-kapu diódás áramköri megvalósítása (*a*), és ennek jelképi jelölése (*b*)



7. ábra
VAGY-műveletet megvalósító ferrit-tranzisztoros áramkör

És-kapukkal, vagy-kapukkal és nem-körökkel (negátorokkal, jelfordítókkal) minden logikai művelet (függvény) megvalósítható. Gyakran van szükség általában, hibajelző és hibajavító áramkörökben különösen a kizáró diszjunkció (kizáró vagy, antivalencia) logikai műveletét megvalósító áramkörökre. Ezt a műveletet modulo 2 (mod 2) összeadásnak is nevezik, ami átvitel nélküli bináris összeadást jelent. Jelölésére a műszaki gyakorlatban többnyire a $\oplus$ jelet szokás használni, de több más jelölése is használatos. A rajzjeleken mi is ezt a jelölést használjuk, a szövegben azonban a későbbiek során részben technikai okokból, részben a dolgozat elméleti részével (1. §.) összhangban, egyszerűen a $\dot{+}$ jelet.

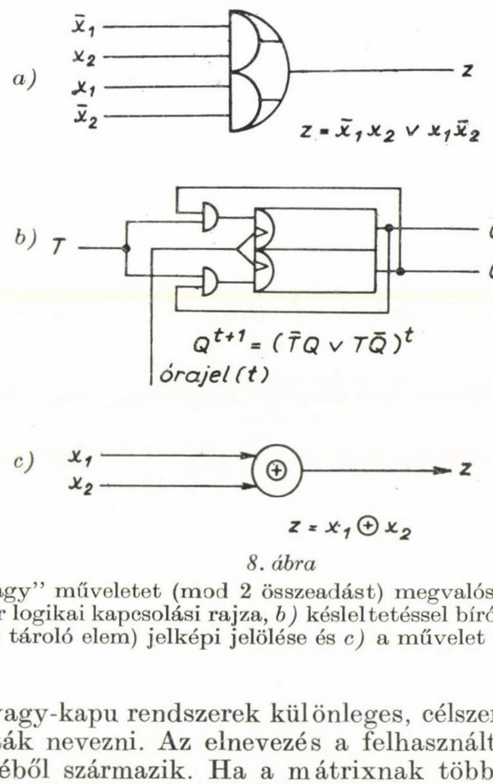
A mod 2 összeadás a

$$z = x_1 \dot{+} x_2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$$

logikai műveletnek felel meg. Művelettáblázata a következő:

$\dot{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0.

A megvalósítás jelképes jelölését a 8. ábrán mutatjuk be.

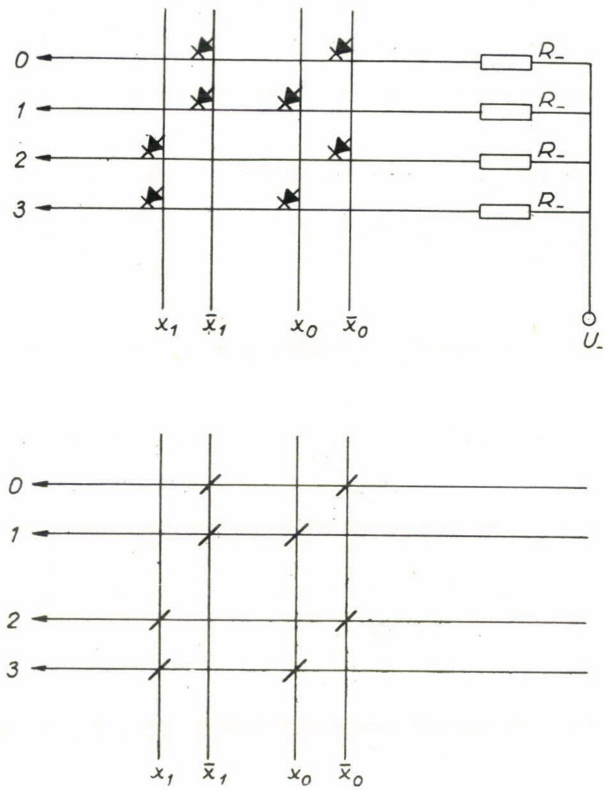


8. ábra

Logikai „kizáró vagy" műveletet (mod 2 összeadást) megvalósító *a)* késleltetés nélküli (variációs) áramkör logikai kapcsolási rajza, *b)* késleltetéssel bíró áramkör (trigger, komplementáló tároló elem) jelképi jelölése és *c)* a művelet elméleti jelölése

Az és- és vagy-kapu rendszerek különleges, célszerű elrendezését logikai mátrixnak szokták nevezni. Az elnevezés a felhasznált döntési elemek rácsszerű elrendezéséből származik. Ha a mátrixnak több bemenete és egy kimenete van, akkor a közönséges és-, illetőleg vagy-kapunak felel meg. Tulajdonképpeni mátrixról akkor beszélünk, ha több bemenet és több kimenet alkotja a rendszert. A logikai mátrixot célszerű úgy megtervezni, hogy a kimeneten a bemenő információknak ne csak a normál („egyes") értékei, hanem negáltjai is rendelkezésre álljanak.

A 9. ábrán egy egyszerű bináris-decimális átalakítót (konvertert) mutatunk be.



9. ábra

Bináris-decimális átalakító megvalósítása dióda-mátrix-szal és annak jelképi jelölése

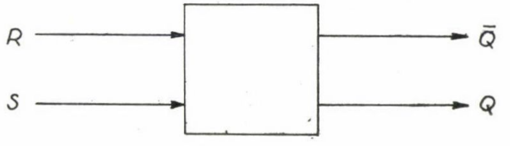
A bemenő információk és azok negáltjai is rendelkezésre állanak. Ez a mátrix valójában négykimenetű, kettes és-kapukból álló kapu-rendszer. Az alábbi táblázatból látható, hogy az áramkör a két bemenő változó négy lehetséges variációjából állítja elő a négy különböző decimális számnak megfelelő információt.

		x_1	
		0	1
x_2	0	0	2
	1	1	3

A fontosabb tároló elemek a következők:

Az S–R flip-flopnak két bemenete és két kimenete van, tehát a következő ,,black box''-szal (l. 4. §.) ábrázolható (10. ábra):

Információt beírni mindig csak az egyik bemeneten lehet, tilos mindkét bemenetre ugyanazt az ,,igaz'' információt adni. Az áramkör teljesen szimmetrikus, tetszőlegesen választhatjuk bármelyik bemenetet beíró, illetőleg törlő bemenetnek. Ha a beíró bemenetet S-sel (set), a törlő bemenetet R-rel (reset), a



10. ábra

tárolt információt, illetőleg a tároló elem normál (1-es) kimenetét Q-val jelöljük, akkor e tároló elem működésének értéktáblázata a következő:

R	S	Q^{t+1}
0	0	Q^t
0	1	1
1	0	0
1	1	—

Itt $t+1$ (mint kitevő) a t időponthoz képest való egy időegységnyi késleltetést fejezi ki. A táblázat utolsó sorában a — jel azt jelenti, hogy ebben az esetben a kimenet értéke bizonytalan, határozatlan. A logikai tervezés során tehát gondoskodni kell annak kizárásáról, hogy mindkét bemenetre egyidejűleg érkezzék 1 jel.

E tároló elem logikai képletei, ún. karakterisztikus egyenletei a fenti értéktáblázat alapján:

$$Q^{t+1} = (S \vee \overline{R}Q)^t$$

$$S \wedge R = 0 .$$

Itt a kitevők — szinkron megoldás esetén — az egy időegységnyi késleltetést fejezik ki.

Ha ennek az elemnek ún. statikus változatát használjuk, ahol a beírás és törlés külön impulzus adása nélkül is bekövetkezhetik, akkor célszerű a tároló elemnek az utolsó információ érkezése előtti tartalmát q-val, ez utáni tartalmát Q-val jelölni, s ez esetben a karakterisztikus egyenlet a következőképpen alakul:

$$Q = S \vee \overline{R}q .$$

Ez esetben, ha nincs változás, $Q = q$.

E tároló elem logikai kapcsolási rajzát 11. ábránk tünteti fel.

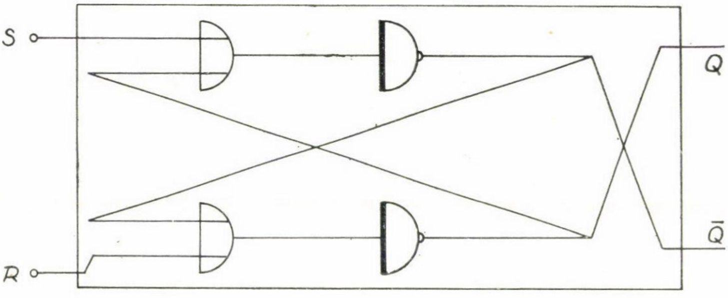
Elméleti szempontból alapvető jelentőségű tároló elem a késleltető. Ennek kimenete a $t+1$ időpontban ugyanaz, mint bemenete volt a t időpontban. Ha a bemenetet D-vel, a kimenetet Q-val jelöljük, akkor e tároló elem karakterisztikus egyenlete a következő:

$$Q^{t+1} = D^t .$$

A triggernek a kimenete megváltozik, ha a bemenetre adunk 1 jelet adunk és változatlan marad, ha nincs bemenő információ. Karakterisztikus egyenlete tehát, ha a bemenetet T-vel jelöljük:

$$Q^{t+1} = (\bar{T}Q \vee T\bar{Q})^t$$

(L. a 8b ábrát.)



11. ábra
Beíró-törlő tároló elem ($S-R$ flip-flop) logikai kapcsolási rajza

Nagyon hasonlít ez utóbbi működéséhez egy másik tároló elem, illetőleg kapcsolás működése. Ennek két bemenete van. Ha egyik bemenetre sem érkezik 1 jel, akkor tárolja a korábban beírt információt, ha mindkettőre érkezik jel, akkor a korábban tárolt információt ellenkezőjére változtatja, ha a beíró bemenetre érkezik jel, beírja az új információt, ha a törlő bemenetre érkezik jel, akkor törli a korábbi információt. Értéktáblázata, ha a bemeneteket, mint szokásos, J-vel és K-val jelöljük:

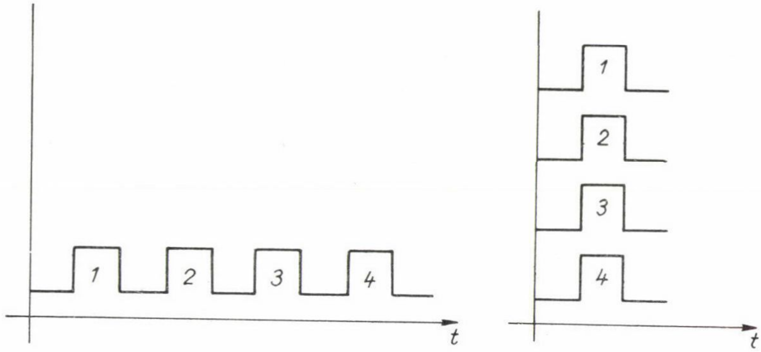
K	J	Q^{t+1}
0	0	Q^t
0	1	1
1	0	0
1	1	$\bar{Q}$

Ez utóbbi tároló elem kapcsolási rajzát és jelképi jelölését nem közöljük. Karakterisztikus egyenlete:

$$Q^{t+1} = (KQ \vee J\bar{Q})^t\,.$$

A tároló elemeket a következőkben általában kis négyzettel fogjuk jelölni, s a kimenet normál és negált (1 és 0) voltát is csak akkor tüntetjük fel külön, ha ez a félreértések elkerülése végett szükséges. Az időzítő jelet (szinkronjelet, órajelet) a rajzszimbólumokon nem tüntetjük fel.

Mint az áramkörök tervezésénél általában, hibajelző és hibajavító áramkörök kialakításánál is alapvető kérdés, hogy az információ soros vagy paralel rendszerben érkezik-e. A két eset közötti különbséget mutatja az alábbi 12. ábra, amely szerint soros esetben az egyes jelek időben eltolva, egymás után, párhuzamos információáramlás esetén egy időben érkeznek az áramkör bemenetére. (L. [21], [61], [102], [291], [386], [461].)



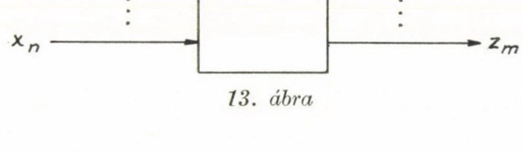
12. ábra
Soros és párhuzamos információáramlás

4. §. Hibajelző és hibajavító áramkörök

A hibajelző és hibajavító kódok felhasználása során különféleképpen lehet olyan áramköröket megtervezni, amelyek e kódok hibajelző és hibajavító tulajdonságainak realizálását lehetővé teszik. A továbbiakban a hibajelző és hibajavító áramkörök néhány megoldását ismertetjük. Természetesen a korlátozott terjedelem miatt csak egy-két főbb megoldástípusra tudunk néhány példát bemutatni. A megoldások főként az algebrai kódoláselmélet gyakorlati felhasználásának bemutatására szorítkoznak, eltekintünk a logikai tervezés részleteinek és az áramkörök célszerű méretezésének ismertetésétől.

A digitális hibajelző és hibajavító áramköröket, mint a digitális áramköröket általában, n bemenetű és m kimenetű ,,black box"-nak foghatjuk fel. A ,,black box" fogalma tulajdonképpen az automata fogalmával egyezik. A black box arra szolgál, hogy jelképesen ábrázoljuk vele azt a rendszert, amelyet éppen vizsgálni kívánunk. Vannak bemenetei vagy bemenő (gerjesztő) változói, amelyeket bemenő állapotoknak is szokás nevezni, vannak kimenetei vagy kimenő változói (kimenő állapotai), amelyeket válaszfüggvényeknek is neveznek, és vannak közbenső változói vagy belső állapotai.

Ennek a modellnek legegyszerűbb esete az, amikor a kimeneti vagy válaszfüggvények közvetlenül és kizárólag a bemenetektől függnek (13. ábra).



13. ábra

Ebben az esetben a bemenetek és a kimenetek közötti összefüggés a következő:

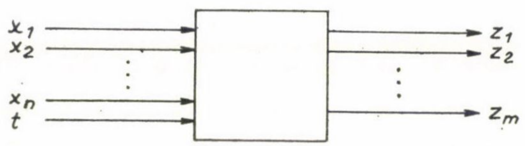
$$z_i = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ahol x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az áramkör bemeneteit, z_i az áramkör kimeneteit jelenti. Az ilyen áramkörök felépíthetők kizárólag ún. döntési elemekből (lásd 3. §.).

Ha az áramkör késleltető elemet is tartalmaz, a kimenetek nemcsak a bemeneteknek, hanem az időjelnek (t) is függvényei:

$$z_i = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) .$$

Digitális rendszerekben általában feltesszük, hogy a t diszkrét értékeket vesz fel, tehát az idő jól megkülönböztethető, diszkrét szakaszokban, lépésekben halad. A rendszer változóit tehát nem mérjük folytonosan, hanem csak azokban a diszkrét időpontokban, amelyekben bizonyos meghatározott esemény beáll. Ez az esemény rendszerint az időzítő jel (szinkronjel, órajel) megjelenése. Az ilyen időpontokat mintavételi időpontoknak nevezzük. Feltesszük, hogy a rendszer viselkedése valamely mintavételi időpontban független a jelenlegi és az előző mintavételi időpont közötti intervallumtól. Az ilyen rendszert szinkron rendszernek nevezzük, s ezt a következő ,,black box" ábrázolja (14. ábra):



14. ábra

Gépről vagy automatáról, a műszaki gyakorlatban szekvenciális áramkörről beszélünk akkor ([212], [389], [409]), ha a ,,black box"-szal ábrázolható rendszert a következő függvénykapcsolat határozza meg. (A szekvenciális áramkört néha többütemű áramkörnek is nevezik, pl. [161], [324] és [539]).

Az

$$f = f(X, Y, Z, g, h)$$

függvényt három: X, Y, Z nem üres halmaz, továbbá két, ezeken a halmazokon értelmezett

$$g = g(x, y)$$

és

$$h = h(x, y)$$

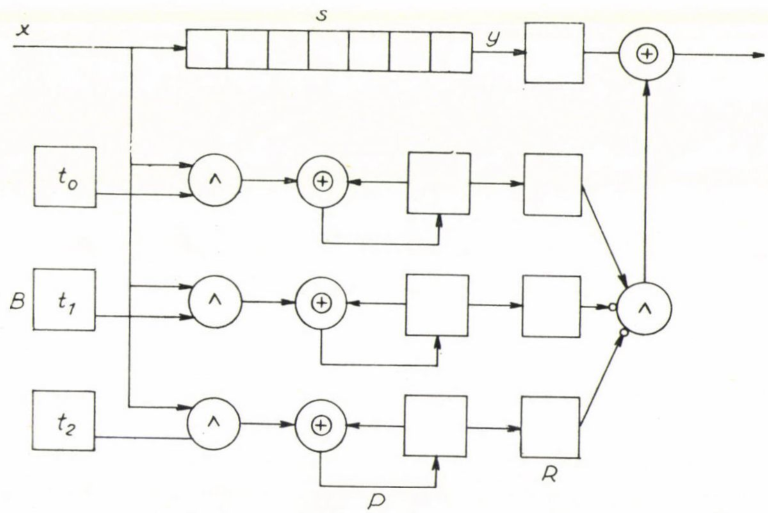
függvény határozza meg. Az X halmazt a gép (automata) bemenőjel halmazának, az Y halmazt a gép állapothalmazának, a Z halmazt pedig az automata kimenőjel halmazának nevezzük. A $g(x, y)$ függvényt, amely az $X \times Y$ halmazt egyértelműen leképezi az Y halmazba, az automata átmenet-függvényének nevezzük. A $h(x, y)$ függvény pedig az $X \times Y$ halmaz egyértelmű leképzése a Z halmazba, és válaszfüggvénynek nevezzük.

A gyakorlatban az automatának rendszerint van egy kitüntetett kezdő állapota, minthogy az automata működése, illetőleg a leképezés során kapott kimenő jelvariációk sorozata más-más lehet, ha az automata más-más állapotból indul ki. Ezért fontos az Y halmaz valamely elemét kezdő (kiinduló) állapotnak tekinteni, illetőleg ilyenként kijelölni.

Az automatáknak több fontos speciális esete van, amelyek tárgyalására itt nem térhetünk ki. Megemlítjük, hogy a műszaki gyakorlatban és a kódoláselméletben mindig csak véges automatákkal dolgoznak.

A digitális hírközlő rendszer is felfogható automataként. Ebben az esetben a hírforrásból származó információ képezi az automata (és egyben annak kezdeti része, a kódoló berendezés) bemenő jeleit, s az automata által szolgáltatott információ játssza az automata (és egyben a dekódoló berendezés) kimenő jeleinek szerepét. Hibátlan működés esetén a kimenő jelsorozat bizonyos időbeli eltolással ugyanaz, mint a bemenő jelsorozat. A közbeeső működést az automata belső állapotai írják le (a ,,közbeeső'' szót mind időbeli, mind térbeli jelentésében értjük). Ez a szemlélet elméletileg ugyan lehetséges, gyakorlatilag azonban nem volna célszerű. Amint általában az automatákat a könnyebb kezelhetőség érdekében kisebb részautomatákra bontják fel, célszerű az ilyen hírközlő rendszert is legalább két automatára felbontani, mégpedig a kódoló és dekódoló automatára. Ezek között helyezkedik el a csatorna, amely a kódoló ,,gép'' kimenetét továbbítja a visszakódoló berendezés vagy automata bemenetére. Természetesen az egyes automatákon, például a kódoló és visszakódoló berendezéseken belül is van hírközlés, információtovábbítás. A kódoló és dekódoló berendezés, mint automata belső állapotainak fizikailag az abban működő regisztereknek, tehát a tároló elemek összességének állapotai (tartalma) felelnek meg.

Annak illusztrálására, hogy Hamming eredeti elgondolása fizikailag hogyan használható fel hibajavításra, bemutatunk egy egyszerű példát. A hibajavító berendezés vázlatos kapcsolási tervét láthatjuk a 15. ábrán.



15. ábra
Hamming-kódot használó soros dekódoló berendezés
B: bináris számláló; *P:* párosságvizsgáló mod 2 összeadó; *R:* visszaszámláló; *S:* léptető regiszter; X_i: a sorosan érkező kódszó jegyei; Y_i: a regiszterből kilépő hibás kódszó jegyei; Z_i: a helyesbített kódszó jegyei

Megemlítjük, hogy ilyen módon a tényleges gyakorlati megvalósítás az algebrai kódoláselmélet mai állása szerint nem volna célszerű, mert — mint látni fogjuk — vannak sokkal egyszerűbb megoldási lehetőségek.

A berendezéshez szükség van egy bináris számlálóra (B), amely előállítja a szükséges párosságvizsgáló mátrixot. A berendezés működését a 686—687 oldalon tárgyalt példán fogjuk bemutatni. A mátrix előállítása, illetőleg a hiba helyének megállapítása egyszerű bináris számlálással és mod 2 összeadással történik. A számláló a legkisebb ($2^0 = 1$) helyértéken az 1., 3., 5. és 7. ütemben, a középső ($2^1 = 2$) helyértéken a 2., 3., 6. és 7. ütemben, a legnagyobb ($2^2 = 4$) helyértéken a 4., 5., 6. és 7. ütemben állít elő 1-et (a 0, 1, . . ., 7 számok bináris alakjának megfelelően).

A 15. ábra szerint a bemenő információ (kódszó) sorosan érkezik (X), és belép egy léptető regiszterbe. Egyidejűleg a bináris számláló megfelelő helyértékeivel és - kapun keresztül döntést végez a gép és megállapítja, hogy a P-ben kell-e tovább számlálnia (ill. mod 2 összeadást végeznie) vagy sem. Tovább kell számlálnia, illetőleg az előző jegyet ellenkezőjére kell változtatnia akkor, ha az X kódszóban 1 érkezik és a B számlálóban levő szám megfelelő helyértékén is 1 áll, nem kell tovább számlálnia, ha 0 érkezik, vagy ha a bináris számláló megfelelő helyértékén 0 áll. Például a B számláló balról 3. oszlopában, tehát a 2^0 helyértéken az első sorban ($B = 001$) 1 áll és a kódszó beérkező X_i jegye is 1, ezek konjunkciója 1, tehát a P 3. (2^0 helyértékű) oszlopában az első sor 0 értéke a 2. sorban 1-re változik. A második sorban a beérkező információ X_i jegye 0, tehát a P tartalma a 2^0 helyértéken nem változik. A 3. sorban a B értéke a 2^0 oszlopban 1, a beérkező kódszó jegye is 1, tehát a P a 2^0 helyértéken 1-ről 0-ra változik. Ebben az oszlopban további változás nem is történik.

A B számláló középső oszlopában, a 2^1 helyértéken levő jegy és az érkező kódszó jegyének és-kapcsolata csak a 3. sorban 1, ezért a P középső, 2^1 helyértékű oszlopának 0 értéke a 3. sorról a 4. sorra 1-re változik. Más változás ebben az oszlopban nem is történik. Végül a B számláló első oszlopában, a 2^2 helyértéken csak a 4. sorban ad az e helyértéken levő jegynek és az érkező X kódszó jegyének és-kapcsolata 1 értéket, tehát a P első (2^2) helyértékű oszlopában a 0 érték az 5. sorban átváltozik 0-ról 1-re. A berendezésnek P-vel jelölt része tehát a sorosan érkező X számhoz előállítja a párosságvizsgáló jegyeket.

E példákból azt látjuk, hogy ha a fentiek szerint a helyértékenkénti konjunkció igaz (1) értéket ad, akkor a P oszloponként képezi, ellenkező esetben tárolja a (korábbi) mod 2 összeget. A P tehát előállítja a párosságvizsgáló egyenleteknek (686. o.) megfelelően azt a bináris számot, amelyik mutatja, hogy a hiba hányadik komponensben van. A bináris számláló (B) a szóköz jelének (000) hatására a következő ütemben a P tartalma átíródik az R visszafelé számlálóba. Ez a számláló úgy van megtervezve, hogy ha egyszer eljutott a 000 állapotba, abban meg is marad. Látjuk tehát, hogy a P számlálóba egy olyan bináris szám kerül be, amely a hiba helyét jelzi. A P-ből ez a szám, példánk esetében 110, íródott át az R számlálóba. Mire a számláló — visszafelé számlálva — eljut a 000 állapotba, a helyes jegynek kell megjelennie a Z kimeneten. Minthogy az automata tiszta soros működésű, a kijavításnak az előző időpillanatban (ütemben) kell megtörténnie, tehát akkor, amikor az R számláló tartalma 001, hogy mire ez 000-ra változik, a Z kimeneten a kódszó helyesbített jegye jelenjék meg. Így kapjuk meg végül a Z kimeneten a helyesbített kódszót, illetőleg sorosan egymás után annak jegyeit. Ha a táblázat P oszlopát, vagyis a párosságvizsgáló számláló működését összehasonlítjuk a 686. oldalon végzett számítással, világosan látható, hogy a gép ugyanazt a műveletet végezte el, amit ott kézzel végeztünk.

Hibajavító berendezés működése

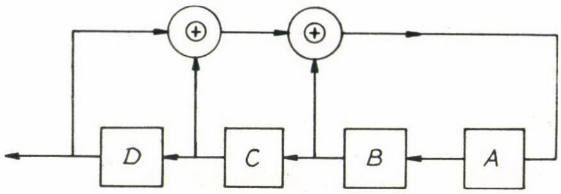
B	X	S	P	R	Y	Z
0 0 1	1	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0			
0 1 0	0	1 0 0 0 0 0 0	0 0 1			
0 1 1	1	0 1 0 0 0 0 0	0 0 1			
1 0 0	1	1 0 1 0 0 0 0	0 1 0			
1 0 1	0	1 1 0 1 0 0 0	1 1 0			
1 1 0	0	0 1 1 0 1 0 0	1 1 0			
1 1 1	0	0 0 1 1 0 1 0	1 1 0			
0 0 0		0 0 0 1 1 0 1	1 1 0	0 0 0		
0 0 1		0 0 0 1 1 0	0 0 0	1 1 0	1	
0 1 0		0 0 0 1 1		1 0 1	0	1
0 1 1		0 0 0 1		1 0 0	1	0
1 0 0		0 0 0		0 1 1	1	1
1 0 1		0 0		0 1 0	0	1
1 1 0		0		0 0 1 →	0	0
1 1 1				0 0 0	0	1
0 0 0				0 0 0		0

B: bináris számláló
X: a kódszó jegyei
S: a léptető regiszter tartalma
P: a párosságvizsgáló összeadó regiszter tartalma
R: a visszaszámláló tartalma
Y: a regiszterből kilépő hibás kódszó jegyei
Z: a helyesbített kódszó jegyei
(A javítás nyilakkal van megjelölve.)

A hibajavító kódok közül az utóbbi években leginkább a ciklikus kódokat tanulmányozták. A kódoknak ez az osztálya magában foglalja a HAMMING-kódokat a már említett GOLAY-féle tökéletes (23,12) kódot, a BOSE és RAY—CHAUDHURI, valamint HOCQUENGHEM által egymástól függetlenül felfedezett kódokat és az ABRAMSON által talált kettős szomszédos hibákat javító kódokat.

Ha a csoportkódban a kódszavak hossza n, a párosságvizsgáló jegyek száma pedig k, a kódolás történhetik vagy k vagy $n - k$ tároló elemből álló léptető regiszterekkel. Az előbbi esetben kezdetben az információ $n - k$ jegyét tároljuk az $n - k$ tároló elemben, azután a regiszter n-szer egymás után lép. A kijövő $n - k$ jegy az információ lesz, a következő k jegy pedig az ellenőrző jegy. Ez utóbbiak az $n-k$ jegyű információt n jegyű teljes kódszóvá egészítik ki.

Például ha $n = 7$ és $k = 3$, akkor a kódolásra a következő léptető regiszter használható (16. ábra):



16. ábra

PETERSON [452] ismertet egy 15 jegyből álló ciklikus hibajavító kódot, s az ahhoz kidolgozott áramkört. A kód 11 információhordozó és 4 párosságvizsgáló jegyet tartalmaz. A négy párosságvizsgáló jegy képzése a következőképpen történik:

$$P_{12} = X_9 \dotplus X_8 \dotplus X_6 \dotplus X_4 \dotplus X_3 \dotplus X_2 \dotplus X_1$$
$$P_{13} = X_{10} \dotplus X_9 \dotplus X_7 \dotplus X_4 \dotplus X_5 \dotplus X_3 \dotplus X_2$$
$$P_{14} = X_{11} \dotplus X_{10} \dotplus X_8 \dotplus X_6 \dotplus X_5 \dotplus X_4 \dotplus X_3$$
$$P_{15} = P_{12} \dotplus X_{11} \dotplus X_9 \dotplus X_7 \dotplus X_6 \dotplus X_5 \dotplus X_4 .$$

Ha pl. a továbbított kódszó a helyek megjelölésével a következő:

i: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

a kódszó jegyei, X_i: 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1

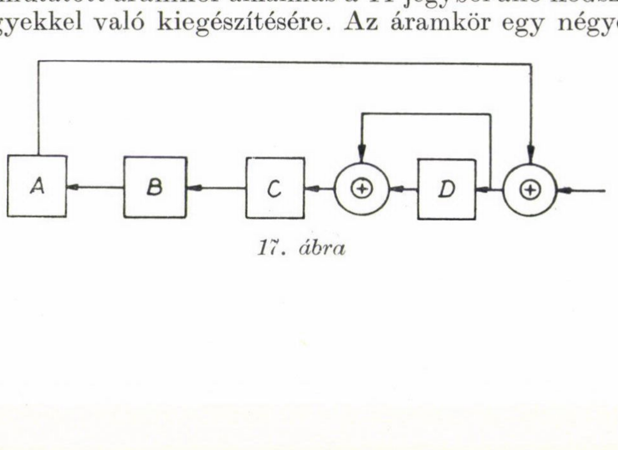
párosságvizsgáló jegyek :

$$P_{12} = 1 \dotplus 1 \dotplus 0 \dotplus 1 \dotplus 0 \dotplus 0 \dotplus 1 = 0$$
$$P_{13} = 1 \dotplus 0 \dotplus 1 \dotplus 0 \dotplus 1 \dotplus 1 \dotplus 1 = 1$$
$$P_{14} = 0 \dotplus 1 \dotplus 0 \dotplus 0 \dotplus 0 \dotplus 1 \dotplus 1 = 1$$
$$P_{15} = 1 \dotplus 0 \dotplus 0 \dotplus 1 \dotplus 1 \dotplus 1 \dotplus 0 = 0 .$$

A párosságvizsgáló jegyekkel kiegészített kódszó tehát a következő lesz:

1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 .

A 17. ábrán bemutatott áramkör alkalmas a 11 jegyből álló kódszónak a párosságvizsgáló jegyekkel való kiegészítésére. Az áramkör egy négyelemű léptető



17. ábra

regiszterből és két mod 2 összeadóból áll. A regiszter működését könnyen áttekinthetjük az alábbi táblázat segítségével. A táblázat utolsó sorában, amikor már minden információs jegy beadása megtörtént, a regiszter a P_{12}, P_{13}, P_{14} és P_{15} párosságvizsgáló jegyeket tárolja.

Időpont	Regiszter-elemek tartalma				Bemenő információ
i	A	B	C	D	X_i
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	0	0
5	1	0	0	0	0
6	0	0	1	1	1
7	0	1	0	1	0
8	1	0	1	0	1
9	0	1	0	0	1
10	1	0	1	1	1
11	0	1	1	0	

Tegyük fel, hogy a továbbított kódszó helyett a következő kódszót vette a berendezés:

$$1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1.$$

Hibás tehát a balról 6. jegy. Ha megnézzük a P_i értékek kiszámítására szolgáló képleteket (686. oldal), azt látjuk, hogy a 6. jegy a P_{12}, P_{14} és P_{15} értékek kiszámításánál szerepelt, megváltozása tehát ezeknek az értékeknek a párosságát változtatta meg. Hogy a hiba helyét egyértelműen megállapíthassuk, a dekódolás végén ezt az értéket kell megkapnunk.

Dekódoláskor mind a 15 jegyet beléptetjük a regiszterbe. Ha a vett hír eleget tesz az ellenőrző (párosságvizsgáló) egyenleteknek (és csak akkor), a négy tároló elem mind 0-kat fog tartalmazni a hír 15. jegyének belépése után. Ha az ellenőrzés azt jelzi, hogy hiba fordult elő, és ha a hiba egyedülálló hiba, a regisztert tovább léptetjük mindaddig, míg tartalma 1000 nem lesz. A hibás jegyek száma eggyel nagyobb, mint azoknak a lépéseknek a száma, amelyek szükségesek ahhoz, hogy a jegyeknek ezt a sorozatát megkapjuk.

A léptető regiszter működését a fentemlített hibás kódszó vétele esetén a 706. oldalon szereplő táblázat tünteti fel. Amikor a regiszter tartalma 1101, akkor még ötöt léptetünk, 0-kat adva be a bemeneten. A betárolt 0-k száma 5, a hibás jegyeggyel nagyobb, az az a 6. jegy. Ez és a hibajavítás módja az előbbiekből világos.

Az algebrai kódoláselmélet az áramkörtervezésben akkor is igen előnyösen használható fel, ha nem akarjuk a kódolást hibajavításra vagy hibajelzésre felhasználni. Ezt az esetet úgy foghatjuk fel, hogy ilyenkor a javítani vagy jelezni kívánt hibák száma 0. Az elmélet ilyen esetekre való felhasználásának példájaként megemlítjük a léptető számlálókat ([165], [628]).

A bináris léptető regisztereknek számlálóként való felhasználásával kapcsolatban felmerült az a probléma, hogyan lehet a regiszterek ún. belső állapotait a logika egyszerűsége mellett a legjobban kihasználni. A kérdés az, hogy n számú regiszter-elemből lehet-e az első tároló elemnél alkalmazott

A léptető regiszter működése dekódolásnál

Időpont	A regiszter-elemek tartalma				Bemenő inf.
i	A	B	C	D	X_i
1	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	0	0
6	1	0	0	0	1
7	0	0	0	0	1
8	0	0	1	1	0
9	0	1	1	0	1
10	1	1	1	1	1
11	1	1	1	0	1
12	1	1	0	0	0
13	1	0	1	1	1
14	0	1	1	0	1
15	1	1	0	1	0
15 + 1	1	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0
5	1	0	0	0	0

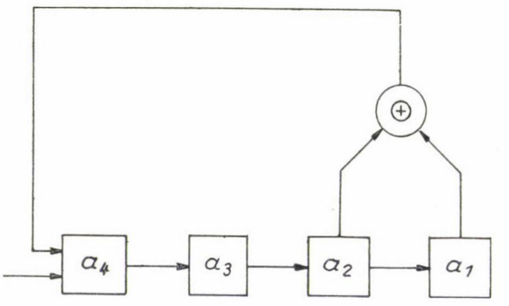
egyszerű logikai áramkörrel elérni azt, hogy egyébként pusztán léptetéssel megkapjuk mind a 2^n lehetséges állapotot? (Nem bináris számlálásról van szó!) A kérdés $2^n - 1$ állapot esetére könnyen megoldható, bár a logika nem lesz mindig egészen egyszerű. Például négy tároló elem felhasználása esetén, ha a_4-gyel jelöljük a regiszter kezdő elemét, akkor – ha megelégszünk 15 állapottal – ezeket mind előállíthatjuk a következő képlet alapján:

$$a_4 := a_1 \dotplus a_2 .$$

(a_4 felveszi a_1 és a_2 mod 2 összegének értékét.)
Ha 16-ig akarunk számlálni, tehát az összes lehetséges állapotra szükségünk van, akkor a képlet a következő:

$$a_4 := a_1 \dotplus a_2 \dotplus \bar{a}_1\bar{a}_3\bar{a}_4 .$$

Ezeknek a számlálóknak a jelképes ábrázolását a 18. és a 19. ábrán mutatjuk be.



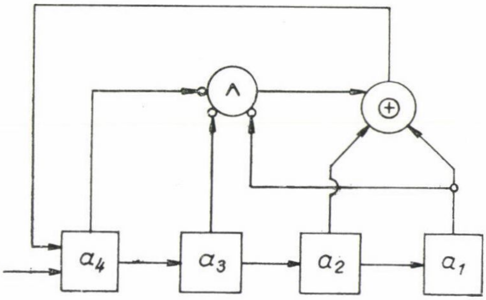
18. ábra
Négy tároló elemből álló 15 állapotú léptető számláló

Ha $n = 8$, a $2^8 - 1 = 255$ állapotú számláló képlete:

$$a_8: = a_1 \dotplus a_2 \dotplus a_4 \dotplus a_6 \,,$$

a 256 állapotú számlálóé pedig:

$$a_8: = a_1 \dotplus a_2 \dotplus a_4 \dotplus a_6 \dotplus \bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\bar{a}_5\bar{a}_6\bar{a}_7\bar{a}_8 \,.$$



19. ábra
Négy tároló elemből álló 16 állapotú léptető számláló

A módszernek igen jelentős előnye az, hogy a számítás a MARSH-féle [378], vagy a PETERSON könyvében közölt [452] táblázatok felhasználásával rendkívül gyors és így a tervezés kényelmes és igen kevés munkát kíván.

A hibajavító kódok elmélete kezdetben arra törekedett, hogy elszigetelt egyes hibák kijavítását tegye lehetővé. A hírcsatornákban azonban a zaj általában nem elszigetelten, digitális információátvitel esetén nem egy-egy jegyre korlátozottan, hanem általában foltokban jelentkezik. Ezért később ennek megfelelően olyan kódok szerkesztésére törekedtek, amelyek nemcsak elszigetelten, hanem foltokban jelentkező hibák kijavítására is alkalmasak.

Most egyszerű példát mutatunk be egy ilyenfajta kódra. Minden kódszóban $n - k$ információt hordozó jegy és k párosságvizsgáló jegy van, és minden kódszó vételekor megtörténik a hibajavítás. Példánkban $n = 7$. Egy ABRAMSON-féle kódot [3] fogunk bemutatni, amely egy elszigetelt és két szomszédos hiba kijavítására alkalmas.

A hír továbbítása sorosan történik. Ha a kód jegyeit a_i-vel jelöljük, a_1-gyel indulunk. Az utolsó k (példánk esetében $k = 4$) jegy a párosságvizsgáló jegy és ezek képletei az elmélet szerint ([320], [390], [391], [392], [452]):

$$a_i = a_{i-3} \dotplus a_{i-2} \qquad (i = 4, 5, 6, 7.)$$

Ez az egyszerű rekurzív összefüggés módot ad a kódoló és dekódoló berendezés egyszerű megoldására. A soros átvitel ugyan hosszabb műveleti időt kíván meg, de jelentős megtakarítást tesz lehetővé a szükséges berendezésekben bizonyos feltételek teljesülése esetén. Ezek a feltételek a következők:

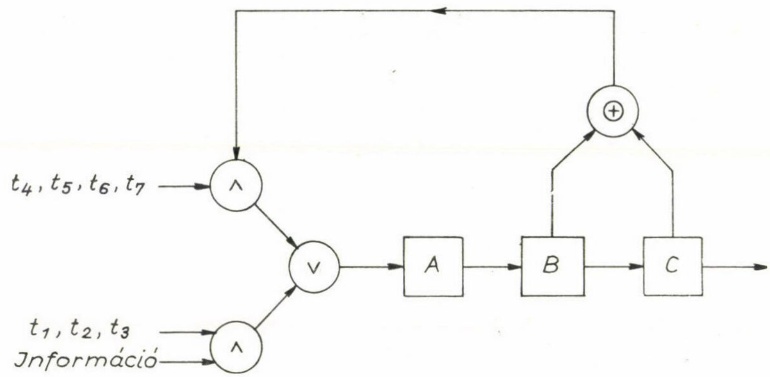
a) a végrehajtandó műveletek iteratív jellegűek, vagyis lényegében ugyanazt a műveletet kell végrehajtani a szónak egymás után következő információs jegyein,

b) a művelet egyirányú, vagyis az egyes digitális jegyek közti logikai függőség csak az egyik irányban terjed, vagy előre, vagy hátrafelé a szón belül.

Példánk esetében ezek a feltételek fennállnak. Megemlítjük, hogy a feltételek fennállása paralel megoldások esetén is előnyt jelent a gyakorlati megoldás szempontjából, ha iteratív áramköröket használunk a megvalósításhoz.

A fenti rekurzív összefüggés lényege az, hogy mindegyik egyenlet a korábbival azonos alakú, és mindegyik párosságvizsgáló jegyet a korábbi jegyek határozzák meg. Ez általános tulajdonsága az ABRAMSON, MELAS és FIRE által kidolgozott kódoknak ([2] – [4], [163], [393] – [397]).

A rekurzív összefüggésnek megfelelő kódoló berendezés rajzát láthatjuk a 20. ábrán.



20. ábra
Kódoló berendezés egy elszigetelt és két szomszédos hibát javító kódhoz

A léptető regiszter a t_0 időpontban üres, mindegyik tároló elemének tartalma 0. A t_1, t_2, t_3 időpontokban a regiszter feltöltődik az információval. A t_4, t_5, t_6 és t_7 időpontokban megtörténik a mod 2 összeadás és a mod 2 összeg visszakering a regiszterbe, míg minden párosságvizsgáló jegyet meg nem kaptunk.

Hogy az ábrán bemutatott kódoló működését világosabban áttekinthessük, az alábbi táblázatban feltüntetjük a berendezés működését. A táblázat alapján azt kapjuk, hogy ha a kódolandó információ 101, akkor kódolás után a következő kódszót kapjuk: 0 0 1 1 1 0 1.

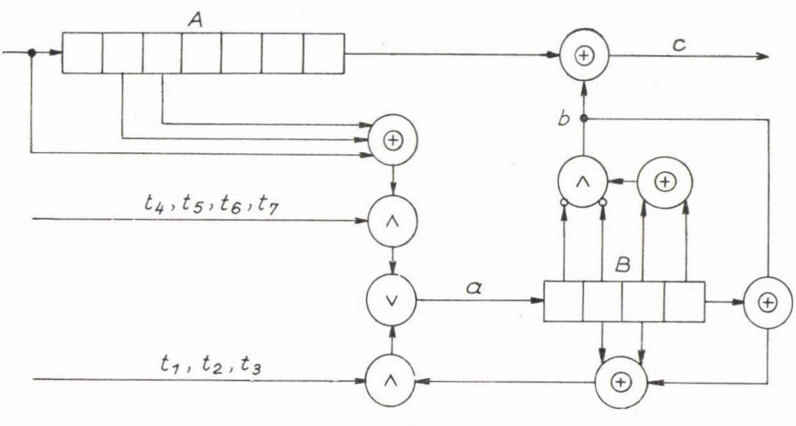
A 20. ábra kódoló berendezésének működése

Időpont	A regiszter egyes tároló elemeinek tartalma			Kimenet és a kimeneten sorosan már megjelent információ			
	A	B	C				
t_0	0	0	0				
t_1	a_1	0	0				
t_2	a_2	a_1	0				
t_3	a_3	a_2	a_1				
t_4	$a_4 = a_1 + a_2$	a_3	a_2	a_1			
t_5	$a_5 = a_2 + a_3$	a_4	a_3	a_2	a_1		
t_6	$a_6 = a_3 + a_4$	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	
t_7	$a_7 = a_4 + a_5$	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1

Az előbbi kódoló berendezésnek megfelelő dekódoló berendezést látunk a következő 21. ábrán.

A dekódolónak először ki kell számítania a hibavektort:

$$\mathbf{z}_i = a_i \dotplus a_{i+1} \dotplus a_{i+3} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$



21. ábra

A $\mathbf{z}_i$ értékek jelzik a hiba helyét. A vett hír az A léptető regiszterbe jut. Egy mod 2 összeadó kiszámítja a $\mathbf{z}_i$ összegeket a t_4, t_5, t_6 és t_7 időpontokban, és ezek bekerülnek a B léptető regiszterbe. A teljes kódvektort (kódszót) tartalmazó A regiszterben, mire a B regiszter megtelik a $\mathbf{z}_i$ értékekkel, a párosságvizsgáló jegyekkel kiegészített kódszó jelenik meg. Ez után a B regiszter tartalma folyton változik, a következő három időpillanatban az információ elhagyja az A regisztert. Amikor az ábrán a B regiszter feletti variációs áramkör a B regiszterben a 0001 vagy 0010 beérkezését észleli, 1 kimenetet ad. Ennek következtében az A regiszter kimenete után kapcsolt mod 2 összeadó az esetleg hibás információs jegyet kijavítja, úgyhogy a kimeneten megjelenik a helyesbített kódszó.

A 21. ábra dekódoló berendezésének működése

Időpont	Az A regiszter egyes tároló elemeinek tartalma	A B regiszter tartalma	Az ábra a b c pontján megjelenő inf.	A kimeneten sorosan már megjelent jegyek
t_1	1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0	
t_2	1 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0	
t_3	0 1 1 0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0	
t_4	1 0 1 1 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0	
t_5	1 1 0 1 1 0 0	0 1 0 0	1 0 0	
t_6	0 1 1 0 1 1 0	1 0 1 0	0 0 0	
t_7	0 0 1 1 0 1 1	0 1 0 1	1 0 1	
t_8	0 0 0 1 1 0 1	0 0 1 0	0 1 0	1
t_9	0 0 0 0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 1	0 1
t_{10}	0 0 0 0 0 1 1	0 0 0 0	0 0 0	1 0 1

A fentieket szemlélteti a visszakódoló működését bemutató előző táblázat. Az eredeti információ 101 volt. Ennek kódolt alakja (lásd a kódoló előző példáját) 0011101. A vett információ a következő: 0011011, tehát jobbról a 2. és 3. jegy ellenkezőjére változott. (A kódszavak jegyeinek időbeli egymásutánja jobbról balra értendő.) A táblázatban a vett kódszót az *A* regiszter balról első tároló eleme, tehát az *A* regiszter első elemének oszlopa foglalja magában.

Dolgoztak ki hibajelző és hibajavító kódokat az aritmetikai műveleteket végző egységekben való felhasználás céljára. Ilyen célra szolgál a Brown [64] által kidolgozott, egyetlen hiba javítására alkalmas kód.

Számos a dolgozatban nem szereplő eredmény megtalálható az irodalomjegyzékben szereplő munkákban.

(Beérkezett: 1964. december 9.)

IRODALOM

[1] Abraham, J.—Driml, M.: „O jednom problemu z theorie kodovani." *Časopis Pest. Mat.* **81** 69—76 (1956).

[2] Abramson, N. M.: *Application of Comparison of Experiments to Radar Detection and Coding Problems*. Stanford University, Standford Elektronics Labs. Technical. Report No. 41. Astia Ad 201 444 (July 28. 1958).

[3] Abramson, N. M.: „A Class of Systematic Codes for Non-Independent Errors." IRE Trans. IT 150-157 (1959).

[4] Abramson, N. M.: „Error Correcting Codes from Linear Sequential Networks." *Proc* 4^{th} *London Symp. on Information Theory* C. Cherry Ed., Butterworths, Washington, D. C. (1961).

[5] Abramson, N. M.: „A Note on Single Error Correcting Binary Codes." *IRE Trans. IT*—6. 502—503 (1960).

[6] Abramson, N. M., Elspas, B.: Double Error Correction Encoders and Decoders for Non-Independent Binary Errors. Bemutatva: Unesco Information Processing Conference in Paris (1959.).

[7] Alexander, A. A.—Gryb, R. N.—Nast, D. W.: „Capabilities of the Telephone Network for Data Transmission." *Bell. Syst. Techn. J.* **39** 431—476 (May, 1960).

[8] Annotated Bibliography on Error Correcting Codes. Parke Mathematical Laboratories, Inc., Bedford Road, Carlisle, Mass. 1961.

[9] Armour Research Foundation: Error Detection and Correction. Rad. TR-58—20 Astia AD 148—597 (Dec, 1957).

[10] Armstrong, D. B.: „A General Method of Applying Error Correction to Synchronous Digital Systems." *Bell. Syst. Techn. J.* **40** 577—594 (March, 1961).

[11] Assmus, E. F.—Mattson, H. F.: „On Determining the Weight-Distribution in Cyclic Codes of Prime Block Length." Appl. Res. Lab., Sylvania Electric Products, Inc. Engrg. Note No. 253.

[12] Assmus, E. F.—Mattson, H. F.: „Error-Correcting Codes: An Axiomatic Approach." Sylvania Electric Systems, Waltham Mass., Arm. No. 269. *Information and Control* **6**. 315—330 (1963).

[13] Auerbach, A. A.: „Checking Features of the Elecom 120. „Assoc. for Computing Machinery, Ann Arbor Meeting (Jun 23—25, 1954).

[14] Auerbach, J. L.: „European Information Technology." *Bull. of the Provisional International Comp. Centre*, No 13. 11—51. (1961.).

[15] Balser, M.—Silvermann, R. A.: „Coding for Constant Data Rate System Part I, A New Error Correcting Code." *Proc. IRE*, 1428—1435. (1954).

[16] Balser, M.: „Coding for Constant Data Rate Systems Part II, Multiple Error Correcting Codes." *Proc. IRE*, **43** 728—733 (1955).

[17] Bambah, R. P.—Joshi, D. D.—Luthar, I. S.: „Some Lower Bounds on the Number of Code Points in a Minimum Distance Binary Code." *Information and Control* **4** 313—325 (1961).

[18] Banerji, R. B.: „On Constructing Group Codes." *Information and Control* 4, 1—14. (1961).

[19] Banerji, R. B.: „Decoding Procedure for Double-Error-Correcting Bose-Ray Chaudhuri Codes." *Proc. IRE*. **49** 1585 (Okt, 1961).

[20] BANERJI, R. B.: „A Systematic Method for the Construction of Error Correcting Group Codes." Inf. and Control.

[21] BARBEAU, R. A.: „Error Checking for 5 Channel Telegraphic Tape". *Commn. and Electronics* **36** 190—193 (May, 1958).

[22] BARTEE, Th. C., LEBOW, I. L., REED, I. S.: *Theory and Design of Digital Machines.* McGraw Hill Book Co., Inc., New York. 1961.

[23] BARTEE, Th. C., SCHNEIDER, D. I.: An Electronic Decoder for Bose-Chaudhuri—Hocquenghem Error Correcting Codes. Lincoln Laboratory, Mass. Institute of Technology.

[24] BARTEE, Th. C.—SCHNEIDER, D. I.: „An Electric Decoder for Bose-Chaudhuri-Hocquenghem codes." *IRE Trans. on Information Theory, IT*-**8** 17—24 (Sept, 1962).

[25] BAYARD, M.: „A Note on the Arithmetical Specification of Messages and the Use of this Concept for the Determination of Corrective Networks." *Proceedings of the Symposium on Information Networks,* New York. 131—144 (Apr. 1954).

[26] BELL, D. A.: „Ideal Coding Versus Redundancy". *Wire Eng.,* **30** 73—74 (1953).

[27] BELL, D. A., DUGGAN, T. C.: „Finite Groups in Shannon Coding." *Proc. IRE* **42** (1954).

[28] BELL, D. A.: *Information Theory and its Engineering Application.* Pittman Publ. Co. New York, 1962.

[29] BELLMANN, R. and GLOSS, B.: „On Various Versions of the Defective Coin Problem." Inf. and Control 4. 118—131, (Sept, 1961).

[30] BENNETT, R. K.: „Some Aspects of Digital Coding." *S. M. E. E. Thesis, M. I. T.* (1951).

[31] BENNETT, W. R. and FROEHLICH, F. E.: *Effectiveness of Error Control Procedures in Digital Data Transmission.* Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, N. J.

[32] BERGER, J. M.: „A Note on Error Detection Codes for Assymetric Channels." *Inf. and Control* **4** 68—73 (March, 1961).

[33] BERGER, J. M.: *A Note on Burst Error Detecting sum Codes.* Technical Memorandum 17-038. IBM Advanced Systems Division, (Jun. 29, 1961).

[34—35] BERGER, J. M.: „A Note on Burst Error Detecting Sum Codes." *Information and Control* **4** 297—299 (Sept. 1961).

[36] BERLEKAMP, E. R.: „A Class of Convolution Codes." *Information and Control* **6** 1—13 (March, 1963).

[37] BERLEKAMP, E. R.: *Block Coding with Noiseless Feedback.* Ph. D. Thesis, M. I. T. (1964).

[38] BERLEKAMP, E. R.: „Note on Recurrent Codes." *IRE. Trans. IT* **10** 257—258 (Jul, 1964).

[39] BERNSTEIN, A. J.—KIM, W. H.: „Linear Codes for Single Error Correction in Symmetric and Assymetric Computational Processes." *IRE Trans. on Information Theory IT*-**8** 29—34 (Jan, 1962).

[40] BERNSTEIN, A. J.—KIM, W. H.: „Single and Double Adjacent Error Correcting Codes in Arithmetic Units." Trans. *IEEE* 209—210 (1963).

[41] BIRDSALL, T. G.—RISTENBATT, M. P.: *Introduction to Linear Shift Register Generated Sequences.* EDG Technical Report No. 90. Univ. of Michigan Eng. Res. Inst. (1958).

[42] BISHOP and BUCHANAN: „Message Redundancy VS Feedback for Reducing Message Uncertainty". *IRE Convention Record* 3—10 (1957. 2. rész).

[43] BLACHMANN, N. M.: „Minimum Cost Encoding of Information." *IRE Trans, IT* — **3**, 139—149 (March, 1954).

[44] BLACHMANN, N. M.: „On the Capacity of a Band Limited Channel Perturbed by Statistically Dependent Interference." *IRE Trans., IT*-**8** 48 (Jan, 1962).

[45] BLOCH, R. M.: „Philosophy of Automatic Error Correction." *Proc. E. J. C. C.,* (Dec, 1958).

[46] BLOOM, F. J., CHANG, S. S. L., HARRIS, B., HAUPTSCHEIN, A., MORGAN, K. C.: „Improvement of Binary Transmission by Null — Zone Reception" *Proc. I. R. E.* **45** 963—975 (1957).

[47] BLUM, R. A., WEISS, A. D.: *Further Results in Error Correcting Codes.* M. Thesis, Department of Electrical Engineering, M. I. T. (May, 1960).

[48] БОРОДИН, Л. Ф.: „Эквидистантные и другие оптимальные и близкие к оптимальным коды." Радиотехника и электроника **5** No.6. 883—893 (1960) oroszul, *Radio Eng. and Electronics* **5** 1—16 (1961) angolul.

[49] Borodin, L. F.: „On the Theory of Corrective Codes with a Simple Base." „*Automation Express.* **1** 5. 22—26 (Jan. 1959). Radiotekhnika i Elektronika, i 22—26 (Jan—Marc, 1958).

[50] Borodin, L. F.: „On a Certain Regular Method for Formulating Corrective Codes." *Automation Express.* **1** NO. 5. (Jan. 1959) Radiotekhnika i Elektronika 1 54—57 (Jan, March, 1958).

[51] Bose, R. C.: *On Some Connections Between the Design of Experiments and Information Theory.* Case Institute of Technology, Statistical Laboratory, Report 1022 (Febr. 1960).

[52] Bose, R. C.: „Some Ternary Error Correcting Codes and the Corresponding Fractionally Replicated Designs." Afosr Report Under Contract NO. AF49 (638) 213. közli a *Proceedings of Colloque International de C. N. R. S. sur les Plans d'Experiences,* Paris, 1961.

[53] Bose, R. C.: „On some Connections Between the Design of Experiments and Information Theory." Afosr Report AF49/638/213. Megjelenés alatt a „*Bulletin de l'Institute International de Statistique*"-ben.

[54] Bose, R. C., Chakravarti, I. M.: „A Coding Problem Arising in the Transmission of Numerical Data." Afosr Report AF49/638/213. Megjelenés alatt a „*Bulletin de l'Institute International de Statistique*"-ben.

[55] Bose, R. C., Kuebler, R. R.: *On the Construction of a Class of Error Correcting Binary Signalling Codes.* Institute of Statistics, Univ. of North Carolina, Mimeograph Series, NO. 199.

[56] Bose, R. C., Kuebler, R. R.: A Geometry of Binary Sequences Associated with Group Alphabets in Information Theory. *Ann. Math. Statist.* **31** 113—139 (1960).

[57] Bose, R. C., Ray, D. K., Chaudhuri: *On a Class of Error Correcting Binary Group Codes.* Institut of Statistics of North Carolina, Mimeograph Series No. 240 (1959).

[58] Bose, R. C., Ray, D. K., Chaudhuri: „On a Class of Error Correcting Binary Group Codes." *Information and Control* **3** 68—79 (1960).

[59] Bose, R. C., Ray, D. K., Chaudhuri: „Further Results on Error Correcting Binary Group Codes." *Information and Control* **3** 279—290 (1960).

[60] Bose, R. C., Shrikhande, S. S.: „A Note on a Result in the Theory of Code Construction." *Information and Control* **2** 183—194 (1959).

[61] Braun, E. L.: *Digital Computer Design.* Logic, Circuitry, and Synthesis. Academic Press, 1963. New York and London.

[62] Brillouin, L.: „Information Theory and most Efficient Codings for Communication or Memory Devices." *Jour. Appl. Phys.* 22. 1108 (1951).

[63] Brooks, F. P.: „Multi-Case Binary Codes for Non-Uniform Charachter Distributions." *IRE Nat. Conv. Rec.* 63—68 (March, 1957).

[64] Brown, T. G.: Self Checking Digital Computer System. U. S. Patent, 3,098,994.

[65] Brown, D. T.: „Error Detecting and Error-Correcting Codes for Arithmetic Operations." *IRE. Trans. EC*-**9** 333—337 (1960).

[66] Brown, E. W., Hatch, A. W. Portman, P. A.: „Analysis of Binary Error Statistics Obtained on VHF Scatter Communications Systems." Bemutatva URSI-IRE Meeting (Apr. 30-May, 3, 1962). Washington, D. C.

[67] Brown, A. B. Meyers, S. T.: „Transmission." 1958. IRE, Nat. Con. Record 31—55. (March, 1957)

[68] Brown, A. B. Meyers, S. T.: „Evaluation of Some Error Correcting Methods Applicable to Digital Data Transmission." IRE. Nat. Conv. Record 37 55 (1958).

[69] Brown, D. T., Peterson, W. W.: „Cyclic Codes for Error Detection." *Proc. IRE* **49** (Jan. 1961).

[70] Bumgarner, L. L.: Mathematics Seminar Notes, PT. III „Error Correcting Codes." Burroughs Corporation Research Center, Reference Memo, RM57—187. 38—33 (1957).

[71] Busch, K. A.: Notices of the American Math. Society, Aug, 1965. p. 54.

[72] Cadden, W. J.: Binary Numbers, Codes and Translators.

[73] Calabi, L.: *Addition and Multiplication of Codes.* Techn. Memo No. 11, (Jun. 1959). Parke Math. Labs. Inc., Carlisle, Mass.

[74] Calabi, L.: *Some Algebraic Properties of Systematic Error Correction Codes.* Techn. Memo No. 9 (Jan. 1959). Parke Math. Labs, Inc., Carlisle Mass.

[75] Calabi, L.: *A New Approach to the Study of Binary Systematic Codes.* Scientific Report No. 6. Parke Mathematical Laboratories, Inc. (Dec. 1960).

[76] CALABI, L.: *Mathematical Study of Coding Techniques and of Minimization Problems for Switching Circuitry.* Parke Mathematical Laboratories, Inc. Final Report, AFCRL 317 (Apr. 1961).
[77] CALABI, L.: „A Note on Rank and Nullity in Coding Theory." *Information and Control* **4** 359—363 (Dec. 1961).
[78] CALABI, L. and HAEFELI, G.: On Hobbs Code. Techn. Memo No. 14 (Jun. 1957). Parke Math. Labs, Inc. Carlisle.
[79] CALABI, L.—HAEFELI, H. G.: „A Class of Binary Systematic Codes Correcting Errors at Random and in Bursts." *IRE Trans, IT*-**5**. Special Suppl. 79—94 (1959).
[80] CALINGAERT, P.: „Two Dimensional Parity Checking." *JACM.* 8, 186—200 (Apr. 1961).
[81] CAMPOPIANO, C. N.: „Recursive Sequences and Coding Theory." RCA TR-59—599—3 (March. 1959).
[82] CAMPOPIANO, C. N.: Block Codes for a Uniform Discrete Channel without Memory. RCA TR 60 597—7 (Jun. 1960).
[83] CAMPOPIANO, C. N.: „Construction of Error-Correcting Codes from Linear Recurring Sequences of Maximal Period." RCA. Eng. Rep. EM-59—597—2 (Sept. 1959).
[84] CAMPOPIANO, C. N.: Construction of Relatively Maximal, Systematic Codes for Specified Minimum Distance from Linear Recurring Sequences of Maximal Period. *IRE Trans. IT*-**6.** 523—528 (1960).
[85] CAMPOPIANO, C. N.: „Bounds on Burst Error Correcting Codes." Radio Corporation of America, Airborne Systems Division. EM-60—597—20 (Jan. 1961).
[86] CAMPOPIANO, C. N.: On the Gilbert Bound for Minimum Distance. EM 61—597—4, Aerospace Communications and Controls Division, Radio Corp. of America.
[87] CAMPOPIANO, C. N.: „Generalization of a Theorem of M. Plotkin." RCA Memorandum (March. 1960).
[88] CAMPOPIANO, C. N.: „Notes on Burst Error Correcting Codes". RCA Memorandum (Aug. 1960).
[89] CAMPOPIANO, C. N.: „A Simple Decoding Scheme for a Quaternary, Double Error Correcting Code." RCA Memorandum (Sept. 1960).
[90] CAMPOPIANO, C. N.: „The Reliability of a Certain Quaternary, Double Error Correcting Code." RCA Memorandum (Sept. 1960).
[91] CAMPOPIANO, C. N.: „Bounds on Burst-Error-Correcting Codes." *IRE Trans. IT*-**8.** 257—259 (Apr. 1962).
[92] CERNY, V.: „Kontrolni obvody operacni jednotky cs samocinneho pocitace SAPO." *Stroje na zpracovani informaci* 115—123 (1956).
[93] CHANG, S. L.: „Theory of Information Feedback Systems." *IRE. Trans. IT*-**2** 29—40 (Sept. 1956).
[94] CHANG, S. L.: „Improvement of Two-Way Communication by Means of Feedback." *IRE International Convention Record* **4** 88—104 (1961).
[95] CHARKEVIK, A. A.: About best Codes. *Электросвязь* No. 2 65—70 1956.
[96] CHARKEVIK, A. A.: „Decoding of Binary Codes." *Электросвязь No.* 5 3 — 13 1956.
[97] CHERNOFF, H.: „A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on a sum of Observations." *Ann. Math. Stat.* **23** 493—507 (Dec. 1952).
[98] CHIEN, R. T.: *Linear Codes for Burst-Error-Correction in Binary Arithmetic and Transmission.* International Business Machine Corp., Yorktown, Heights, N. Y. IBM Res. Rept. RC-817. 1962.
[99] CHIEN, R. T.: „On Linear Residue Codes for Burst-Error-Correction." *IRE Trans. IT*-**10**. 127—133 (1964).
[100] CHIEN, R. T.: „On the Characteristics of Error-Correcting Codes." *IRE Trans. IT*-**5.** 91 (1959).
[101] CHIEN, R. T.: Orthogonal Matrices, Error-Correcting Codes, and Load-Sharing Matrix Switches. *IRE Trans. EC*-**8.** Correspondence, 400 (1959).
[102] CLARK, R. C.: „Diagrammatic Methods of Code Construction." Comm. and Electr. No. 40. 817—823 (Jan. 1959).
[103] COCKE, J.: „Lossless Symbol Coding with Nonprimes." *IRE Trans. IT*-**5.** 33—34 (1959).
[104] COHN, D. L.—GORMAN, J. M.: „A Code Separation Property." *IRE Trans. IT*-**8.** 382—383 (Oct. 1962).
[105] COHN, M.: „Affine m-ary Gray Codes." *Information and Control* **6** 70—78 (1963).
[106] COLEN, M.: „A Note on Error Detection in Noisy Logical Computers." *Information and Control* **2** 310—313 (1959).

[107] CONSTANTINE, G.: „A Load-Sharing Matrix Switch." *IBM J. Res. Develop.* **2** 204–211 (1958).
[108] COWAN, J. D.–MCCULLOCH, W. S.–WINOGRAD, S.: „Redundant Computation in Anastomotic Nets of Formal Neurons." *Redundancy Techniques for Computer Systems.* Wilcox, R. H. and Mann, W. C., Eds, Spartan Books, Washington, D. C. 1962.
[109] COWELL, W. R.: „The Use of Group Codes in Error Detection and Message Retransmission." *IRE Trans. IT-***7.** 168–171 (Jul. 1961).
[110] COWELL, W. R.–BURTON, H. O.: „Computer Simulation of the Use of Group Codes with Retransmission on a Gilbert Burst Channel." *Trans. AIEE* **81** *(Comm. and Electronics)* 577–585 (Jan. 1962).
[111] CRAMENOPOULOS, N.: *An Upper Bound for Error-Correcting Codes.* M. S. Thesis, Mass, Inst. Techn., Cambridge, 1963.
[112] CRENELING, C. J.: Increasing the Reliability of Electronic Equipment by the Use of Redundant Circuits. *Proc. IRE* 44–4. 509.
[113] CRICK, F. H. C., GRIFFITH, J. S., ORGEL, L. E.: *Codes without Commas.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 416 (1957).
[114] CROISDALE, A. C.: „Teleprinting over Long-Distance Radio Links." *P. O. Elec. Eng. J.* **51** 88–93 and 219–225 (July Oct. 1958).
[115] CROWELL, M. H.: *Electron Beam Tube for Translating Gray Code to Binary Code.* U. S. patent 3,108.203.
[116] „Data Unit Transmits Over Phone Lines." *Elektronics* **32.** No. 9. 76 (Febr. 1959).
[117] DAHER, P. R.: „Automatic Correction of Multiple Errors Originating in a Computer Memory." *IBM Journ. of Res. and Developm.* 317–324 (1963).
[118] DELEANU, A.: „A Supra Codurilor Grupale Nebinare de Errori." *Probl. Automat.* 73–78 (1963).
[119] DÉNES J., MÜHLRAD A.: „A fehérjeszintézis információelméleti vonatkozásai." *Biológiai Közlemények* (1962) 97–109.
[120] DEUTSCH, S.: *An Experimental Binary Coding Apparatus.* Brooklyn. Polytechnic, Institute Research Report R-481–56. Astia, Ad 105 575 (Apr. 18. 1956).
[121] DIAMOND, J. M.: *Chechking Codes of Simplest Type.* University of Pennsylvania. Moore School Research and Development Report RDR 51–24 (Febr. 1951).
[122] DIAMOND, J. M.: *Binary Expression Codes of Distance* 3. Moore School Research and Development Report RDR 51–34, University of Pennsylvania (Máy. 1951).
[123] DIAMOND, J. M.: „Checking Codes for Digital Computers." *Proc. IRE* **43.** 487–488 (Apr. 1955).
[124] DIGIORGIO, J.: *An Airborne Transistorized Automatic Binary-Code Error Detector and Counter Unit for Evaluating and Experimental Communication System.* Usaf. Cambridge Research Center Technical Report 59–109, Astia ad 210 216 (Jan. 1959).
[125] DOTY, D. B., TATE, L. A.: „Data Transmission Machine." *AIEE Trans* **75.** 1. rész. 27. 600–603. Paper 56–985 (Nov. 1956).
[126] DRIML, M.: „A Linear Method of Construction of Error-Correcting Codes." *Information Theory* (Symposium London, 1960). 1–10 Butherworths, Washington, D. C. 1961.
[127] DUTKA, J.: „Notes on Error-Correcting Techniques, I. Efficiency of Single Error-Correcting Codes with a Constant bit Rate of Transmission." *RCA Rewiev.* **19.** 628–641 (Dec. 1958).
[128] DWORK, B. M., HELLER, R. M.: Multiple Error and Failure Correcting Codes. *IRE Nat. Con. Record,* 123–129 (March. 1959).
[129] DWORK, B. M., HELLER, R. M.: „Results of a Geometric Approach to the Theory and Construction of Non-Binary, Multiple Error and Failure Correcting Codes." *IRE National Convention Record,* 123–129 (1959).
[130] ECKLER, A. B.: „The Construction of Missile Guidance Codes Resistant to Random Interference." Bell. System Techn. J. **39.** 973–994 (1960).
[131] EDEN, M.: „A Note on Error Detection in Noisy Logical Computers." *Inf. and Control,* 310–313 (Sept. 1959).
[132] ELIAS, P.: „Error-Free Coding." *IRE Trans. IT-***4.** 29–37 (1954).
[133] ELIAS, P.: „Error-Free Coding." *IRE Convention Record,* 37–46 (1955).
[134] ELIAS, P.: „Coding for Noisy Channels." *IRE Convention Record,* 37–46 (1955).
[135] ELIAS, P.: „Predictive coding." *IRE Trans. IT-***1.** 16–33 (March. 1955).
[136] ELIAS, P.: „Coding for Two Noisy Channels." *Information Theory,* London Symposium 61–77.

[137—138] Elias, P.: „Computation in the Presence of Noise". *IBM Journal* (Oct. 1958.) 346—353.

[139] Elias, P.: „List Decoding for Noisy Channels." *IRE Wescon Convention Record* 2, 94—104 (1957).

[140—141] Elias, P.: „Information, Noise and Error Probability." *Proc. Nat. Elektronics Conf.* 389—393 (1956—1957).

[142—143] Elias, P.: „Computation in the Presence of Noise." *IBM J. Res. Dev.* **2.** 346—353 (1958).

[144] Elias, P.: „Information Theory and Coding." *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect.* D64D 671—673 (1960).

[145] Elias, P.: „Coding and Decoding." *Lectures on Communication System Theory* 321—344. McGraw-Hill New York, 1961.

[146] Elliot, E. O.: „Estimates of Error Rates for Codes on Burstnoise Channels." *BSTJ*, **42.** 1977—97 (Sept. 1963).

[147] Elspas, B.: „The Theory of Autonomous Linear Sequential Networks." *IRE Trans. CT*-**6.** 45—60 (1959).

[148] Elspas, B.: „A Note on p-nary Adjacent Error Correcting Codes." *IRE Trans. IT*-**6.** 13—15 (March. 1960).

[149] Elspas, B.: *Design and Instrumentation of Error Correcting Codes.* Interim Tech. Report, Radc TR 61—259. Ford Research Institute (Oct. 1961).

[150] Elspas, B.—Short, R.A.: *A Table of Indices for Polynomials Over GF(2).* Supplement NO. U. Radc TR 61—259. Stanford Research Institute (Oct. 1961).

[151] Elspas, B.—Short, R. A.: „A Note on Optimum Burst-Error Correcting Codes." *IRE Trans. IT*-**8.** 39—42 (Jan. 1962).

[152] Engelman, C.: „On Close-Packed Double Error-Correcting Codes on p Symbols." *IRE Trans. IT*-**7.** 51—52 (Jan. 1961).

[153] Epstein, M. A.: *Algebraic Decoding for a Binary Erasure Channel.* Research Laboratory of Electronics Report 340, M. I. T. Cambridge, Mass (1958).

[154] Epstein, I. J.—Lippel, B.: „A Method for Obtaining Complete Digital Coding Chains." *IRE Trans. EC.* 121 (Jun. 1957).

[155] Even, S.: „Test for Synchronizability of Finite Automata and Variable Length Codes." *IEEE Trans. IT*-**10** (July, 1964).

[156] Fano, R. M.: *Transmission of Information.* The M. I. T. Press John Wiley and Sons, Inc., New York (1964).

[157] Fano, R. M.: „A Heuristic Discussion of Probabilistic Decoding." *IEEE Trans. IT*-**9.** 64—74 (Apr. 1963).

[158] Feinstein, A.: „A New Basic Theorem on Information Theory." *IRE Trans. IT*-**4.** 2—22 (Sept. 1954).

[159] Feinstein, A.: „Parity Check Symbol Codes." *Foundations of Information Theory,* N. Y., McGraw-Hill, 120—131 (1958).

[160] Felker, J. H.: „Arithmetic Processes for Digital Computers." *Electronics.* **26.** No. 3. 150—155 (March. 1953).

[161] Fenyő I., Frey T.: Matematika villamosmérnököknek, I. — Műszaki Kiadó, Budapest, 1964.

[162] Филиппов, В. И.: „Метод расчета систем нсправления одиночной ошибки в двоичных кодах." Сб. работ по вопр. электромех. Гос. ком.-та сов. мин. СССР Автоматиз. и машиностр. No. 9. 255—264 (1963).

[163] Fire, P.: *A Class of Multiple-Error-Correcting Binary Codes for Non-Independent Errors.* Sylvania Report RSL-E-2, Sylvania Reconnaissance Systems Laboratory, Mountain View, California (1959).

[164] Fischmann, A. F.: „A Gray Code Counter." *IRE Trans. EC.* 120 (Jun. 1957).

[165] Fitzpatrick, G. B.: „Synthesis of Binary Ring Counters of Given Periods." *J. A. C. M.* **7.** 287—297 (1960).

[166] Flanagan, J. E.: „Coding to Achieve Markov Type Redundancy." *Jour. Math. Phys.* **33.** 258. (1954).

[167] Флейшман, Б. С.: „Построение оптимального в смысле Шеннона кода в простейшем случае бинарного канала с шумами." Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязь им. А. С. Попова. 1959. 3. 59—95.

[168] Флейшман, Б. С.: Основные теоремы конструктивной теории оптимального кодирования для дискретного канала шумами. Радиотехника и электроника. No. 8. 8. 1291—1300 (1963).

[169] Flood, J. E.: „Noise-Reducing Codes for Pulse-Code Modulation." Monograph No. 291R. Inst. of Elec. Eng.

[170] FOATA, D. C.: *On the Construction of Bose—Chaudhuri Matrices with the Help of Abelian Group Characters.* Afosr Report No. 489. Mimeograph Series No. 278. Institute of Statistics, University of North Carolina (March, 1961).
[171] FOATA, D. C.: „Sur la Construction des plans fractionnés et Charactères des Groupes Abéliens." *Colloq. Internat. Centre. Nat. Re. Sci.* 137—146 (1963).
[172—173] FONTAINE, A. B.: *Applicability of Coding to Radio Teletype Channels.* M. I. T. Lincoln Laboratory, Lexington Mass. 25G—3. (Okt. 27, 1961).
[174] FONTAINE, A. B.—GALLAGER, R. G.: *Error-Statistics and Coding for Binary Transmission over Telephone Circuits.* Technical Report 25G—0023, M. I. T. Lincoln. Lab., Lexington, Mass.
[175] FONTAINE, A. B.—GALLAGER, R. G.: Error Statistics and Coding for Binary Transmission Over Telephone Circuits. *Proc. IRE* **49.** 1059—1065, Jun. 1961.
[176] FONTAINE, A.B.—PETERSON, W. W.: „On Coding for the Binary Symmetric Channel." *Trans. AIEE* **77.** part I. Comm. and Elec. 648—646 (1958). Poughkeepsie IMB Report RC-43. 643—656.
[177] FONTAINE, A. B.—PETERSON, W. W.: „Group Code Equivalence and Optimum Codes." *IRE Trans. IT*-**5.** Special Supplement 60—70 (1959).
[178] FOSS, F. A.: „The Use of a Reflected Code in Digital Control Systems." *IRE Trans. EC*-**3.** 1—6 (Dec. 1954).
[179] FOULK, C. R.: „Some Properties of Maximally-Efficient Cyclic Burst-Correcting Codes and Results of a Computer Search for Such Codes." File No. 375, Digital Computer Laboratory, University of Illinois, Urbana, Ill (Jun. 12, 1961).
[180] FRANCO, G. A.—LACHS, G.: „An Orthogonal Coding Technique for Communications." *IRE International Convention Record* **8.** 126—133 (1961).
[181] FRANK, R. L.—ZADOFF, S. A.—HEIMILLER, R. C.: Phase Shift Pulse Codes with Good Periodic Correlation Properties. *IRE Trans. IT*-**8.** 381—382 (Oct. 1962).
[182] FREIMAN, C. V.: *Protective Block Codes for Assymmetric Binary Channels.* IBM Research Center, York Town Heights, N. Y. R. C.-457 (May, 1961).
[183] FREIMAN, C. V.: „Optimal Error Detection Codes for Completely Assymmetric Channels." *Information and Control* **5.** 72—80 (March. 1962).
[184] FRIEDLAND, B.: „Linear Modular Sequential Circuits." *IRE Trans. CT*-**6.** 61—68 (1959).
[185] FRIEDLAND, B.—STERN, T. E.: „On Periodicity of States in Linear Modular Sequential Circuits." *IRE Trans. IT*-**5.** Correspondence, 136—137 (1959).
[186] FRYER, R. G.: Note on „On Upper Bounds for Error Detecting and Error Correcting Codes of Finite Length." *Trans. IRE IT*-**6.** 502 (1960).
[187] FUJII, M.: *On the Distance-Preserving Code System.* Preprint, Electrotechnical Laboratory, Tokyo (May. 1960).
[188] GALLAGER, R. G.: *Low Density Parity Check Codes.* Sc. D. Thesis, Department of Electrical Eng. M. I. T. Cambridge, Mass. (1960).
[189] GALLAGER, R. G.: *Sequential Decoding for Binary Channels with Noise and Synchronization Errors.* M. I. T. Lincoln. Lab. Lexington Mass., 256—2 (Okt. 27, 1961).
[190] GALLAGER, R. G.: „Low Density Parity Check Codes." *IRE National Conv. Record.* 126 (1961).
[191] GALLAGER, R. G.: „Low Density Parity Check Codes." *IRE Trans. IT*-**8.** 21—28. (Jan. 1962).
[192] GALLAGER, R. G.: *Low Density Parity Check Codes.* M. I. T. Press, Cambridge, Mass. (1963).
[193] ГАРАКОВ, Г, А., РОЙ—ЧОУДХУРИ. Д. К.: „Вопросы их схемной реализации." Вопросы радиоэлектроника серия 7. No. 5. (1963). Изд. Г. К. при СМ. СССР. Радиоэлектронике.
[194] ГАРМАШ, В. А.: „Способ построения оптимального двоичного кода." *Электросвязь* 13. No. 2 3—14 (1959).
[195] GARNER, H. L.: *Error Checking and the Structure of Binary Addition.* Ph. D. Dissertation — University of Michigan (1958).
[196] GARNER, H. L.: *Error Checking and the Structure of Binary Addition.* Univ. of Michigan Eng. College Ind. Program(Jul. 1958).
[197] GARNER, H. L.: „Generalized Parity Checking." *IRE Trans. EC*-**7.** No. 3. 207—213 (Sept. 1958).
[198] ГАВРИЛОВ, М. А., ОСТИАНУ, В. М., РОДИН, В. Н. и ТИМОФЕЕВ, Б. Л.: „Реализация схем дискретных корректоров." Докл. Акад. наук СССР 123. No. 6. 1025—1028 (1958).

[199] Gavrilov, M. A.—Sastova, G. A.: *The Theory of Signal Formation and Noise Reduction.* Izd. Akad. Nauk. SZSZSZR (1957).
[200] General Electric Company Limited: Improvements in relating to coding arrangements. B. P. 882, 123.
[201] Gilbert, E. N.: „A Comparison of Signaling Alphabets." *Bell System Techn. J.* **31.** 504—522 (1952).
[202] Gilbert, E. N.—Moore, E. F.: Notes on Hybrid Coding. *Proc. IRE* **43.** 625 (May 1955).
[203] Gilbert, E. N.: „An Outline of Information Theory." *The American Statistician* **12.** 13—19 (Febr. 1958).
[204] Gilbert, E. N.: „A Problem in Binary Coding." *Symp. on Combinatorial Designs and Analysis*, Am. Math. Soc. (April 25, 1958).
[205] Gilbert, E. N.: „Gray Codes and Paths on the N-cube." *Bell Syst. Techn. J.* **37.** 815—826 (1958).
[206] Gilbert, E. N., Moore, E. F.: „Variable-Length Binary Encodings." *Bell. Syst. Techn. J.* **38.** 933—967 (1959).
[207] Gilbert, E. N.: „Synchronization of Binary Messages." *IRE Trans. IT*-**6.** 470—477 (Sept. 1960).
[208] Gilbert, E. N.: „A Problem in Binary Coding." *Proc. Symposia in Appl. Math. Vol. X. Combinatorial Analysis* 291—297 (1960).
[209] Gilbert, E. N.: „Cyclically Permutable Error-Correcting Codes." *IEEE Trans. IT*-**9.** 175—182 (Jul. 1963).
[210] Gill, A.: „A Theorem Concerning Compact and Cyclic Sequences." *IRE Trans. IT*-**8.** 225—255 (Apr. 1962).
[211] Gilmour, W. D.: „P out of Q codes." Electronic Engineering 41—43 (Jan. 1963)
[212] Gluskov, V. M.: Az automaták absztrakt elmélete, I—II. A MTA Mat. és Fiz. Tud. Oszt. Közleményei, XIII. kötet, 3. szám, 287—309. (1963) és XIV. kötet, 1. szám, 71—110. (1964).
[213] Goetz, F. M.: *Self-Correcting Codes for Errors in Synchronization.* M. S. Thesis, Dept. of Math. New York Univ., N. Y. March. 1960.
[214] Golay, M. J. E.: „Notes on Digital Coding." *Proc. IRE* **37.** Correspondence 657 (1949).
[215] Golay, M. J. E.: „Binary Coding." *IRE Trans. IT*-**4.** 23—28 (1954).
[216] Golay, M. J. E.: „Notes on Hybrid Coding." *Proc. IRE* **43.** 625 (May. 1955).
[217] Golay, M. J. E.: The Logic of Bidirectional Binary Counters. *IRE Trans. EC.* 1—4 (March, 1957).
[218] Golay, M. J. E.: „Notes on the Penny-Weighing Problem, Lossless Symbol Coding with Nonprimes, *IRE Trans. IT*-**4.** 103—109 (Sept. 1958).
[219] Golay, M. J. E.: „Complementary series." *IRE Trans. IT*-**7.** 82—87 (April, 1961).
[220] Golbert, E. N.: „Capacity of a Burst-noise Channel." *BSTJ* **39.** 1253—1266 (Sept. 1960).
[221] Goldman, A. J.—Bender, B. K.: „Maximum Cellular Boolean Functions and Perfect Gray Codes." *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B.* 77—84 (1963).
[222] Golomb, S. W.: *Sequences with Randomness Properties.* Glen L. Martin Co. Final Report on Contract No. W36-039SC-54—3611, Baltimore, Md. (1955).
[223] Golomb, S. W., Gordon B., Welch, L. R.: „Comma Free Codes." *Canad. J. Math.* **102.** 202—209 (1958).
[224] Golomb, S. W., Welch, L. R., Delbrück, M.: „Construction and Properties of Comma Free Codes." *Biol. Med. Danske Vid. Selsk* **23.** No. 9. 1—34 (1958).
[225] Golomb, S. W., Welch, L. R., Hales, A. Ö.: *On the Factorization of Trinomials over GF(2).* Mem. 20—189. Jet. Prop. Lab. Cal. Tech.
[226] Good, I. J.: „Randomized and Pseudorandomized Substantialization of Sign Sequences." Acta Crystalographica **12.** 824—5 (Okt. 1959).
[227] Good, I. J.: „On the Substantialization of Sign Sequencies." Acta Crystalographica **7.** 603 (Sept. 1954).
[228—229] Горбунов, Е. С.: „Сравнение некоторых помехоустойчивых кодов." *Электросвязь* **10.** No. 12. 42—47 (1956).
[230] Gorenstein, D., Peterson, W. W., Zierler, N.: „Two Error Correcting Bose- Chaudhuri Codes are Quasi-Perfect." *Inf. and Control* **3.** 291 — 294 (1960).

[231] GORENSTEIN, D., ZIERLER, N.: „A Class of Error Correcting Codes in p^m Symbol." *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **9.** 207–214 (1961).
[232] GOROG, E.: „The Best Cyclic Codes for Burst Error Correction in Messages of Given Lengths." *Inform. Proc.* 1962. Amsterdam, N. Holland Publ. Co. 375–376 (1963).
[233] GOROG, E.: *Les Codes Cycliques Detecteurs et Correcteurs.* Bemutatva Paris Second Congres Annuel de l'Association Francaise de Calcul et de Traitment de l'Information.
[234] GRAY, F.: Pulse Code Communication. US Patent, 2,632.058.
[235] GREEN, P. E., JR.: „Information Theory in the U. S. S. R. 1957." *IRE Wescon Convention Record*, 67–83.
[236] GREEN, P. E., JR.: A Bibliography of Soviet Literature on Noise, Correlation, and Information Theory. *IRE Trans. IT*-**2** 91–94 (Jun. 1956).
[237] GREEN, P. E., JR., SAN SOUCIE, R. L.: „An Error-Correcting Encoder and Decoder of High Efficiency." *Proc. IRE.* **46.** 1741–1744 (Okt. 1958).
[238] GREY, L. D.: „Comments on a Paper by Wax." (Correspondence). *IRE Trans. IT*-**7.** P. 270 (Okt. 1961).
[239] GREY, L. D.: „Some Bounds for Error-Correcting Codes." *IRE Trans. IT*-**8.** 200–203 (Apr. 1962).
[240] GRIESMER, J. H.: *A Bound for Error Correcting Codes.* IBM Research Report RC-204.
[241] GROSS, A. J.: *On the Construction of Burst-Error-Correnting Codes.* Afosr Report, Institute of Statistics, Mimeograph Series No. 300., University of North Carolina (Jul. 1961).
[242] GROSS, A. J.: „A Note on Some Binary Group Codes which Correct Error in Bursts of Four or Less." *IRE Trans. IT*-**8.** 384 (Oct. 1962).
[243] GROSS, A. J.: „Binary Group Codes which Correct in Bursts of Three or Less for Odd Redundancy." *IRE Trans. IT*-**8.** 356–359 (Oct. 1962).
[244] HACKETT, C. M., JR.: *Word Error Rate for Group Codes Detected by Correlation and Other Means.* General Electric Report No. R62ELC5 (Febr. 1962).
[245] HACKETT, C. M., JR: *Analysis of Group Codes Received in White Gaussian Noise at Arbitrarily Low Signal to Noise Ratio.* Internal Memorandum. G.E.Advanced Electronics Center. Ithaca, N. Y. (Febr. 1962).
[246] HAEFELI, H. G.: *An Extension of Kautz's Work on Error-Correcting Codes.* Air Force Cambridge Research Laboratories, AFCRL-TN-60–1118.
[247] HAGELBARGER, D. W.: „Recurrent Codes Easily Mechanized, Burst Correcting, and Binary Codes." *B. S. T. J.* **38.** 969–984 (Jul. 1959).
[248] HAGELBARGER, D. W.: *A New Correcting Code for Bursts of Errors.* Bell Lab. Record 33–39 (Jan. 1959).
[249] HAGELBARGER, D. W.: „Error Correction Code Eliminates Bursts of Errors." *Electrical Design News,* 7 (March. 1959).
[250] HAGELBARGER, D. W.: „Digital Error Corrector." *Wire and Radio Communications* 26 (March. 1959).
[251] HAGELBARGER, D. W.: „Error Detection Using Recurrent Codes." Bemutatva AIEE Winter General Meeting (Febr. 1960).
[252] HALL, M.: „An Isomorphism Between Linear Recurring Sequences and Algebraic Rings." *Trans. Am. Math. Soc.* **44.** 196–218 (1938)
[253] HALL, M.: „New Applications of Algebra." *Engineering and Sci.* 20–24 (1960).
[254–255] HALL, F., HOLLOWAY, L.: *Reduction of Error in Weather Communication System.* United States Dep. of Commerce, Weather Bureau, Washington, D. C. (Jul. 1956).
[256] HAMMING, R. W.: „Error Detecting and Error Correcting Codes." *Bell System Techn. J.* **29.** 147–160 (1950). Bell Lab. Rec. Vol. 28. 193–198 (1950).
[257] HAMMING, R. W.: Error Detecting and Correcting System. U. S. Patent 2,552,629 (May 15, 1951).
[258] HANCOCK, J. C.–HOLSINGER, J. L.: *Some Useful Coding Techniques for Binary Communication Systems.* Purdue University, School of Electrical Engineering, *IR-EE*-**1** (Jan. 1962).
[259] HANSEN, J. C.: „An Integrated „Error-Free" Communication System." *IEEE Trans. Space. Electron and Telemetry* 92–98 (1963).
[260] HAUPTSCHEIN, A.–SCHWARTZ, L. S.: „Semantic Constraints in the Analysis of Communication Systems." *IRE* 1284–1285 (Sept. 1957).
[261] HARMUTH, H. F.: Orthogonal Codes. *Proc. Inst. of Elect. Eng. (British)* **107.** 242–248 (1960).

[262] HARRIS, B., HAUPTSCHEIN, A., MORGAN, K. C., SCHWARTZ, L. S.: „Decision Feedback, Reliability With Varying Signal Strength." *Proc. N. E. C.*, 126–140 (1957).
[263] HARRIS, B., HAUPTSCHEIN, A., MORGAN, K. C., SCHWARTZ, L. S.: „Binary Communication Feedback Systems." *AIEE Comm. and Electronics* No. 40. 960–969 (Jan. 1959).
[264] HARRIS, B.–MORGAN, K. C.: „Binary Symmetric Decision Feedback Systems."- *AIEE Comm. and Electronics* 436–443 (Sept. 1958).
[265] HARTMANIS, J. : „Linear Multivalued Sequential Coding Networks." *IRE Trans.*, *CT*-**6.** 69–74 (1959).
[266] HARTMANIS, J.: „The Application of Some Basic Inequalities for Entropy." *Inf. and Control* **2.** 199–213 (Sept. 1959).
[267] HARTMANIS, J., STEARNS, R. E.: „A Study of Feedback and Errors in Sequential Machines." *IRE Trans. EC.*, 223–232 (Jun. 1963).
[268] HASELTINE, B.: „Regular Expressions and Variable Length Encoding." *IRE Trans. IT*-**9.** 48 (1963).
[269] HAUPTSCHEIN, A., SCHWARTZ, L. S.: „Semantic Constraints in the Analysis of Communication Systems." *IRE* 1284–1285 (Sept. 1957).
[270] HEATH, F. G., GRIBBLE, M. W.: „Chain Codes and Their Electronic Applications." *Proc. Inst. Electr. Eng. E*-108. 50–57 (1961).
[271] HEIMILLER, R. C.: „Phase Shift Pulse Codes with Good Periodic Correlation Properties." *IRE Trans. IT*-**7.** 254–257 (Oct. 1961).
[272] HELD, H. J.: „Error Probability of Binary Coded Signals in the Presence of White Noise." *Nachrichtentechnische Zeitschrift*, **11.** 244–249 (May, 1958).
[273] HELD, H. J.: „Reliability of Binary Transmission with Various Kinds of Modulation." *Nachrichtentechnische Zeitschrift* **11.** 286–292 (Jun. 1958).
[274] HELSTROM, C. W.: „Maximum Weight Group Codes for the Balanced M-ary Channel." *IRE Trans. IT*-**6.** 550–554 (Dec. 1960).
[275] HELSTROM, C. W.: „Single Error-Correcting Codes for Nonbinary Balanced Channels." *IRE Trans. IT*-**7.** 2–7 (1961).
[276] HENDERSON, D. S.: *Residue Class Error Checking Codes.* Ph. D. Dissertation, Harvard Univ. Cambridge Mass. 1961. valamint: 16th Nat. Meeting of the ACM, Las Vegas Nev.; (Sept. 1962).
[277] HENNIG, A. F.: Radio Transmission of Teleprinter Signals with Automatic Error Correction. *Nachrichtentechnische Zeitschrift.*
[278] HENNIG, F.: *Teletype Transmission with Error Detection and Error Correction.* Association of Postal Engineers (Jan. 15, 1958).
[279] HOCQUENGHEM, A.: „Codes Correcteurs d'erreurs." Chiffres 2, 147–156 (Sept. 1959).
[280] HOTTMANAN, S.–KURTZBERG, J.: *Application Recursive Sequences (Shift Code Counters) to Computers.* Burroughs Corporation — GVL Memo 692–60–176–4(11)60.
[281] HOLDBROOK, B. D.: et. al.: *Checking circuit.* U.S. Patent No. 2. 696, 599.
[282] HONDA, N.: „Sequential Error-Correcting Codes." *J. Instr. Electr. Commun. Engrs. Japan*, **40.** No. 2. 169–174 (Febr. 1957).
[283] HONDA, N.: „The Sequential Error-Correcting Codes." *Sci. Repts. Tohoku Univ. Series*, B., **8.** No. 3 (1956).
[284] HORSTEIN, M.: *Sequential Transmission of Digital Information with Feedback.* Sc. D. Thesis, Dep. of Electrical Eng. M. I. T. Cambridge, Mass. (1960).
[285] HOTZ, G.: „Zur Mathematischen Theorie der Fehlerkorrigierender Codes." *Ann. Univ. Sarav.* **9.** 83–92 (1960–61).
[286] HUFFMANN, D. A.: „A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes." *Proc. IRE* 1098–1101 (Sept. 1952)., W. Jackson: *Communication Theory*, Butherworths, 102 (1953).
[287] HUFFMAN, D. A.: „The Synthesis of Linear Sequential Coding Networks." Colin Cherry (Ed.): *Information Theory*, Acad. Press. New York, 77–95 (1956).
[288] HUFFMAN, D. A.: „A Linear Circuit Viewpoint on Error-Correcting Codes." *IRE Trans. IT*-**2.** 20–28 (1956).
[289] HUFFMANN, D. A.: „A Linear Circuit Viewpoint on Error-Correcting Codes." Nuovo C. Suppl. (10) **13.** 389–396 (1959).
[290] HUFFMAN, D. A.: „The Generation of Impulse-Equivalent Pulse Trains." *IRE Trans. IT*-**8.** 10–16 (Sept. 1962).
[291] HURLEY, R. B.: *Junction Transistor Electronics.* John. Wiley & Sons, New York, 1958.

[292] IBM-Deutschland: Rechenvorrichtung, bei der das Prüfbit errechnet wird. D. Patent 1,099.228.
[293] Игнатьев, Н.К.: ,,О некоторых геометрической свойствах оптимального кода." *Электросвязь* **11.** No. 6. 3—9 (1957).
[294] International Business Machines Corporation: Byte Converter, B. Patent 867, 738.
[295] International Business Machines Corporation: An Electrical Recording Circuit. B. Patent 880.772.
[296] International Business Machines Corporation: Error Checking Circuitry for Magnetic Memory. U. S. P. 3122724 (1964. febr. 25).
[297] IRE Standards: ,,Information Theory: Definitions of Terms." *Proc. IRE* **46.** 1646—1648 (1958).
[298] It And T Corp: I Printing Telegraph Codes.
[299] It And T Corp. Ref. Data For Radio Engineers, Fourth Edition 844 (1956).
[300] Jacobs, I.: ,,Optimal Error-Detection Codes for Noiseless Decision Feedback." *IRE Trans. IT*-**8.** 359—371 (Oct. 1962).
[301] Янбых, Г. Ф.: ,,Методы преобразования кодовых колец." Радиотехника и электроника 8. Но. 8. 1301—1311 (1963).
[302] Jaynes, E. T.: A Note on Unique Decipherability. *IRE Trans. IT*-**5.** 98—102 (Sept. 1959).
[303] Jelinek, F.: *Coding and Decoding of Binary Group Codes.* M. S. Thesis, E. E. Dept., M. I. T. (May 1958).
[304] Jiggs, B. H.: ,,Recent Results in Comma Free Codes." *Canad. J. Math* **15.** 178—187 (1963).
[305] Johson, O. W., JR.: ,,Electronic Circuit Error Detection." *IBM Techn. Disclosure Bull.* **1.** No. 6. 11—12. (Apr. 1959). Módosítva (Aug. 1, 1961), valamint *IRE Trans. IT*-**8.** 203—208 (Apr. 1962).
[306] Johson, S. M.: *A New Upper Bound for Error-Correcting Codes.* Math. Dept. the RAND Corporation, Santa Monica, California, P-2294—1 (May. 8. 1961).
[307] Johson, S. M.: On Perfect Error-Correcting Codes. Memo. RM. 3403-PR (Dec. 1962).
[308] Johson, S. M.: ,,A New Upper Bound for Error-Correcting Codes." *IRE Trans. IT*-**8.** 203—209 (1962).
[309] Jones, D. M.—Bussgang, J. J.: ,,Tree-Like Structure of Block-Codes." *IRE Trans. IT*-**8.** 384—385 (Oct. 1962).
[310] Joshi, D. D.: ,,A Note on Upper Bounds for Minimum Distance Codes." *Information and Control* **1.** 289—295 (1958).
[311] Judyeki, S.: ,,Korygowanie bledow w ukladzie liczbowym dwojkowym." *Zesz. Vauk. Politechn. Warsz.* 3—25 (1963).
[312] Karp, R. M.: ,,Minimum-Redundancy Coding for the Discrete Noiseless Channel." *IRE Trans. IT*-**7.** 27—38 (Jan. 1961).
[313] Karush, J.: ,,A Simple Proof of an Inequality of McMillan." *IRE Trans. IT*-**7** 118 (Apr. 1961).
[314] Kasami, Tadao: A Systematic Code for Non-Independent Errors. *IRE Trans. IT*-**6** (Nov. 1960).
[315] Kasami, Tadao: ,,A Topological Approach to the Construction of Group Codes." *IRE Trans. IT*-**7.** 200, (Jul. 1961).
[316] Kautz, W. H.: Optimized data encoding for Digital Computers. *IRE Convention Record.* Part. 4. 47—57.. (954).
[317] Kautz, W. H.: ,,*A Class of Multiple Error Correcting Codes.*" Stanford Research Inst. Techn. Rep. 6. (Okt. 1958).
[318] Kautz, W. H.: ,,Unit Distance Error Checking Codes." *IRE Trans. EC*—7179—180 (Jun. 1958).
[319] Kautz, W. H.: *A Class of Multiple Error Correcting Codes for Data Transmission Recording.* Stanford Research Institute Technical Rep. 5. (SRI Project 2124), Palo Alto, Calif., (Aug. 1959).
[320] Kautz, W. H.: ,,Codes and Coding Circuitry for Automatic Error Correction Within Digital Systems." *Redundancy Techniques for Computing Systems,* R. H. Wilcox and W. C. Mann, (Eds): Spartan Books, Washington, D. C. (1962).
[321] Kautz, W. H.: The Realization of Symmetric Switching Functions with Linear—Input Logical Elements. *IRE Trans EC* vol 10., No. 3. pp. 371—378. (Sept. 1961).
[322] Kautz, W. H. — Singleton, R. C.: ,,Binary Superimposed Codes." *IEEE Trans on Information Theory* (Okt. 1964).
[323] Kautz, W. H.-Elspas, B.: ,,Single Error Correcting Codes for Constant-Weight Data Words." *IEEE Trans. IT* (Jan. 1965).

[324] KEISTER, W., RITCHIE, A. E., WASHBURN, S. H.: The Design of Switching Circuits. D. van Nostrand Co. Inc. New York, magyarul: Műszaki Könyvkiadó, Bp. (1962, 225—252).
[325] KELLER, P. R.—WHEELER, L. K.: „Automatic Error Correction". *Wireless World* **65.** 28—33 (Jan. 1959).
[326] KELLY, J. L.: „A Class of Codes for Signaling on a Noisy Continuous Channel." *IRE Trans. IT*-**6.** 22—24 (1960).
[327] KENDALL, W. B.—REED, I. S.: *Path-Invariant Comma-Free Codes.* RAND Corporation, Santa Monica, California. P-23771—1(Jul. 1961). Átdolgozva, 1961. szeptember.
[328] ХАРКЕВИЧ, А. А.: „О наилучшем коде." *Электросвязь* 10 No. 2. 65—70 (1956).
[329] KILMER, W. L.: *Some Results on Linear-Recurrent Binary Burst-Correcting Codes.* Montana State College Electronics Res. Lab. Project No 6795—102 Technical Rep. No. 3. Bozeman, Montana (Jan. 1959).
[330] KILMER, W. L.: *Linear-Recurrent Binary-Error-Correcting Codes for Memoryless Channels.* Montana State College Electronics Res. Lab. Project. No. 6795—102. Technical Report No. 4. Bozeman, Montana (Jan. 1960). Részben közölve: *IRE Convention Record* (March. 1960).
[331] KILMER, W.: „Linear-Recurrent Binary Error-Correcting Codes for Memoryless Channels." *IRE Trans. IT*-**7.** 7—12 (Jan. 1961).
[332] KIM, W. H.—FREIMAN, C. V.: „Multi-Error-Correcting Codes for a Binary Asymmetric Channel." *IRE Trans. IT*-**5.** Special Supplement (May. 1959).
[333] KIM, W. H.—FREIMAN, C. V.: „Single Error-Correcting Codes for Asymmetric Binary Channels." *IRE Trans. IT*-**5.** 62—66 (Jun. 1959).
[334] КИСЛЮК, Л. Д.: „Некоторые бинарные коды с комбинациями максимального веса." Радиотехника и электроника 8. 1963—1971 (1963).
[335] KIYASU, Z.: „General Theory of Error Correcting Codes." *U. R. S. I.* Doc. 33 (VI) 1954. Also in *Research and Development Data* No. 4 (August. 1953).
[336] KLIR, J.: „Weight Codes." *Stroje na zpracovoni informaci* **8.** 155—162 (1962).
[337] KLIR, J.—MIKULAS, J.: „A Study on Equidistant and Minimum-Distant Codes." *Stroje na zpracovoni informaci* **9.** 249—270 (1963).
[338] KOGA, M.: „One Problem Concerning Coding" (japánul). *Bull Fukuoka Gakugei Univ.* III. 9. 1—4 (1959).
[339] KOMAMIYA, Y.: „Application of Logical Mathematics to Information Theory." *Proc. Third Natl. Congr. Appl. Math.* 437 (1953).
[340] KONHEIM, A. G.: „A Generalized Independence Condition and Error Correction Codes." *Am. Math. Monthly* 67, pp. 228—231 (March. 1960).
[341] KONHEIM, A. G.: *A Special Class of Systematic Error Correcting Codes.* General Electric Company, Advanced Elektronics Center, Ithaca, New York, Internal Memo.
[342] KONHEIM, A. G.—BAUM.: General Electric. Scientific. Report No. 10. AFCRC TN-58—574, Astia 160887 (Okt. 15, 1958).
[343] KOROLEV, L. N.: „Coding and Compression of Codes." *C. R. Acad. Sci. U. R. S.S. Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.* **113.** 760—761 (Apr. 1, 1957). Fordítás: JACM **5.** No. 4.
[344] KOTELNIKOV, V. A.: The Theory of the Potential Noise-Proof Feature Gei 1956.
[345] KRAMER, H. P.—MATHEWS, M. V.: „A Linear Coding for Transmitting a Set of Correlated Signals." *IRE Trans. IT*-**2.** 41. (1956).
[346] KRUSKAL, J. B.: „Golays Complementary Series." (Correspondence). *IRE Trans. IT*-**7.** 273—276 (Okt. 1961).
[347] КУРДЮКОВ, К. П.: „К вопросу надежности релейно-контактных устройств." Автомат. и телемех. **21.** No. 4. 533—541 (1960).
[348] LAEMMEL, A. E.: *Theory of Coding.* Brooklyn, Polytechnic Institute, Final Report R-483—56, Astia ad 105 574 (Jun. 19. 1956).
[349] LAEMMEL, A. E.: Design of Digital Coding Networks. *Proceedings of the Symposium on Information Networks,* **3.** 309—320. Brooklyn, Polytechnic Institute.
[350] LAEMMEL, A. E.: *A General Class of Discrete Codes and Certain of their Properties.* Brooklyn, Polytechnic Institute, Research Report R-459—55, Astia 111—191 (Jan. 11, 1956).
[351] LAEMMEL, A. E.: *A General Class of Codes and their Physical Realization.* Res. Rep. R-437—55. Pib.-369 (Jul. 1955).
[352] LAEMMEL, A. E.: *A General Class of Discrete Codes.* Res. Rep. R-459—55. Pib. 389. AFCRC-TN-56—581 (Jan. 1956).
[353] LAEMMEL, A. E.: „Efficiency of Noise-Reducing Codes." *Communication Theory.* Edited by Willis Jackson N. Y. Academic Press. 111—118 (1953).

[354] Lawton: „Theoretical Error Rates of Differentially Binary and Kineplex Data Transmission Systems." *IRE* 333—334 (Febr. 1959).
[355] Lebow, I., et. al.: „Application of Sequential Decoding to Highrate Data Communication on a Telephone Line." *IRE Trans. IT*-**9.** 124—126 (Apr. 1963).
[356] Lee, C. Y.: „Some Properties of Nonbinary Error-Correcting Codes." *IRE. Trans. IT*-**4.** 77—82 (1958).
[357] Левенштейн, В. И.: „Об одном классе систематических кодов." Докл. Акад. Наук. СССР. 131. No. 5. 1011—1014 (1960).
[358] Lipp, J. P.: „Upper Bounds For Error Detecting and Correcting Codes." *IRE Trans. IT*-**6.** pp. 557—558 (1960).
[359] Lipp, J. P.: *Asymptotic Coding Performance of Frequency Shift Keying Signals Under Noncoherent Reception.* Internal Memorandum, G. E. Advanced Electronics Center. Ithaca, N. Y. (March. 1962).
[360] Lloyd, S. P.: „Binary Block Coding." *Bell System Techn.* J. **36.** 517—535 (1957).
[361] Lomnicki, Z. A.: „The Asymptotic Distributions of Estimators of the Amount of Transmitted Information." *Inf. and Control* **2.** 260—284 (Sept. 1959).
[362] Löfgren, L.: „Automata of High Complexity and Methods of Increasing Their Reliability by Redundancy." *Information and Control* (May 1958).
[363] Lucal, H. M.: „Arithmetic Operations for Digital Computers Using a Modified Reflected Binary Code." *IRE Trans. E. C.* 449—457 (Dec. 1957).
[364] Lum, M. D.: *A Comparison of An Error-Correcting Eight-Unit Code with Other Teleprinter Codes for Binary Transmission and Ternary Reception.* Wright Air Dev. Center, U. S. Dept. of Commerce, Wash., D. C. PB151659.
[365] McDonald, J. E.: *Constructive Coding Methods for the Binary Symmetric Independent Data Transmission Channel.* M. S. Thesis, Dep. of Electrical Engineering, Syracuse Univ., Syracuse, N. Y. (1958).
[366] MacDonald, J. E.: „Design Methods for Maximum-Minimum-Distance Error-Correcting Codes." *IBM. J. Res. Develop.* **4.** 43—57 (1960).
[367] MacWilliams, J.: „Error-Correcting Codes for Multiple Level Transmission." *Bell. Syst. Techn. J.* **40.** 281—308 (Jan. 1961).
[368] MacWilliams, J.: „A Theorem on the Distribution of Weight in a Systematic Code." *Bell. Syst. Techn. J.* **42.** 79—94 (Jan. 1963).
[369] Maier, E. A.: *A Class of Error-Correcting Codes over a Finite Field.* Technical Memorandum No. TM73—60.29. Sylvania Amherst Engineering Lab., (Aug. 1960).
[370] Мамиконов, А. Г.: „Методика составления кодовых комбинаций для многоэлементных кодов с многобуквенным алфабетом." Автоматика и телемеханика 24. 1279—1283 (1963).
[371] Mandelbrot, B.: „Theorie la Pre-Correction de Transmission Theorem de A. Feinstein." *Ann. Telecommun.* 10. 122—134 (1955).
[372] Mann, H. B.: *Analysis and Design of Experiments.* Dover, New York, (1949).
[373] Mann, H. B.: „On the Number of Information Symbols in Bose-Chaudhuri Codes." Math. Res. Center. Univ. of Wisconsin, Madison, MRC *Techn. Summary Rept.* No. 249. (Aug. 1961). Valamint: *Information and Control* 153—162 (1962).
[374] Mandelbrot, B.: „On Recurrent Noise Limiting Coding." Brooklyn Information Network Symp. 205. 1954.
[375] Marcovitz, A. B.: „Sequential Generation and Decoding for the P-nary Hamming Code." *IRE Trans. IT*-**7.** 53—54 (1961).
[376a.] Marcus, M. P.: Doubling the Efficiency of the Load Sharing Matrix Switching IBM J. Research Develop. 194—196 (1959).
[376b.] Marcus, M. P.: Minimum Polarized Distance Codes. IBM J. Research Develop. 241—248. (July, 1961)
[377] Marcus, R. S.—Schützenberger, M. P.: „Full Decodable Code-Word Sets." *IRE Trans. IT*-**5.** 12—14 (March. 1959).
[378] Marsh, R. W.: *Table of Irreducible Polynomials Over GF(2)Through Degree* 19. NSA, Washington, D. D. (1957).
[379] Massey, J. L.: *Treshold Decoding.* M. I. T. Process, Cambridge Mass (1963).
[380] Матюхин, Н. Я.: „Линейные преобразования двоичных кодов." Автоматика и телемеханика 19. No. 8, 776—787 (1958). Angol fordítás. *Automation and Remote Control.* 776 (May, 1959).
[381] Mattson, H. F.: „Some Remarks on Cyclic Codes." Engineering Note, Applied Research Laboratory, Sylvania, Waltham, Mass. (Apr. 28, 1961).

[382] MATTSON, H. F.: *On the (41, 21) Cyclic Code Over GF(2).* Applied Research Lab, Sylvania Elec. Systems, (Par. 1962).

[383] MAUCHLY, J. W.: Error Checking Device. US. Patent 3,105.955.

[384] MCCARTHY, J.: „Measures of the Value of Information." *Proc. Nat. Acad. Science* **42.** 654—655 (Sept. 1956).

[385] MCCLUSKEY, E. J.: „Error-Correcting Codes-A Linear Programming Approach." *Bell System Techn. J.* **38.** 1485—1512 (1959).

[386] MCCLUSKEY, E. J., BARTEE, T. C.: *A Survey of Switching Circuit Theory.* 2. fej. 13—30.

[387] MCMILLAN, B.: „An Elementary Approach to the Theory of Information." *SIAM* Rev. 211—229 (Jul. 1961).

[388] MCMILLAN, B.: „Two Inequalities Implied by Unique Decipherability." *IRE Trans.* **IT-2.** 115—116 (Dec. 1956).

[389] MEALY, G. H.: „A Method for Synthesizing Sequential Circuits." *Bell System Technical Journal,* **34.** 1045—1079. (1955).

[390] MEGGITT, J. E.: „Error Correcting Codes for Correcting Bursts of Errors." *IBM J. Research Develop.,* **4.** 329—334 (1960).

[391] MEGGITT, J. E.: „Error-Correcting Codes and their Implementation for data Transmission Systems." *IRE Trans.* **IT-7.** 234—244 (Oct. 1961).

[392] MEGGITT, J. E.: „Error-Cerrecting Codes for Correcting Bursts of Errors." *Trans. AIEE* **80.** *(Commun. and Electronics)* 708—711 (Jan. 1961).

[393] MELAS, C. M.: „A New Group of Codes for Correction of Dependent-Errors in Data Transmission." *IBM J. Research Develop.* **4.** 58—65 (1960).

[394] MELAS, C. M.: „A Cyclic Code for Double Error Correction." *IBM J. Research Develop.* **4.** 364—366 (1960).

[395] MELAS, C. M.: „Reliable Data Communication through Noisy Media." *Trans. AIEE* **80.** *(Comm. and Electronics)* 501—504 (Nov. 1961).

[396] MELAS, C. M.: „Codes Lineaires pour la correction d'erreurs." *C. R. Acad. Sci. Paris* **255.** 1491—1493 (1962).

[397] MELAS, C. M.: „Codes Autocorrection de Redundance $m(2m + 1)$." *C. R. Acad. Sci. Paris* **255.** 1569—1571 (1963).

[398] MELPAR, I.: „Teletypewriter Error-Correcting Group." *An/GGA- Radc. TR*-166. Astia ad 97 960 (Oct. 1956).

[399] MERTZ, P.: „Information Theory Impact on Modern Communication." *AIEE Paper* 57—635. *Commun. and Electr.* No. 32. (Sept. 1957).
Electr. Eng. **76.** No. 8., 9., 659—664, 773—776, (August, Sept. 1957).

[400] МЕШКОВСКИЙ, К. А.: „Помехоустойчивые коды." *Электросвязь* 11. No. 8. 3—12(1957).

[401] МЕШКОВСКИЙ, К. А.: „Оптималъные и близкие к ним двоичные коды." *Электросвязь.* 12. No. 5—15 (1958).

[402] METZNER, J. J.—MORGAN, K. C.: „Coded Feedback Communication System." *Trans. AIEE* **81.** *(Commun. and Electronics)* 643—647 (Jan. 1962).

[403] MINNICK, R. C.: „Linear-Input Logic." *IRE Trans. EC.* 10, pp. 6—16 (March. 1961).

[404] MINNICK, R. C.: „Synthesis of Linear-Input Logic by the Symplex Method." *Sixth Annual Symp. on Computers and Data Processing of the Denver Res. Inst.,* Denver, Colo, (Jul. 30. 1959).

[405] МИРОНЧИКОВ, Е. Т.: „Об одном классе кодов с исправлением двойных ошибок и его реализации." Сб. работ по вопр. электромехан. Инст. электромехан. Гос. ком.-та сов. мин. СССР по Автоматиз. и Машиностр. No. 9. 251—255 (1963).

[406] МИРОНЧИКОВ, Е. Т. и КОЛЕСНИК, В. Д.: „Об арифметических корректирующих кодах." Радиотехника и электроника. No. 1. 8—15 (1963).

[407] MITCHELL, M.: *Performance of Error-Correcting Codes.* General Electric Tis Report No. R 61ELC 78 (Nov. 1961)

[408] МИТРЯЕВ, Е. В.: О передаче телеметрической информации при помощи групповых кодов. Радиотехника и электроника 8. No. 6. 923—929 (1963).

[409] MOORE, E. F.: „Gedanken-Experiments" on Sequential Machines." Shannon, C. E.—McCarthy, I. (ed.): *Automata Studies,* 34, Princeton (1956), 129—153.

[410] MOORE, E. F.: „Constant-Ratio Code and Automatic-RQ on Transoceanic HF Radio Service." *IRE Trans. CT*—**8.** 72—75 (March, 1960).

[411] MOORE, J. B., RAU, D. S.: „Code Transmission and Reception." Keith Henney, ed., *Radio Engineering Handbook,* N. Y.: McGraw Hill Book Co (1950).

[412] MOSS, M. J.: *Implementation of the Bose-Chaudhuri Error-Correcting Codes.* M. S. Thesis, Dept. of Elect. Eng. Univ. of Flo. Gainesville (Jun. 1961).

[413] Muller, D. E.: *Metric Properties of Boolean Algebra and their Application to Switching Circuits*. Univ. of Illinois: Digital Computer Lab. Report No. 46 (Apr. 1953).
[414] Muller, D. E.: „Application of Boolean Algebra to Switching Circuit Design and to Error Detection." *IRE Trans.* **EC-3.** 6—12 (1954).
[415] Muroga, S.: „Logical Elements on Majority Decision Principle and Complexity of their Circuit." *Proc. Internatl. Conf. on Inf. Processing,* Paris, 1959. 400—407, (1960).
[416] Mussard, M. E.: Decoders. U.S. Patent 3,100.257.
[417] Nadler, M.: „Equi-Distant Codes (E-codes) and their Construction." *Stroje na zpracovoni informaci* **6.** 61—70 (1958).
[418] Nadler, M.: „Some Questions of Computer Reliability through Redundancy." *Stroje na zpracovoni informaci* 37—50 (1959).
[419] Nadler, M.: *Topics in Engineering Logic*. Pergamon Press, Oxford 102—135 (1962).
[420] Nadler, M.: „A 32-Point $N = 12$, $D = 5$ Code." *IRE Trans.* **IT-8.** 58 (Jan. 1962).
[421] Nadler, M.—Sengupta, A.: „Shift Register Code for Indexing Application." *Comm. of the ACM* 40 (1959).
[422] Neumann, J.: *Probabilistic Logics*. California n stitute of Technology, 1952. — Automata Studies, Shannon, C. E., McCart y, J., Princeton, University Press (1956).
[423] Neumann, P. G.: *Funktionale Prefix Cod e als Grundlage der Praktischen Verschlüsselung*. Dissertation. Darmstadt (196).
[424] Neumann, P. G.: „Codes auf der Grundlage von Schaltfunktionen und ihre Anwendung in der Praxis der Verschlüsselung." *NTZ* 254—261, 307—312 (1961).
[425] Neumann, P. G.: „Efficient Error-Limiting Variable-Length Codes." PH. D. Dissertation. Div. of Engr. and Applied Phys., Harvard University (May. 1961). *On the Logical Design of Noiseless Load-Sharing Matrix Switches.* Princeton Univ. Conference on Logical Design Theory and Switching Circuits (Jan. 4, 1962).
[426] Neumann, P. G.: „Efficient Error-Limiting Variable-Length Codes I., II.." *IRE Trans.* **IT-8.** 292—304 (Jul. 1962). 206—266 (Sept. 1962).
[427] Neumann, P. G.: „Encoding and Decoding for Cyclic Permutation Codes." *IRE Trans.* **EC-11.** 507—511 (1962).
[428] Neumann, P. G.: „On the Logical Design of Noiseless Loadsharing Matrix Switches." *IRE Trans.* **EC-11.** 1—6 (Jun. 1962).
[429] Neumann, P. G.: „A Note Cyclic Permutation Error-Correcting Codes." *Information and Control* **5.** 72—86 (March, 1962).
[430] Neumann, P. G.: „Error Limiting Coding Using Information-Lossless Sequential Machines." *IEEE Trans.* **IT-10.** 108—111 (1964).
[431] Norwood, L.: „Upper Bounds for Error-Detecting and Error-Correcting Codes." *IRE Trans.* **IT-8.** P. 58. (Jan. 1962).
[432] Новик, Л. А.: „К возможным методом эффективного кодирования бинарных последовательностей." Электросвязь No. 4. 64—69 (1962).
[433] O'Brien, J. A.: „Cyclic Decimal Codes for Analog-to-Digital Converters." *Trans. AIEE, Comm. and Electronics* **75.** 120—122 (May. 1956).
[434] O'Brien, J. A.: „Unit-Distance Binary Decimal Code Translators." *IRE Trans. EC.* 122—123 (Jun. 1957).
[435] Ольдерогге, Г. Б.: „О некоторых специальных корректирующих кодах матричного типа." Радиотехника 18. No. 7. 14—19 (1963).
[436] Oleksiak, R. E.: Checking System. U. S. Patent 3,100.888.
[437] Oliver, B. M.: „Efficient Coding." *Bell Syst. Tech. J.* **31** (1952) 724.
[438] Ostianu, V. M.: „A Class of Checking Schemes." *Bull Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumania* **2.** 319—329 (1958).
[439] Ostianu, V. M.: „Linear Coding for Non-Binary Error Correcting Codes." *Mathematica* (Cluj) **2.** 25 291—298 (1960).
[440] Остиану, В. М.: „О схемам корректоров бинарных сигналов." Автомат. и телемех. 21. No. 5. 615—623 (1960).
[441] Ostianu, V. M.: Construction of Non-Binary Error-Correcting Codes and an Estimate of the Number of their Signals (oroszul). *Проблемы Передачи Информации.* No. 10. 42—48 (1961).
[442] Ott, F.: „Automatische Fehler-Detektor und Korrektur Anlage für Fernschreibverbindungen." *Basler Mitt.* **15.** 1—7 (1956). *Techn. Mitt.* P. T. T. **34.** 223—229 (1956), 376—381 (1955).

[443] PALEY, R. E. A. C.: „On Orthogonal Matrices." *J. of Math. and Physics*, 311—320 (1933).
[444] Parke Math. Lab. Staff.: *A Catalog of Binary Systematic Codes*. Technical Memorandum No. 7 (Sept. 1958).
[445] PAULL, M. C.—MCCLUSKEY, E. J. Jr.: „Boolean functions Realizable with Single Threshold Devices." *Proc. IRE*. vol. 48. pp. 1334—1337 (Jul. 1960).
[446] PERRY, K. M.: „An Error-Correcting Encoder and Decoder for Phone Line Data." *IRE Wescon Conv. Record*, Pt. 4. 21—26 (1949).
[447] PERRY, K. M.—WOZENCRAFT, J. M.: „SECO: A Self-Regulating Error-Correcting Coder-Decoder." *IRE Trans.* **IT-8.** 128—135 (Sept. 1962).
[448] PETERSON, W. W.: „On Checking an Adder." *IBM J. Research Develop.* **2.** 166—168 (1958).
[449] PETERSON, W. W.: „An Experimental Study of a Binary Code." *Trans. AIEE* 77. part. I. Comm. and Elect. 388—392 (1958).
[450] PETERSON, W. W.: „Encoding and Error-Correction Procedures for the Bose-Chaudhuri Codes." *IRE Trans.* **IT-6.** 459—470 (1960).
[451] PETERSON, W. W.: „Binary Coding for Error Control." *Proc. National Electronics Conference* **16.** 15—21 (1960), *Com. and Electr.* 648—652 (Jan. 1962).
[452] PETERSON, W. W.: *Error Correcting Codes*. M. I.T. Technology Press, Cambridge Mass. and Wiley, New York. N. Y. (1961).
[453] PETERSON, W. W.: „Bounds for Error-Correcting Codes." *IRE Trans.* **IT-8.** 60. (Jan. 1962).
[454] PETERSON, W. W.: „Error-Correcting Codes." *Scientific American*, **206.** No. 2. 96—108 (Febr. 1962).
[455] PETERSON, W. W., BROWN, D. T.: „Cyclic Codes for Error Detection." *Proc. IRE* **49.** 228—235 (1961).
[456] PETERSON, W. W., MASSEY, J.: „Coding Theory." *IEEE Transactions IT* 223—229 (1963).
[457] PETERSON, W. W., RABIN, M. O.: „On Codes for Checking Logical Operations." *IBM J. Research Develop.* **3.** 163—168 (1959).
[458] ПЕТРОСЯН, А. В., МНАЦАКАНЯН, Б. С. и БОЗОЯН, Ш. Е.: „Некоторые свойства кода Хэмминга." Доклады Академии Наук Армянской ССР 37. No. 1. 3—6 (1963).
[459] ПЕТРОВСКИЙ, А. М.: *Сборник Статей.* Коды с Обнаружением и Исправлением Ошибок (1955).
[460] PETROVSKIJ, A. M.: *Error Detecting and Correcting Codes*. Moscow, Foreign Literature Press (1956).
[461] PHISTER, M.: *Logical Design of Digital Computers*. John Wiley (1958).
[462] PLESS, V.: „Power Moment Identities on Weight Distributions in Error-Correcting Codes." *Information and Control* 147—152 (1963).
[463] PLOTKIN, M.: *Word Checks for Detecting Two Errors*. University of Pennsylvania, Moore School Research and Development Report TDT 51—35 (May. 1951).
[464] PLOTKIN, M.: „Binary Codes with Specified Minimum Distance." *IRE Trans*, **IT-6.** 445—450 (1960)., valamint *Research Division Report 51—20 Univ. of Pennsilvania* (Jan. 1951).
[465] PML Staff.: *Annotated Bibliography on Error Correcting Codes*. Scientific Report No. 4. Communcations Lab. U. S. A. F. (Dec. 1961).
[466] ПОПОВ, О. В.: „Об одном способе исправления пакетов ошибок." Пробл. передачи инф. 15. 61—70 (1963).
[467] ПОВАРОВ, Г. Н.: „Геометрия булевых функций и самокорректирующихся кодов с точки зрения эрлангенской программы." Пробл. передачи инф. 10. 35—41 (1961).
[468] PRANGE, E.: *Cyclic Error-Correcting Codes in Two Symbols*. AFCRC-TN-57—103 Air Force Cambridge Research Center, Cambridge Mass. (Sept. 1957).
[469] PRANGE, E.: *Some Cyclic Error-Correcting Codes with Simple Decoding Algorithms*. AFCRC-TN-58—156 Air Force Cambridge Research Center, Bedford, Mass. (1958).
[470] PRANGE, E.: *The Use of Coset Equivalence in the Analysis and Decoding of Group Codes*. AFCRC-TR-59-164 Air Force Cambridge Research Center, Cambridge Mass. (Jun. 1959).
[471] PRANGE, E.: *The Role of Coset Equivalence in the Analysis and Decoding of Group Codes*. Techn. Note AFCRC-TR-59—164 (Jun. 1959).
[472] PRANGE, E.: *Step-By-Step Decoding in Group with a Weight Function* (part 1) AFCRL 716. Electronics Research Directorate, Airforce Cambridge Research Labs. (Aug. 1961).

[473] Prange, E.: „The Use of Information Sets in Decoding Cyclic Codes." *IRE Trans.* **IT-8.** 5—9, (Sept. 1962).
[474] *Printing Telegraph Codes.* IT and T. Corp. Ref. Data for Radio Engineers, Fourth Edition, 844 (1956).
[475] Progress in Information Theory in the U. S. A., 1957—1960 (Part. I). Information Theory and Coding. *Trans. IRE* **IT-7.**, 128—131 (Jul. 1961).
[476] Rada T.: „Lineáris hibajelző és hibajavító kódok és berendezések." — Ipari Elektronikus Mérés és Szabályozás Szimpózium 1965. — Budapest, 1965.
[477] Радченко, А. Н. и Филиппов, В. И.: „Сдвигающие регистры с логической обратной связью и их использование в качестве счетных и кодирующих устройств." Автомат.. и телемех. 20. No. 11. 1507—1514 (1959).
[478] Радченко, А. Н.: „Кодовые кольца как способ представления кодовых множеств" Автомат. и телемех. 20. No. 7. 970—977 (1959).
[479] Ralston, A.: „Error Detection and Error Correction in Real Time Digital Computers." *Proc. Western Joint Computer Conf.* 179—188 (Febr. 1957).
[480] Ray Chaudhuri, D. K.: „On the Construction of Minimally Reliable Designs." *B. S. T. J.* 40. pp. 595—612 (March. 1961).
[481] Reed, I. S.: *A Class of Multiple-Error-Correction Codes and the Decoding Scheme.* M. I. T. Lincoln Lab. Techn. Report. No. 44. (Okt. 9. 1953).
[482] Reed, I. S.: „A Class of Multiple-Error-Correcting Codes and the Decoding Schemes." *IRE Trans.* **MIT-4.** 38—49 (1954).
[483] Reed, I. S., Solomon, G.: „Polynomial Code." Lincoln Lab. M. I. T. No. JA1280. Bemutatva: *UNESCO Inf. Processing Conf.*, Paris (1959. nyarán).
[484] Reed, I. S., Solomon, G.: „Polynomial Codes over Certain Finite Fields." *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **8.** 300—304, 16—21 (1960).
[485] Reed, I. S., Stewart, E. M.: „Note on the Existence of Perfect Maps." Rand P-2178, valamint *IRE Trans.* **IT-8.** No. 1, (1962).
[486] Reiffen, B.: *Encoding and Decoding for the Discrete Memoryless Channel.* Ph. D. Dissertation, M. I. T., (Aug. 1960).
[487] Reiffen, B.: *Sequential Encoding and Decoding for the Discrete Memoryless Channel.* Ph. D. Thesis, Dep. of Electrical Engineering, M. I. T. Cambridge, Mass (1960).
[488] Reiffen, B.: *A Lower Bound for the Sum of Independently Distributed Continuous Random Variables.* Lincoln Laboratory Report 25G-1 (Okt. 26, 1961).
[489] Reiffen, B.: „Sequential Decoding for Discrete Input Memoryless Channels." *IRE Trans.* **IT-8.** 208—221 (Apr. 1962).
[490] Reiffen, B., Schmidt, W. G., Yukin, H. L.: „The Design of an Error-Free Data Transmission System for Telephone Circuits." *Communication and Electronics,* 226—231 (July, 1961), valamint *Lincoln Laboratory Report* 25GOO29.
[491] Reiger, S. M.: „Error Rates in Data Transmission." *Proc. IRE,* 919—920 (May, 1958).
[492] Reiger, S. M.: *Codes for the Correction of Clustered Errors.* Rand Corporation Report P-1677 (Apr. 21. 1959).
[493] Reiger, S. M.: „Codes for the Correction of Clustered Errors." *IRE Trans,* **IT-6.** 16—21 (March. 1960).
[494] Reza, F. M.: *An Introduction to Information Theory.* McGraw-Hill (1961).
[495] Richards, R. K.: *Arithmetic Operations in Digital Computers.* D. van Nostrand Co. Inc., New York (1955).
[496] Rice, S. O.: „Communication in the Presence of Noise, Probability of Error of Two Encoding Schemes." *Bell. Syst. Techn. J.* **29.** 60 (1950).
[497] Riordan, J.: *An Introduction to Combinatorial Analysis.* John Wiley and Sons Inc. New York, (1958).
[498] Robertson, E. J.: *Error Detection and Correction in Binary Parallel Digital Computers.* Digital Computer Lab., Univ. of Illinois, Urbana Ill. Electronic Digital Comp., Internal Rep. **No. 37.** 70—81 (1952).
[499] Rosen, L.: „Characteristics of Digital Codes." *Control Engineering,* **6.** 115—119, (Dec. 1959).
[500] Rubinoff, M.: „N-dimensional Codes for Detecting and Correcting Multiple Errors." *Comm. ACM* **4.** 545—551 (Dec. 1961).
[501] Rudolph, L.: *Easily Implemented Error Correction Encoding-Decoding.* General Electric Co. Oklahoma City, Okla., Rept. 62MCD2; (1962).
[502] Sacks, G. E.: „Multiple Error Correction by Means of Parity Checks." *IRE Trans.* **IT-4.** 145—147 (1958).

[503] Sally, P.: „Some Considerations on Matrices of Zeros and Ones." Parke Math. Labs. Final Report, Air Force Contract 3471 (Apr. 1961).
[504] Sardinas, A. A.: *IBM Self-Checking Number System.* Burroughs Corporation Research Center, Technical Memo. TM-54—115 (May, 1954).
[505] Sardinas, A. A.: *Bounds on Minimum Distance for Product Codes with Parity Check Constraints.* Ph. D. Dissertation Univ. of Pennsylvania, Philadelphia (1962).
[506] Sardinas, A. A., Patterson, G. W.: „A Necessary and Sufficient Condition for Unique Decomposition of Encoded Messages." *IRE Conv. Record* P. 8. 104 (1953).
[507—508] Шастова, Г. А.: „Исследование помехоустойчивости передачи команд телеуправления методами теории потенционалъной помехоустойчивости I—II." Автоматика и телемеханика 16. No. 4. 344—355 (1955), 17. No. 5. 437—434 (1956).
[509—510] Шастова, Г. А.: „О помехоустойчивости кода Хэмминга." Радиотехн. и электр. 19—26 (1958).
[511] Schatzoff, M., Harding, W. B.: „A Mathematical Model for Determining the Probability of Undetected Errors in Magnetic Tape Systems." *IBM Journal* **1.** 177—180 (Apr. 1957).
[512] Schauffler, R.: „Über die Bildung von Codenworten." *Arch. Elek. Übtragung* **10.** 303—314 (1956).
[513] Scherer, E. H.: „An Error-Correcting Code for Quaternary Data Transmission." *Communication and Electronics.* 231—236 (jul. 1961).
[514] Schmandt, F. D.: *Single Burst-Error-Correction Capabilities of Binary Cyclic Codes.* Rome Air Development, Center Griffiss AFB HD-418725 (Aug. 1963).
[515] Schneider, S., Wagner, D. H.: „Error Detection in Redundant System." *Proc. WICC* 115— (1957).
[516] Scholten, C. S.: *Zelf-controlerende Codes.* Rapport Mathem. Centrum, ZW 1958—011.
[517] Schutzenberger, M. P.: „Sur un Problème de Codage Binaire." *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **2.** 125—127 (1953).
[518] Schutzenberger, M. P.: „Une Theorie Algebrique du Codage." *Compte Rend. Acad. Sci. Paris* **242.** 862—864 (1956).
[519] Schutzenberger, M. P.: „On an Application of Semi-Group Methods to Some Problems in Coding." *Trans. IRE* **IT-2.** (Sept. 1956).
[520] Schutzenberger, M. P., Marcus, R. S.: „Full Decodable Code-Word Sets." *IRE Trans.* **IT-5.** 12—15 (1959).
[521] Schwartz, E. S.: *An Adaptive Information Transmission System Employing Minimum Redundancy Word Codes.* Armour Research Foundation ASD-TDR-620265 (1963).
[522] Sellers, F. F.: „Bit loss and gain Correction Code." *IRE Trans.* **IT-8.** 35—38 (Jan. 1962).
[523] Шестаков, В. И.: „Перфокарточный метод синтеза многотактных систем многопозиционных реле." Автомат. и телемех. 20. No. 11. 1496—1506. (1959).
[524] Seveback, L. L.: „Data Input Equipment." *W. E. Engineer* **3.** No. 1. 18—19 (Jan. 1959).
[525] Shannon, C. E.: „General Treatment of The Problem of Coding." *IRE Transactions IT*-**1.** 102—104 (Febr. 1953).
[526] Shannon, C. E.: „A Mathematical Theory of Communication." *Bell Syst. Techn. Journal* 27. 379—423, 623—656, (July, Oct. 1948). Bell Telephone System Monograph B-1598, valamint függelékkel ugyanazon címmel Warren Weaverrel közösen. University of Illinois Press (1949).
[527] Shannon, C. E.: „Certain Results in Coding Theory for Noisy Channels." *Information and Control* **1.** 6—25 (Sept. 1957).
[528] Shannon, C. E.: „Channels with side Information at the Transmitter." *IBM J. Res. and Dev.* **2.** 289—293 (Okt. 1958).
[529] Shannon, C. E.: „Probability of Error for Optimal Codes in a Gaussian Channel." *Bell Syst. Techn. Journal,* **38.** 611—656 (May, 1959).
[530] Shannon, C. E.: „Two Way Communication Channels." *4th Berkeley Symposium in Probability Theory.*
[531] Shapiro, H. S., Slotnick, D. L.: „On the Mathematical Theory of Error-Correcting Codes." *IBM J. Research Develop.* **3.** 25—34 (1959).
[532] Sherman, S.: *A Bibliography on the Mathematics of Shifting Code Counters.* RM-57—87 — Burroughs Corp., Paoli, Pa. 17 (Apr. 29, 1957).
[533] Shrikhande, S. S.: „A Note on Minimum Distance Binary Codes." *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* 94—97 (1962).
[534] Siebert, W. M.: „A Radar Detection Philosophy." *IRE Trans.* **IT-2.** 3204 (1956).

[535] Siemens—Halske Aktiengesellschaft: Schaltungsanordnung zur Feststellung von Fehlern in Zwischenleitungsanordnungen in Fernmeldevermittlungs, inbesondere Fernsprechwählanlagen. D. P. 1,154.528.
[536] Silverman, R. I.: „On Binary Channels and their Cascades." *IRE Trans.* **IT-1.** 19—27 (1955).
[537] Silverman, R. A., Balser, M.: „Coding for Constant-Data-Rate Systems." *Trans. IRE* **IT-4.** 50—63 (1954).
[538] Silverman, R. A., Balser, M.: „Coding for Constant-Data-Rate Systems. — Part I. A New Error-Correcting Code." *Proc. IRE* **42.** No. 9. 1428—1435 (Sept. 1954).
[539] Simon F.: *Távbeszélőtechnika.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
[540] Singleton, R. C.: „Maximum Distance q-nary Codes." *IEEE Trans.* **IT-10.** 116—118 (1964).
[541] Sisson, R. L.: „An Improved Decimal Redundancy Check." *Comm. of ACM.* 10—12 (1958).
[542] Slepian, D.: „A Class of Binary Signaling Alphabets." *Bell System Techn. J.* **35.** 203—234 (1956).
[543—544] Slepian, D.: „A Note on Two Binary Signaling Alphabets." *IRE Trans.* **IT-2.** 84—86 (1956). Orosz fordítás: Сборник Теория Передачи Сообрений (1957).
[545] Slepian, D.: „Some Further Theory of Group Codes." *Bell System Techn. J.* **39.** 1219—1252 (1960).
[546] Slepian, D.: „Bounds on Communication." *BSTJ* 42. 681—708 (May, 1963).
[547] Slepian, D.: Permutation Modulation. Kézirat.
[548] Solomon, G.: *Quaternary Cyclic Codes.* Lincoln Laboratory Group Report, 47GOO22.
[549] Solomon, G.: *A New Class of Codes.* Lincoln Laboratory Report 47. GOO20.
[550] Solomon, G.: *A Weight Formula for Group Codes.* 47G-1. Lincoln Laboratory (Oct. 9. 1961).
[551] Solomon, G.: *Linear Recursive Sequences as Finite Difference Equations.* Lincoln Laboratory Group Report 47. 37. (March. 1960).
[552] Solomon, G.: „A Note on a New Class of Codes." *Information and Control* **4.** 364—370 (Dec. 1961).
[553] Solomon, G.: „A Weight Formula for Group Codes." *IRE Trans.* **IT-8.** 1—4 (Sept. 1962).
[554] Solomon, G., Mattson, H. F.: „A New Treatment of Bose-Chaudhuri Codes." *J. S IAM.* **9.** 654—669 (Dec. 1961).
[555] Stanton, R. G., Sprott, D. A.: „A Family of Difference Sets." *Canadian J. Math.* **10.** 73—77 (1958).
[556] Stein, J. F.: „Prime Residue Error Correcting Codes." *IEEE Trans.* **IT-10.** 170 (1964).
[557] Stern, T. E., Friedland, B.: „Application of Modular Sequential Circuits to Single-Error-Correcting p-nary Codes." *IRE Trans.* **IT-5.** 114—123 (1959).
[558] Stevens, R. F., Bouricius, W. G.: *The Heuristic Generation of Large Error Correcting Codes.* IBM Research Center, Yorktown Heights, N. Y. (Aug. 1959).
[559] Stiffler, J. J.: „Synchronization Methods for Block Codes." *IRE Trans.* **IT-8.** 25—34 (Sept. 1962).
[560] Stiffler, J. J.: *Self Synchronizing Codes for the Continuous Channel.* Bemutatva: URSI- IRE Meeting, Washington, D. C. (Apr. 30.—May. 3. 1962).
[561] Stone, J. J.: „Multiple Burst Error Correction." *Information and Control* **4.** 324—331, (Dec. 1961).
[562] Stone, J. J.: „Multiple-Burst Error-Correction with the Chinese Remainder Theorem." *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 74—81 (1963).
[563] Storch, P.: „Evolution of Long-Distance Typeprinting Traffic by Wire and Radio." *E. T. Z.* **55.** 109—112 (Febr. 1, 1934). 141—143 (Febr. 8, 1934).
[564] Strait, P. T.: „A Lower Bound for Error-Detecting and Error-Correcting Codes." *IRE Trans.* **IT-7.** 114—118 (1961).
[565] Stram, O. B.: „Arbitrary Boolean Functions of *N* Variables Realizable in Terms of Threshold Devices." *Proc. IRE.* 210—220 (Jan. 1961).
[566] Stumpers, F. L.: „A Bibliography of Information Theory Communication Theory Cybernetics". *IRE Trans.* **IT-2.** (Nov. 1953).
[567] Stumpers, F. L.: „A Bibliography of Information Theory Communication Theory Cybernetics." *IRE Trans.* **IT-1.** 31—47 (Sept. 1955).

[568] STUMPERS, F. L.: „A Bibliography of Information Theory Communication Theory Cybernetics." *IRE Trans.* **IT-3.** 150—166 (Jun. 1957).

[569] STUTT, C. A.: *Regular Polyhedron Codes.* Gen. El. Res. Lab. Rep. No. 59-RL-2202. Schenectady (March. 1959).

[570] STUTT, C. A.: „Information Rate in a Continuous Channel for Regular-Simplex Codes." *IRE Trans.* **IT-6.** 516—522 (Dec. 1960).

[571] СИФОРОВ, В. И.: „О помехоустойчивости систем с корректирующими кодами." Радиотехн. и электр. 1956. No. 2. 131—142.

[572] SZIFOROV, V. I.: „On Noise Stability of a System with Error-Correcting Codes." *IRE Trans.* **IT-2.** 109—114 (Dec. 1956).

[573] СИФОРОВ, В. И.: „Параметры систем бинарного кодирования." *Электросвязь* **11.** No. 1. 3—10 (1957).

[574] СИФОРОВ, В. И.: „К теории идеального кодирования бинарной передачи." Радиотехн. и элект. 1956. No. 4. 407—417.

[575] СИФОРОВ, В. И.: „О наивыгоднейшем использовании кодирующих систем" *Электросвязь* 11. No. 5. 7—14 (1957).

[576] TAKAHASI, H. GOTO, E.: „Application of Error-Correcting Codes to Multi-Way Switching." Bemutatva: *Proc. International Conf. on Information Proc.*, Paris (Jun. 1959).

[577] THOMASIAN, A. J.: „The Metric Structure of Codes for the Binary Symmetric Channel." *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Stat. and Prob.* **1.** 669—679.

[578] THOMASIAN, A. J.: *Error Bounds for Continuous Channels.* Dept. of Electrical Engineering, Univ. of California, Berkeley.

[579] TOOTIL, G. C.: *The Use Cyclic-permutated Chain Codes for Digitises.* Information Proc., UNESCO, Paris 414 (1960).

[580] ТЫЛКИН, М. Е.: „О геометрии Хэмминга единичных кодов." Докл. Акад. наук СССР 134. No. 5. 1037—1040. (1960).

[581] TURIN, G. L.: The Asymptotic Behaviour of Ideal M-ary Systems." *Proc. IRE* 93—94 (Jan. 1959).

[582] TURYN, R.: *Optimum Codes Study.* Sylvania Electronic System Report AFCRC-TR-60—111 (Jan. 23, 1960).

[583] УДАЛОВ, А. П., СУПРИН, Б. А.: Избыточное кодирование при передаче информации Двоичными кодами.

[584] ULRICH, W.: „Non-Binary Error-Correcting Codes." *Bell System Techn. J.* **36.** 1341—1388 (1957).

[585] U. S. Signal Corps. (Unofficial, preliminary): Fieldta. Equipment Intercommunication Characteristics (Febr. 9, 1959).

[586] VALACH, M.: „Kody se Zmenou v Jednom Radu." *Stroje na zpracovni informaci* 39—47 (1957).

[587] ВАРШАМОВ, Р. Р.: „Оценка число сигналов в кодах с коррекцией ошибок." Докл. Акад. наук СССР 117. No. 5. 739—741. (1957).

[588-589] ВАРШАВЕР, Б. А.: „К теории передачи сигналов со многими дискретными значениями." Радиотехника 14. No. 1. 3—13 (1959).

[590] ВАСИЛЬЕВ, Ю. Л.: „О длине цикла в n-мерном единичном кубе." Докл. Акад. наук СССР (1963). 148. No. 4. 753—756. Angol fordításban megjelent: *Soviet Mathematics* — Doklady **4.** No. 1. 160.

[591] VASVÁRI GY.: „Az információ-ábrázolás néhány problémája a digitális technikában." *Mérés és Automatika*, 74—77 (1962).

[592] VASVÁRI GY.:„Néhány példa zavarelhárító kódok alkalmazására." *KSH Ügyvitelgépesítési Főoszt. Közl.* 85—95 (1962).

[593] VERHOEFF, J.: *Niet-Binaire Forte-ontdekkende Codes.* Mathematisch Centrum ZW 1958—014.

[594] VINCENT, G. D.: „Self-checking Codes for Data Transmission." *Western Union Techn. Rev.* **11.** No. 1. 15—21 (Jan. 1957).

[595] VITERBI, A. J.: „On Coded Phase-Coherent Communications." *IRE Trans. SET*-**7** 3—14 (March. 1961).

[596] VOELCKER, H. B. Jr.: Simple Codes for Fading Circuits. *IRE Trans.* **EC-6.** No. 2. 47—53 (Dec. 1958).

[597] WADDEN, W. R.—JONES, D. M.: „An Investigation of Sequential Decoding." *RCA Review* **22.** 522—542 (1961).

[598] WATANABLE, S.: „Binary Coding and Isometric Transformation in a Finite Metric Boolean Algebra." *Rep. Unio. Electric. Commun.* **7.** 14—40 (1955).

[599] WAX, N.: „On Upper Bounds for Error-Detecting and Error Correcting Codes of Finite Length." *IRE Trans.* **IT-5.** 168—174 (1959).

[600] WEEG, G. P.: „Uniqueness of Weighted Code Rrepresentations." *IRE Trans* **EC.** 487–489 (Dec. 1960).
[601] WEINITSCHKE, H.: „On Some Upper Bounds of Importance in Slepian's Theory of Coding." *Parke Mathematical Lab. Techn. Mem.* **15.** Carlisle (Jun. 1957).
[602] WEISS, E.: *A Note on Reed-Muller Codes.* Lincoln Laboratory Group Report 55–16 (Sept. 1959).
[603] WEISS, E.: *Residue Class Rings and Linear Recursive Sequences.* Lincoln Laboratory Report No. 55. G-0024 (May, 1960).
[604] WEISS, E.: „Compression and Coding." Lincoln Laboratory Report No. KK G-0028, valamint *IRE Trans.* **IT-8.** 256–257 (Apr. 1962).
[605—606] WEISS, E.: „Generalized Reed-Muller Codes." *Information and Control* **5.** 213–222 (1962).
[607] WELLS, W. I.: *Decoding of Group Codes for Binary Symmetric Channels.* M. I. T. Lincoln Lab. Rep. 22G-0029, Lexington, Mass. (March. 1960).
[608] WINSOR, P.: „Review of U. S. Magnetic Tape Units." *ICCC Bull.* **4.** 50–52 (1962).
[609] WHITE, G. S.: „Coded Decimal Number Systems for Digital Computers." *Proc. IRE* **41.** 1450–1452 (Oct. 1953).
[610] WHITEMAN, A. L.: „A Family of Difference Sets." *Illinois Jour. of Math.* **6.** 107–121 (March. 1962).
[611] WINOGRAD, S.: *Coding for Logical Operations.* IBM, Yorktown Heights. N. Y.
[612] WINOGRAD, S.—COWAN, J. D.: *Reliable Computation in the Presence of Noise.* M. I. T. Press Cambridge Mass. (1963).
[613] WOLF, C. K.—ELSPAS, B.: „Error-Locating Codes— a New Concept in Error Control." *IEEE Trans.* **IT-9.** 113–117 (Apr. 1963).
[614] WOLFOWITZ, J.: „The Maximum Achievable Length of an Error Correcting Codes." *Illinois J. Math.* **2.** 454–458 (1958).
[615] WOLFOWITZ, J.: „The Coding of Messages Subject to Chance Errors." *Illinois J. Math.* 591–606 (1958).
[616] WOLFOWITZ, J.: „An Upper Bound on the Rate of Transmission of Messages." *Illinois J. Math.* 137–141 (1958).
[617] WOLFOWITZ, J.: „Le plus grande longueur réalisable d'un code correctur d'erreurs." *La Calcul des Probabilités et ses Applications.* Centre National de la Rech. Sci. Paris (1959).
[618] WOOD, F. B.: „Optimum Block Length for Data Transmisson with Error Checking." *Commun. and Electronics,* 855–861 (Jan. 1959).
[619] WOZENCRAFT, J. M.: „Sequential Decoding for Reliable Communication." *IRE National Convention Record* **5.** part 2, 11–25. (March. 1957), valamint: *M. I. T. Res. Lab. of Electronics Rep.* 325, Cambridge, Mass (Aug. 9. 1957).
[620] WOZENCRAFT, J. M., HORSTEIN, M.: „Coding for Two-way Channels." C. CHERRY (Ed.): *Proc. 4-th London Symp. on Information Theory,* Butterworths, Washington D. C. (1961).
[621] WOZENCRAFT, J. M., REIFFEN, B.: *Sequential Decoding.* The Technology Press and J. Wiley and Sons, Inc. New York, (1961).
[622] WYNER, A. D.: „A Note on a Class of Binary Cyclic Codes which Correct Solid-Burst Errors." *IBM J. of Res. and Development,* 68–69 (1964).
[623] WYNER, A. D., BASH, R.: „Analysis of Recurrent Codes." *IEEE Trans.* **IT-9.** No. 3. (1963).
[624] YALE, P. B.: *Error Correcting Codes and Linear Recurring Sequences.* Lincoln Laboratory Group Report 34–77 (Oct. 1958).
[625] YNGVE, V. H.: *Language as an Error Correcting Code.* Quarterly Progress Report, Res. Lab. of Electronics M. I. T. 73–74 (1954).
[626] YOSHIDY, S., TOMARU, K.: „A Channel Selector Applying Error Correcting Codes." *Rev. Elect. Comm. Lab.* **8.** 540–548 (1960).
[627] OULA, D. C., LAEMMEL, A. E.: *General Theory of Signal Compressing Codes.* Research Report R-633–57, PIB. 561, Microwave Research Institute, Polytechnic Institute of Brooklyn, (Sept. 30, 1958).
[628] YOUNG, F. H.: „Analysis of Shift Register Counters." *J. ACM* (Oct., 1958) 385–378.
[629] ZAMANAKOS, A. S.: „Bits of Information." *Commun. and Electronics* No. 36. 197–201 (May. 1958).
[630] ZAREMBA, S. K.: „A Covering Theorem for Abelian Groups." *J. London Math. Soc.* **26** (1951).
[631] ZAREMBA, S. K.: „Covering Problems Concerning Abelian Groups." *J. London Math. Soc.* **27.** 242–246 (1952).

[632] ZETTENBERGER, L. H.: „Cyclic Codes from Irreducible Polynomials for Correction of Multiple Errors." *IRE Trans.* **IT-8.** 13—20 (1962).
[633] ZETTENBERGER, L. H.: „Data Transmission over a Noisy Gaussian Channel." *Trans. of the Royal Institute of Technology,* N. 184, Stockholm, Sweden (1961).
[634] ZIERLER, N.: *Several Binary Sequence Generators.* M. I. T. Lincoln Lab. Techn. Rep. 95, Lexington Mass. (Sept. 1955).
[635] ZIERLER, N.: *On a Variation of the First Order Reed-Muller Codes.* M. I. T. Lincoln Lab. Group Report 34—80, Lexington Mass. (Okt. 1958).
[636] ZIERLER, N.: „Linear Recurring Sequences." *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **7.** 31—48 (1959).
[637] ZIERLER, N.: „On Decoding Linear Error Correcting Codes I." *IRE Trans,* **IT-6.** 450—459 (1960).
[638] ZIERLER, N.: „On Decoding Linear Error-Correcting Codes, II." Bemutatva: *Fourth London Symposiun on Information Theory,* (Aug. 1960)., valamint *M. I. T. Lincoln Lab. Group Report* 55-G-0025 Lexington, Mass. (Apr. 1960).
[639] ZIERLER, N.: *A Class of Cyclic Linear Error-Correcting Codes in* p^m *Symbols.* M. I. T. Lincoln Lab. Group Report 55—19, Lexington, Mass. (Jan. 1960).
[640] ZIERLER, N.: „A Note on Mean Square Weight for Group Codes." *Information and Control* **5.** 87—89 (March. 1962).
[641] ЗЮКО, А. Г.: „Помехоустойчивость и эффективность радиотелеграфной связи с автоматической коррекцией ошибок."
[642] ZIV, J.: „Coding and Decoding for Time-Discrete Amplitude-Continuous Memoryless Channels." *IRE Trans.* **IT-8.** S199-S-205, (Sept. 1962), valamint SC. D. Thesis M. I. T. Dept. of EE (Jan. 1962).
[643] ZOTOVA, E. N.: „Comparative Analysis of Binary Codes with Corrections." *Automation Express,* **1.** No. 5 (Jan. 1959).
International Physical Index, 3—4, Abstracts from Nauchnye Doklady V YS Scholy, *Radiotekhnika I. Elektronika,* No. 1. 37—45 (Jan. March. 1958).

О СВЯЗИ МЕЖДУ КОНЕЧНЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ И ЦИФРОВЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ I

И. ДЕНЕШ и Т. РАДА

Резюме

Работа описывает теорию кодов, обнаруживающих и исправляющих ошибки. Показывает, как применяются важнейшие структуры современной алгебры, напр. векторные пространства, кольца, поля — особенно поля Галуа — для решения практических задач, особенно при построении некоторых цифровых систем. Занимается групповыми кодами, расстоянием Гамминга, генератор-матрицей, матрицей проверки на четность нормальным расположением (матрицей), вектором для проверки четности, важнейшими законами относительно границы Плоткина и Варшамова—Гилберта, кодами Гамминга, другими совершенными и квази-совершенными кодами, и т. п. Авторы описывают важнейшие физические элементы, используемые для осуществления кодов, обнаруживающих и исправляющих ошибки и логические свойства этих элементов, приводят несколько примеров кодирующих и декодирующих устройств. Изложение дополнено богатым, но далеко не полным материалом литературы.

DAS VERHÄLTNIS ZWISCHEN ENDLICHEN STRUKTUREN UND DIGITALEN STROMKREISEN I

von

J. DÉNES und T. RADA

Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt die Theorie der fehleranzeigenden und korrigierenden Code. Es wird gezeigt, wie wichtige Strukturen der modernen Algebra z. B. Vektorräume, Ringe, Körper — insbesondere Galoiskörper — bei der Lösung praktischer Aufgaben, hauptsächlich bei der Planung einiger digitaler Systeme angewendet werden können. Behandelt werden: Gruppen-Code, Hamming-Distanz, Generator-Matrix, Paritäts-Prüfmatrix, Standard-Anordnung, Paritäts-Prüfvektor, die wichtigeren Sätze bezüglich der Plotkin- und der Warschamow—Gilbert—Schranke, Hamming-Code, andere perfekte und quasiperfekte Code, usw.

Die Verfasser besprechen die wichtigsten physikalischen Elemente, die bei der Realisierung von fehleranzeigenden und korrigierenden Code Verwendung finden, und deren logische Eigenschaften; sie geben einige Beispiele für Kodierungs- und Dekodierungsanlagen.

Der Aufsatz wird durch ein ausführliches, aber bei weitem nicht vollständiges Literaturverzeichnis ergänzt.

A NEUTRONLASSÍTÁS FOLYAMATÁBAN FELLÉPŐ ÜTKÖZÉSSZÁM ÁTLAGÁRÓL ÉS SZÓRÁSÁRÓL

MOGYORÓDI JÓZSEF

1. §

Tekintsünk egy végtelen kiterjedésű homogén közeget, az ún. lassító közeget. A nagyenergiájú neutronok a lassító közeg atommagjaival ütköznek és közben energiájuk fokozatosan csökken. Feltesszük, hogy az ütközések rugalmasak és az ütköző partnerek tömegközéppontjához képest nyugvó koordinátarendszerben a szóródás izotróp. Ilyen feltételek mellett annak valószínűsége, hogy egyetlen ütközési aktusban az E_0 energiájú neutron ütközés utáni energiája E-nél ne legyen kisebb, a

$$W(E_0, E) = \int_E^{E_0} \frac{1}{1-\alpha} \frac{dE}{E_0}$$

kifejezéssel egyenlő ($\alpha E_0 \leqq E \leqq E_0$). Az α mennyiség a következőképpen fejezhető ki:

$$\alpha = [(A-1)/(A+1)]^2 ,$$

ahol A a lassító közeg atomsúlya. Bevezetve a letargiának nevezett

$$u = \log \frac{E_0}{E}$$

változót, amely az energiacsökkenésnek megfelelően növekszik, az egyetlen ütközési aktusra jutó, véletlentől függő energiacsökkenésnek megfelel a letargiának a véletlentől függő növekedése. A letargianövekedés eloszlásfüggvényét az előbbiek alapján a

$$W(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0 \\ \dfrac{1-e^{-x}}{1-\alpha}, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq \log \dfrac{1}{\alpha} \\ 1\,, & \text{ha} \quad x > \log \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

adja meg. Az energiáról a letargiára való áttérést a könnyebb matematikai kezelhetőség szempontja sugallja.

A lassítás folyamata a következő: a neutron ütközik az atommaggal, közben energiájának bizonyos hányadát leadja és ütközéskor vagy abszorbeálódik vagy pedig rugalmasan szóródik. Ha szóródás történt, akkor az ütközéskor nyert letargiával rendelkezve a neutron a lassító közegben egyenesvonalú mozgást végez, míg egy újabb atommaggal nem ütközik, s. í. t. Ennek megfelelően bizonyos számú ütközés után vagy abszorbeálódik vagy pedig energiája az ún. termikus energiaszint alá süllyed, ill. letargiája a termikus letargiaszint fölé emelkedik. Maga a neutron pedig lelassul vagyis termikussá válik. Az E_0 kezdeti energia általában igen nagy a termikus energiaszinthez viszonyítva, vagy ami ugyanaz, a termikussá válásig a neutron letargiája igen nagy intervallumon változik. Ezért matematikai kezelhetőség miatt fel szokták tételezni, hogy a neutron letargiája a $(0, +\infty)$ intervallumon változik.

A továbbiak szempontjából bevezetjük még a következő feltételeket, fogalmakat és mennyiségeket. Feltételezzük, hogy a lassító közeg csak egyfajta atommagot tartalmaz. Nem okozna elvi nehézséget, ha a lassító közeg többfajta atommag tökéletes keveréke lenne, ez csak jelöléseinket bonyolítaná. Legyen σ_s az atommag rugalmas szóródási hatáskeresztmetszete, σ_a pedig az abszorpciós hatáskeresztmetszet. Ekkor, mint ismeretes, annak valószínűsége, hogy az ütközés szóródásra vezet

$$\varrho = \frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_a}.$$

E hatáskeresztmetszetek általában függenek a letargia értékétől: $\varrho = \varrho(x)$. Jelölje η_t valószínűségi változó a neutron letargiáját a t időpontban és legyen $\tau_x = \inf\limits_{\eta_t > x} t$. Jelölje $\nu(t)$ a $(0, t)$ időközben történő ütközések számát és legyen $\mu_x = \nu(\tau_x)$. A_x legyen az az esemény, hogy a $(0, \tau_x)$ időközben a neutron nem abszorbeálódik.

Pál Lénárd [1] dolgozatában vizsgálta a $\mathbf{P}(A_x)$ valószínűséget. Ez a befogás (abszorpció) elkerülésének valószínűsége: fizikailag a neutronforrásból kibocsátott monoenergetikus neutronok összességének azt a hányadát adja meg átlagban, amely az x letargiaérték eléréséig nem abszorbeálódik.

Ugyancsak a fentjelzett dolgozatban Pál Lénárd foglalkozott a $\mathbf{P}\{\mu_x = n, A_x\}$ valószínűségek meghatározásával is. $\mathbf{P}\{\mu_x = n, A_x\}$ annak valószínűségét adja meg, hogy a neutron az x letargiaérték eléréséig nem abszorbeálódik és az x letargiaérték eléréséig n-szer ütközik. Dolgozatunk itt kapcsolódik Pál Lénárd dolgozatához. Ugyanis a probléma vizsgálata kapcsán az idézett dolgozatban egy pontatlan meggondolás alapján hibás képlet jelent meg, mely nem helyes konklúziókra vezetett. Ezeket szeretnénk kijavítani, illetőleg az elmélet alapján újabb eredményt hozzájuk fűzni.

2. §

A neutronforrásból való kibocsátás pillanatában a neutron letargiája 0, így az első ütközés a 0 letargiaszinten történik. Legyen az [1] dolgozat jelölései szerint $p_n(x)dx$ annak valószínűsége, hogy az n-edik ütközés utáni pillanatban a neutron letargiája az $(x, x + dx)$ intervallumba esik és az első n ütközés nem vezetett abszorpcióra. Természetesen

$$\int_0^{+\infty} p_n(x)\, dx < 1,$$

mivel a neutron közben abszorbeálódhat is. Nyilván

$$p_1(x)\,dx = \varrho(0)\,w(x)\,dx$$

és $n = 2, 3, \ldots$ esetén a következő rekurziós kifejezés írható fel

$$p_n(x) = \int_0^x p_{n-1}(y)\,\varrho(y)\,w(y)\,dy\,,$$

ahol

$$w(x) = \frac{dW(x)}{dx}\,.$$

Jelölje $v_n(x)$ annak valószínűségét, hogy a $(0, x)$ letargiaintervallumban pontosan n ütközés következett be és a $(0, x)$ intervallumban a neutron nem abszorbeálódott $(n = 1, 2, \ldots)$.

Az [1] dolgozatban az alábbi hibás összefüggés szerepel a $v_k(x)$ és $p_n(x)$ mennyiségek között:

$$v_n(x) = \int_0^x \big(p_n(y) - p_{n+1}(y)\big)\,dy \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Ez az összefüggés a rekurrens folyamatok elméletében ismeretes, azonban jelen probléma tárgyalásánál csak akkor áll fent, ha az abszorpció valószínűsége 0. Ez utóbbi esetet nyilván ki lehet zárni. Nem zérus befogási valószínűség esetén pedig a

$$\sum_{j=0}^{n-1} v_j(x) = \int_x^{+\infty} p_n(y)\,dy$$

helyes összefüggésből a fenti összefüggés nem vezethető le, minthogy

$$\int_0^{+\infty} p_n(y)\,dy < 1$$

és

$$\int_0^{+\infty} p_n(y)\,dy \neq \int_0^{+\infty} p_{n+1}(y)\,dy\,.$$

Az [1] dolgozat e képletből származtatja az ütközésszám és a szórásnégyzet aszimptotikáját is. A $v_n(x)$ valószínűségre vonatkozó helyes képlet a következő:

$$v_n(x) = \int_0^x p_{n-1}(y)\,\varrho(y)\,[1 - W(x - y)]\,dy\,.$$

Valóban, ha a $(0, x)$ intervallumban pontosan n ütközés történik és a neutron a $(0, x)$ intervallumban a befogást elkerülte, akkor az $(n - 1)$-ik, abszorpcióra nem vezető ütközés után a neutron letargiájának valamilyen $(y, y + dy)$ intervallumba kellett esnie (ennek valószínűsége $p_{n-1}(y)\,dy$), ezen intervallumban még egyszer ütköznie kellett (ennek valószínűsége $\varrho(y)$) és ütközés után a neutron letargiájának legalább $(x - y)$-nal kellett növekednie (ennek valószínűsége $1 - W(x - y)$). A gondolat befejezéséhez már csak a teljes valószínűség tételének alkalmazása szükséges.

Ahhoz, hogy a fenti összefüggésből származó becsléseket helyesen el tudjuk végezni, induljunk ki a következőkből. Legyen $P_n(x)$ annak valószínűsége, hogy a neutron letargiája az n-edik ütközés után x-nél nem nagyobb és az első n ütközés nem vezetett abszorpcióra. Ekkor nyilván

$$P_1(x) = \varrho(0)\, W(x)\,,$$

minthogy az első ütközés a 0 letargiaszinten történik. $n = 2, 3, \ldots$ esetén $P_n(x)$ a következő összefüggésnek tesz eleget:

$$P_n(x) = \int_0^x W(x-y)\, \varrho(y)\, dP_{n-1}(y)\,.$$

Ez a képlet a [2] dolgozatban megtalálható, de az előbbi összefüggéshez hasonlóan le is vezethető. Definíció szerint

$$v_n(x) = \mathbf{P}\{\mu_x = n;\ A_x\}\,,$$

melyre a [2] dolgozat alapján a következő áll fenn:

$$\mathbf{P}\{\mu_x = n;\ A_x\} = \int_0^x [1 - W(x-y)]\, \varrho(y)\, dP_{n-1}(y), \quad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

ahol

$$P_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0\,. \end{cases}$$

Mármost $\mathbf{P}(A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu_x = n;\ A_x\}$ és az [1] dolgozatban vizsgált $m(x)$ átlagfüggvényre a következő összefüggés írható fel:

$$m(x) = \mathbf{P}(A_x)\, \mathbf{M}(\mu_x \mid A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}\{\mu_x = n;\ A_x\}\,.$$

Ha a hatáskeresztmetszetek függenek a letargiától, akkor $\mathbf{P}(A_x)$ és $m(x)$ meghatározása igen nehéz. Tekintsük, mint ahogy ezt PÁL LÉNÁRD az [1] dolgozatban tette, a letargiától független hatáskeresztmetszetek esetét. Ekkor $\varrho(x) = \varrho$ (állandó) és a rekurziós képlet alapján

$$P_n(x) = \varrho^n W_n(x)\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

ahol $W_n(x)$ a $W(x)$ eloszlásfüggvény önmagával vett n-szeres kompozíciója és

$$\mathbf{P}\{\mu_x = n;\ A_x\} = \varrho^n\big(W_{n-1}(x) - W_n(x)\big)\,,$$

ahol

$$W_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0\,. \end{cases}$$

Ekkor

$$H_0(x) = \mathbf{P}(A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n\big(W_{n-1}(x) - W_n(x)\big) \tag{1}$$

és

$$H_1(x) = \mathbf{P}(A_x)\, \mathbf{M}(\mu_x \mid A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\varrho^n\big(W_{n-1}(x) - W_n(x)\big)\,. \tag{2}$$

Ezen mennyiségek aszimptotikus alakjának meghatározására képezzük Laplace-transzformáltjaikat. Legyen

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, w(x)\, dx\,, \qquad (s = \sigma + i\tau)\,.$$

Ekkor

$$\varphi(s) = \frac{1 - \alpha^{s+1}}{(1-\alpha)\,(s+1)}\,.$$

Ha $H_0(x)$ Laplace-transzformáltját $g_0(s)$ és $H_1(x)$ Laplace-transzformáltját $g_1(s)$ jelöli, akkor kapjuk, hogy

$$g_0(s) = \frac{\varrho\big(1 - \varphi(s)\big)}{s\big(1 - \varrho\varphi(s)\big)} \qquad (\mathrm{Re}\, s \geqq 0)\,,$$

és

$$g_1(s) = \frac{\varrho\big(1 - \varphi(s)\big)}{s\big(1 - \varrho\varphi(s)\big)^2} \qquad (\mathrm{Re}\, s \geqq 0)\,.$$

Felírható μ_x második feltételes momentuma is. Ekkor

$$H_2(x) = \mathbf{P}(A_x)\, \mathbf{M}(\mu_x^2 \mid A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\varrho^n[W_{n-1}(x) - W_n(x)]\,. \tag{3}$$

Ennek Laplace-transzformáltja pedig — jelölje ezt $g_2(s)$ —

$$g_2(s) = \frac{\varrho\big(1 - \varphi(s)\big)\big(1 + \varrho\varphi(s)\big)}{s\big(1 - \varrho\varphi(s)\big)^3}\,. \qquad (\mathrm{Re}\, s \geqq 0).$$

Könnyű látni, hogy valós s esetén $\varphi(s)$ monoton csökkenő és $\lim\limits_{s\to-\infty} \varphi(s) = +\infty$. Ezért létezik egy és csak egy olyan $s_0 < 0$ valós szám, hogy

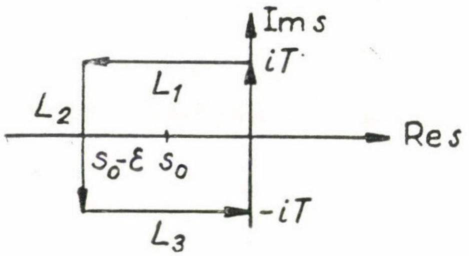
$$\varphi(s_0) = \frac{1}{\varrho} \qquad (0 < \varrho < 1)\,. \tag{4}$$

Eszerint a $g_0(s)$, $g_1(s)$ és $g_2(s)$ függvényeknek a 0 és s_0 helyeken szingularitása van. Az $s = 0$ megszüntethető szingularitás, mert a $\varphi(s)$ függvény deriváltja a 0 helyen létezik. Könnyen megmutatható az is, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy az $s_0 - \varepsilon \leqq \mathrm{Re}\, s \leqq 0$ sávon e függvények nevezőinek az s_0 hely kivételével nincs több gyöke, tehát e hely a $g_0(s)$, $g_1(s)$ és $g_2(s)$ függvényeknek rendre első-, másod-, ill. harmadrendű pólusa. Belátható továbbá, hogy ha $s = \sigma + i\tau$, $s_0 - \varepsilon \leqq \sigma \leqq 0$ és $|\tau| \to +\infty$, akkor az $\frac{s}{\varrho}\, g_0(s)$, $\frac{s}{\varrho}\, g_1(s)$

és $\frac{s}{\varrho}\, g_2(s)$ függvények 1-hez konvergálnak. Ezek alapján az (1), (2) és (3) képletekben szereplő $H_j(x)$, $(j = 0, 1, 2)$ függvényekre felírható az inverz transzformáció segítségével

$$H_j(x) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iT}^{iT} e^{sx} g_j(s)\, ds\,, \qquad (j = 0, 1, 2). \tag{5}$$

(5) nagyságrendjét a reziduum-tétel segítségével fogjuk megbecsülni. Számítsuk ki a jobboldalon szereplő integrált az alábbi ábrán megjelölt zárt görbén:



1. ábra

A kontúr belsejében levő s_0 pontban az integrandusoknak pólusuk lévén

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-iT}^{iT} e^{sx} g_j(s)\, ds = \operatorname*{Res}_{s=s_0} [e^{sx} g_j(s)] - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{sx} g_j(s)\, ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} e^{sx} g_j(s)\, ds - $$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} e^{sx} g_j(s)\, ds\,.$$

T megválasztható a fentiek alapján úgy, hogy az L_1 és L_3 szakaszokon teljesüljön $|\, g_j(s)\,| \leq \frac{\varrho}{|\, s\,|}\,(1 + \delta)$ valamilyen $\delta > 0$ számra. Ezért, minthogy ezeken a szakaszokon $|\, e^{sx}\,| \leq 1$ és a szakaszok hossza $|\, s_0 - \varepsilon\,|$, az L_1 és L_3 szakaszokon vett integrálok abszolút értékben az

$$\frac{\varrho\, |\, s_0 - \varepsilon\,|}{2\pi T}\,(1 + \delta)$$

mennyiséggel becsülhetők felülről. Így $j = 0, 1, 2$ esetén

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-iT}^{iT} e^{sx} g_j(s)\, ds = \operatorname*{Res}_{s=s_0} [e^{sx} g_j(s)] - \lim_{T\to+\infty} \int_{L_2} e^{sx} g_j(s)\, ds\,.$$

Itt a baloldal létezése miatt a jobboldal második tagjának is léteznie kell. Látható, hogy ennek a tagnak $x \to +\infty$ esetén a nagyságrendje $O(e^{(s_0-\varepsilon)x})$. Ennélfogva (5) alapján

$$H_j(x) = \operatorname*{Res}_{s=s_0} [e^{sx} g_j(s)] + O(e^{(s_0-\varepsilon)x}) \qquad (j = 0, 1, 2,)$$

A reziduumokat kiszámolva kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(A_x) = \frac{1-\varrho}{\varrho\, s_0\varphi'(s_0)}\, e^{s_0 x}\{1 + o(e^{-\varepsilon x})\}\,.$$

$$\mathbf{M}(\mu_x \mid A_x) = -\frac{x}{\varrho\varphi'(s_0)} + \left\{\frac{1-\varrho-\varrho s_0\varphi'(s_0)}{\varrho(1-\varrho)\, s_0\varphi'(s_0)}\right\} + o(e^{-\varepsilon x})$$

$$\mathbf{M}(\mu_x^2 \mid A_x) = \frac{x^2}{\varrho^2\varphi'(s_0)^2} + \left\{\frac{2\varrho s_0\varphi'(s_0) + (1-\varrho)s_0 - 2}{\varrho(1-\varrho)s_0\varphi'(s_0)}\right\}x + A + o(e^{-\varepsilon x})$$

ahol s_0 a (4) egyenlet gyöke és

$$\varphi'(s_0) = \frac{\alpha^{s_0+1}(1-(s_0+1)\log\alpha) - 1}{(1-\alpha)\,(s_0+1)^2}\,.$$

Az A együttható szintén az α, ϱ és s_0 függvénye. Látható, hogy $\mathbf{M}(\mu_x \mid A_x)$ kifejezésében x együtthatójának négyzete egyenlő $\mathbf{M}(\mu_x^2 \mid A_x)$ kifejezésében x^2 együtthatójával. Így az ütközések számának feltételes szórásnégyzete az x változóban lineáris, ha $x \to +\infty$.

Megjegyezzük még, hogy az [1] és [2] dolgozatokban foglalt elméletből letargiától függő hatáskeresztmetszetek esetén is származtatható a BETHE [3] (295—297. oldal) által hidrogén lassító közeg esetére az itt levezetendőtől eltérő úton nyert eredmény. BETHE differenciálegyenlet megoldásával jutott eredményéhez.

Tegyük fel tehát, hogy hidrogén lassító közegről van szó és $\varrho(x)$, mint a letargia függvénye, integrálható. A hidrogén tömegszáma 1 lévén, $\alpha = 0$ és így $W(x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \geqq 0$. A fentebbi képletek alapján

$$P_1(x) = \varrho(0)\,(1 - e^{-x})\,, \qquad (x \geqq 0)$$

és teljes indukcióval belátható, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén

$$P_n(x) = \frac{\varrho(0)}{(n-1)!}\int_0^x e^{-y}\left(\int_0^y \varrho(u)\,du\right)^{n-1} dy \qquad (x \geqq 0)\,.$$

Ebből adódik, hogy

$$\mathbf{P}\{\mu_x = n;\, A_x\} = \frac{\varrho(0)\, e^{-x}\left(\int_0^x \varrho(u)\,du\right)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

amelyből az abszorpció elkerülésének valószínűsége n-re vonatkozó összegezéssel kapható:

$$\mathbf{P}(A_x) = \varrho(0)\exp\left(-\int_0^x (1 - \varrho(u))\,du\right)$$

és ez BETHE eredménye. Annak valószínűsége, hogy a $(0, x)$ letargiaintervallumban n ütközés történik, feltéve, hogy a neutron elkerüli az abszorpciót, a következő:

$$\mathbf{P}\{\mu_x = n \mid A_x\} = \left\{\left(\int_0^x \varrho(u)\,du\right)^{n-1}\exp\left(-\int_0^x \varrho(u)\,du\right)\right\}/(n-1)!\,.$$

Az ütközésszám tehát az abszorpció elkerülésének feltétele mellett Poisson eloszlást követ. A várható ütközésszám $\int_0^x \varrho(u)\,du$ és a szórás $(\int_0^x \varrho(u)\,du)^{1/2}$.

(Beérkezett: 1964. szeptember 14.)

IRODALOM

[1] PÁL L.: „A neutronok lelassításának néhány kérdéséről." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei.* **1** (1956) 41—54.

[2] TAKÁCS L.: „Atommagreaktorok elméletével kapcsolatos néhány valószínűségszámítási problémáról." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei.* **1** (1956) 55—66.

[3] WEINBERG, A. M.—WIGNER, E. P.: *The physical theory of neutron chain reactors.* The University of Chicago Press, Chicago. 1958. 295—297.

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ СТОЛКНОВЕНИЙ В ПРОЦЕССЕ ЗАМЕДЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ

J. MOGYORÓDI

Резюме

Пусть $\sigma_s(x)$ и $\sigma_a(x)$ обозначают микроскопическое сечение рассеяния и поглощения соответственно. Эти величины в общем случае зависят от летаргии нейтрона. Формула

$$\varrho(x) = \frac{\sigma_s(x)}{\sigma_s(x) + \sigma_a(x)},$$

выписанная с помощью этих величин, дает условную вероятность того, что если происходит столкновение на уровне летаргии x, нейтрон рассеивается. Обозначив через $W(x)$ функцию распределения приращения летаргии нейтрона при рассеивании, можно определить с помощью $\varrho(x)$ и $W(x)$ вероятность того, что в интервале летаргии $(0, x)$ происходит n столкновений и при условии, что нейтрон не поглощается в этом интервале, можно дать условные среднее значение и дисперсию числа столкновений. В простых случаях, когда $\varrho(x)$ не зависит от летаргии, в статье [1] получены неправильные результаты для среднего значения и дисперсии числа столкновений.

В настоящей статье доказывается, что условное среднее значение числа столкновений в интервале летаргии $(0, x)$ при условии, что нейтрон не поглощается, является асимптотически линейной функцией от летаргии x, а условная дисперсия является линейной функцией от $\sqrt{x}$.

ON THE MEAN VALUE OF THE COLLISIONS IN THE SLOWING DOWN PROCESS OF NEUTRONS

J. MOGYORÓDI

Summary

Let $\sigma_s(x)$ and $\sigma_a(x)$ denote the cross-section of scattering and absorption respectively. These quantities generally depend on the lethargy x of the neutron. The formula

$$\varrho(x) = \frac{\sigma_s(x)}{\sigma_s(x) + \sigma_a(x)}$$

is the conditional probability, that the neutron will be scattered, under the condition that it collides with a nucleus at the lethargy level x. Let us denote by $W(x)$ the distribution function of the lethargy increment gained at a scattering. By the aid of $\varrho(x)$ and $W(x)$ one can give the conditional probability that the number of scatterings in the lethargy interval $(0, x)$ will be n, under the condition that the neutron will not be absorbed in this interval. Also the mean value and the dispersion of the number of scatterings may be given. In the simple case, when $\varrho(x)$ does not depend on the lethargy ϱ, paper [1] gives incorrect results for the mean value and dispersion.

In the present paper it is proved that in this simple case the conditional mean value of the number of collisions in the lethargy interval $(0, x)$, under the condition that the neutron will not be absorbed in this interval, is asymptotically a linear function of the lethargy x. Also the conditional dispersion is given and we find that this is asymptotically a linear function of $\sqrt{x}$.

KÉT ÚJABB ELJÁRÁS HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

ŠTAHL JÁNOS[1]

MARTOS BÉLA [1] dolgozatában a következő, általa hiperbolikus programozási feladatnak[2] nevezett probléma megoldásával foglalkozik

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}}{\mathbf{d}'\mathbf{x}} \to \max . \tag{1}$$

(A $m\times n$-es matrix, $\mathbf{c}'$, $\mathbf{d}'$ n-dimenziós sor, $\mathbf{b}$ m-dimenziós, $\mathbf{x}$ n-dimenziós oszlopvektor.)

Az általa javasolt algoritmus igen egyszerű, a lineáris programozás szimplex-módszerének alkalmas módosítása. Elektronikus számológépre történő programozása sem jelent ilymódon különösebb problémát: az általánosan rendelkezésre álló, lineáris programozási feladatok megoldására szolgáló szimplex módszerrel dolgozó könyvtári programok kevés változtatás után alkalmasak hiperbolikus programozási feladat megoldására is.

A következőkben ismertetendő, hasonló célból kidolgozott eljárások közül az első egy véges eljárás, alapgondolata a lineáris programozásban szokásos ún. indulóprogramkeresés, míg a másik egy közelítő eljárás, alapötletét a probléma egy lehetséges geometriai interpretációja szolgáltatta.

Az első algoritmus előnye, hogy alkalmazásakor nem szükséges indulóprogramkeresési eljárás, másrészt viszont számológépi szempontból valószínűleg nagyon memóriaigényes (meg kell jegyeznünk, hogy a módszerekkel kapcsolatban konkrét számológépi tapasztalataink még nincsenek. Az első módszer alapötletét felhasználva manuális úton viszont megoldottunk egy olyan kisméretű problémát, amelyben két hányados közös értékét kellett maximalizálnunk).

A második módszer bár közelítő eljárás, de szigorúan monoton és tetszőleges lehetséges programmal indítható (aminek akkor lehet jelentősége, ha pl. egy praktikus feladat során rendelkezésünkre áll egy lehetséges program, ami nem bázis megoldás, de a célfüggvény szempontjából „jónak" tekinthető) és

---

[1] KGM Ipargazdasági Intézet.

[2] [1]-ben a célfüggvény számlálójában és nevezőjében még egy-egy további konstans is szerepel. Ennek figyelembevétele a következő módszereknél sem jelentene különösebb problémát.

az eljárás csak ,,majdnem azonos'' közönséges lineáris programozási feladatok egymásutáni megoldását igényli.

Általában az eljárások számológépi programozhatóságáról hasonlót állíthatunk, mint az [1]-beli módszerről.

I. A véges módszer

Tekintsük a következő feladatot:

Meghatározandó azon λ értékek λ^* felső határa, amelyek mellett az

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
(\mathbf{c}' - \lambda\mathbf{d}')\,\mathbf{x} &= \mathbf{0} \qquad (2)\\
\mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

rendszer megoldható. Ez annyit jelent, hogy azon λ értékek λ^* felső határát keressük, amelyek mellett az

$$
(3) \qquad \left.\begin{aligned}
A\,\mathbf{x} + I\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\
(\mathbf{c}' - \lambda\mathbf{d}')\,\mathbf{x} + y_{mn} &= 0 \\
\mathbf{x}, \mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \quad y_{mn} &\geqq 0
\end{aligned}\right\} \mathbf{1}' \cdot \mathbf{y} + y_{mn} \to \min
$$

lineáris programozási feladatban (ahol I és $\mathbf{1}'$ megfelelő méretű egységmátrix, ill. olyan vektor, amelynek valamennyi komponense 1), optimum értéke zérus.

Kiindulás: Tegyük fel, hogy $\lambda > \lambda_i$ mellett a (2) rendszernek nincs megoldása és rendelkezésünkre áll (3) egy szimplex táblázata, melyben a bázis tartalmaz még y-változót. A táblázat elemei λ lineáris törtfüggvényei vagy lineáris függvényei (és konstansok). Továbbá $\lambda = \lambda_i$ mellett a megoldást szolgáltató vektor komponenseinek kifejezései nem-negatívok, illetve ha $\lambda = \lambda_i$ mellett ezen kifejezések valamelyikének nincs értelme, akkor λ_i-nél vett baloldali határértéke $+\infty$ és ez fennáll $\lambda \geqq \max\,(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{iJ})$ esetén,ahol a λ_{ij}-k már meghatározott, egymástól különböző számok.

Két eset lehetséges

1) $\lambda = \lambda_i$ mellett a szimplex táblázat utolsó sora tartalmaz negatív elemet (illetve a baloldali határérték $-\infty$).

Ekkor az ezen oszlopnak megfelelő változó bevonásával elvégzünk egy szimplex transzformációt és meghatározzuk azon $\lambda_{ij}(< \lambda_i)$ értéket (λ_{ij} esetleg $-\infty$), mely értékig a végzett bázistranszformáció egy szabályos szimplex-lépés. A közönséges szimplex módszerre emlékeztetve azon λ_{ij} értékeket kell itt figyelembe vennünk, amelyig bezárólag az utolsó sor kérdéses eleme negatív, a generátor elem meghatározásánál a minimum még ugyanazon sorban éretik el, mint az aktuális λ_i értéknél. Ha λ_{ij} nem esik egybe az eddig meghatározott $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{iJ}$ egyikével sem, akkor legyen $\lambda_{i,J+1} = \lambda_{ij}$. Ha a bázisban szerepel még y változó, folytassuk a kiindulástól eljárásunkat.

2) $\lambda = \lambda_i$ mellett a táblázat utolsó sorában minden elem nemnegatív (illetve a baloldali határérték $+\infty$). Ekkor meghatározzuk azon λ_i-nél nemnagyobb legnagyobb olyan λ értéket, amelynél tetszőleges kisebb λ-ra az

utolsó sorban van negatív elem. Legyen ez λ_{i0} (ha ilyen érték nincs $\lambda_{i0} = -\infty$). Legyen most $\lambda_{i+1} = \max(\lambda_{i0}, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots) = \lambda_{ij}$ és

$$\{\lambda_{i+1,1}, \lambda_{i+1,2}, \ldots\} = \{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{i,j-1}, \lambda_{i,j+1}, \ldots\}.$$

Különböztessünk meg két alesetet.

2a) $\lambda_{i+1} = \lambda_\omega > \lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots$ Ekkor a kérdéses oszlopnak megfelelő változót bevonva a bázisba $\lambda = \lambda_{i+1}$-gyel és az adódó táblázattal folytassuk kiindulástól eljárásunkat, ha az adódó bázisban szerepel még y változó.

2b) $\lambda_{i0} \leqq \lambda_{i+1}$ esetén a kiindulástól való folytatáshoz szükséges szimplex táblázat azon $\lambda = \lambda_k$ $(k \leqq i)$ mellett végzett lépéshez tartozó táblázatból nyerhető, amikor a λ_{i+1}-t adó λ_{ij}-t meghatároztuk.

Igaz a következő

Tétel. $\lambda_1 = +\infty$*-nel és az* $m + 1$ *számú* y *változó, mint bázisváltozókhoz tartozó táblázattal kezdve eljárásunkat véges számú lépés után olyan* λ_i *értékhez és táblázathoz jutunk, hogy igaz az alábbi két eset valamelyike:*

a) *a bázis nem tartalmaz* y *változót. Ebben az esetben az aktuális* λ_i *a keresett* λ^* *felső határ.*

b) $\lambda_{i+1} = -\infty$, *amely esetben vagy nincs lehetséges program, vagy* $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ *állandó előjelű,* $\mathbf{d}'\mathbf{x} \equiv 0$ *a lehetséges programok* K *halmazán.*

Az egyetlen, ami az itt elmondottakból bizonyításra szorul, az az eljárás végessége. Ez viszont adódik abból, hogy egyrészt azon λ-értékek száma melyek sorozatbeli λ_i-értékként szóbajöhetnek véges, hiszen ezek véges sok lehetséges táblázatban fellépő lineáris függvény, lineáris törtfüggvény, illetve ezek különbségének zérushelyei közül kerülnek ki, másrészt egy fix λ_i érték mellett a szimplex eljárás végessége folytán végesszámú lépés után vagy már nem szerepel y-változó a bázisban vagy egy kisebb λ-értékkel kell folytatnunk az eljárást.

Mielőtt azzal foglalkoznánk, hogy mindebből milyen következtetéseket vonhatunk le az (1) feladattal kapcsolatban, tekintsük a probléma alábbi geometriai interpretációját, amire a II. alatti eljárás is épül.

Tegyük fel, hogy létezik lehetséges program, azaz a $K = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ konvex poliéder nem üres és tekintsük ennek a

$$z_1 = \mathbf{d}'\mathbf{x} \qquad z_2 = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

egyenletek alapján történő leképezését a (z_1, z_2) koordináta síkra. Az S képhalmaz nyilván a sík egy konvex polihedrikus részhalmaza.

Különböztessünk meg három esetet aszerint, hogy az origó külső (1*a*, *b* és *c* ábrák), határ (2*a* és *b* ábrák), ill. belső pontja (3. ábra) S-nek (A további szétválasztás annak alapján történt, hogy van-e más közös pontja S-nek és a z_2-tengelynek vagy nincs). Tegyük fel, hogy az algoritmus az a) esetnél ért véget. Különböztessünk meg két esetet.

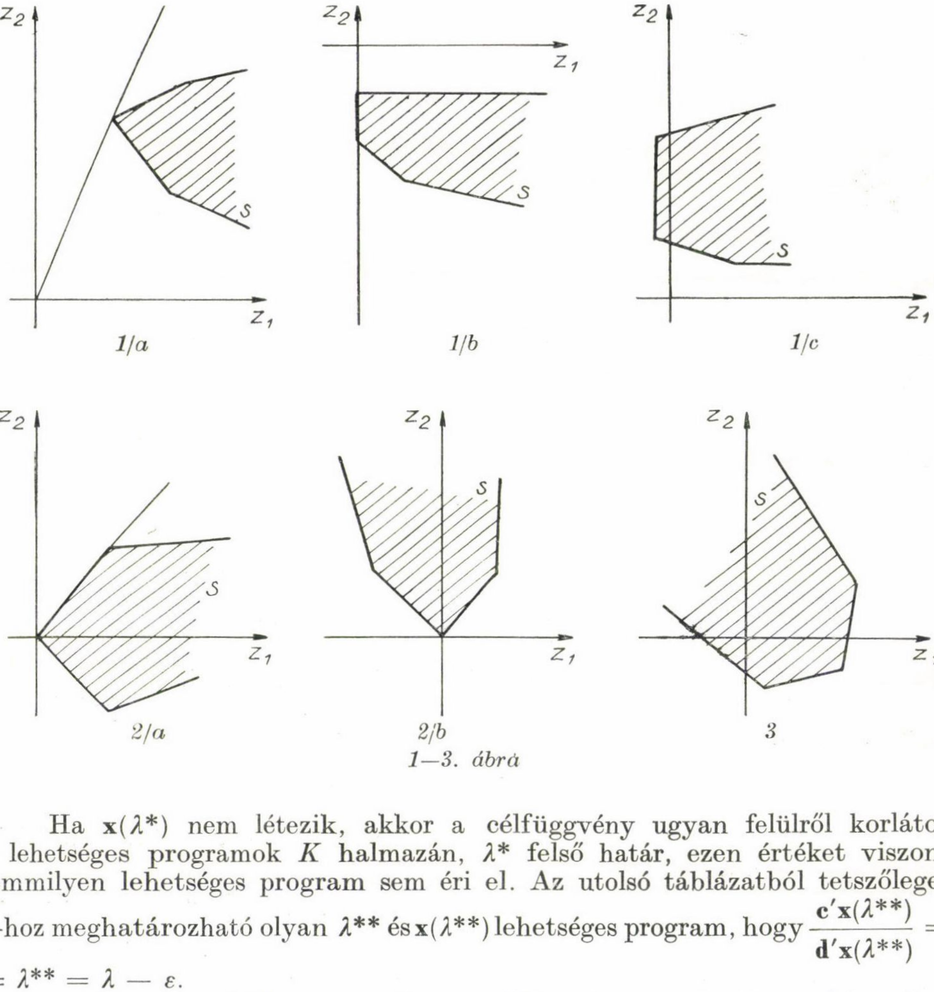
1) λ^* véges. Ha λ^* mellett a táblázatból adódó $\mathbf{x}(\lambda^*)$ létezik, akkor $\mathbf{x}(\lambda^*)$ az (1) feladat optimális megoldása, az optimum értéke λ^* (1a és 2*a* ábrák.) Ha $\mathbf{d}'\mathbf{x}(\lambda^*) = 0$, akkor az

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{c}' - \lambda^*\mathbf{d}')\,\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

feltételeket kielégítő olyan programot meghatározva, melyre $\mathbf{d}'\mathbf{x} \neq 0$, adódik (1)-nek olyan optimális megoldása, melyre $\frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}}{\mathbf{d}'\mathbf{x}} = \lambda^*$. (Ilyen program meghatározása az algoritmus során adódott utolsó táblázatból kiindulva már egyszerűen végrehajtható.)



1—3. ábra

Ha $\mathbf{x}(\lambda^*)$ nem létezik, akkor a célfüggvény ugyan felülről korlátos a lehetséges programok K halmazán, λ^* felső határ, ezen értéket viszont semmilyen lehetséges program sem éri el. Az utolsó táblázatból tetszőleges ε-hoz meghatározható olyan λ^{**} és $\mathbf{x}(\lambda^{**})$ lehetséges program, hogy $\frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}(\lambda^{**})}{\mathbf{d}'\mathbf{x}(\lambda^{**})} = \lambda^{**} = \lambda - \varepsilon$.

2) $\lambda^* = +\infty$. Ebben az esetben a célfüggvény nem korlátos a lehetséges programok K halmazán. A táblázatban a bázisbeli $\mathbf{x}$-komponensek kifejezésében elvégezve a $\lambda \to +\infty$ határátmenetet (amennyiben ez szükséges), adódik egy olyan $\mathbf{x}$ program, melyre $\mathbf{d}'\mathbf{x} = 0$. (Ha $\mathbf{c}'\mathbf{x} = 0$ (lásd *2b*) ábra), akkor az utolsó táblázatból kiindulva meghatározhatunk egy, az

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{d}'\mathbf{x} = 0$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

feltételeket kielégítő olyan programot, amelyre $\mathbf{c}'\mathbf{x} > 0$. Ugyanezen feltételrendszert vizsgálva dönthetjük el, hogy amennyiben algoritmusunk a b) esetnél ér véget, melyik alesettel van dolgunk.)

Tekintsük a következő — kisméretű — számpéldát, amelynek kizárólag illusztrálás a célja:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}\right\} \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} \to \max$$

Az előzőek alapján a vizsgálandó lineáris programozási feladat:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + y_1 &= 2 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 + y_2 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_3 &= 4 \\ -\lambda x_1 + x_2 - \lambda x_3 + x_4 + y_4 &= 0 \end{aligned}\right\} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \min$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \geqq 0$$

Az y-változókból, mint bázisváltozókból kiindulva, az adódó táblázat *(1. táblázat)* alapján $\lambda_1 = +\infty$-nél $\lambda_{11} = 0$-t nyerjük. x_2-t y_4 helyett bevonva a bázisba kapjuk a 2. *táblázatot*. Az x_1-hez tartozó oszlopban keresve most a

		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	2	1	2	-1	0
y_2	6	4	0	1	1
y_3	4	-1	3	2	0
y_4	0	$-\lambda$	1	$-\lambda$	1
	-12	$\lambda - 4$	-6	$\lambda - 2$	-2

1. táblázat

		x_1	x_3	x_4
y_1	2	$2\lambda + 1$	$2\lambda - 1$	-2
y_2	6	4	1	1
y_3	4	$3\lambda - 1$	$3\lambda + 2$	-3
x_2	0	$-\lambda$	$-\lambda$	1
	-12	$-5\lambda-4$	$-5\lambda-2$	4

2. táblázat

generáló elemet, ez a $2\lambda + 1$ lesz, mert

$$\min\left[\frac{2}{2\lambda + 1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3\lambda - 1}\right] = \frac{2}{2\lambda + 1},$$

ha $\frac{1}{6} \leqq \lambda < +\infty$ $\left(\lambda \leqq \frac{1}{3}\right.$ esetén a zárójelben szereplő harmadik tagot nem kell figyelembe vennünk$\left.\right)$, adódik a *3. táblázat* és $\lambda_{12} = \frac{1}{6}$

	x_3	x_4
x_1	$\frac{2}{2\lambda+1}$	$\frac{2\lambda-1}{2\lambda+1}$	$\frac{-2}{2\lambda+1}$
y_2	$\frac{12\lambda-2}{2\lambda+1}$	$\frac{-6\lambda+5}{2\lambda+1}$	$\frac{2\lambda+9}{2\lambda+1}$
y_3	$\frac{2\lambda+6}{2\lambda+1}$	$\frac{12\lambda+1}{2\lambda+1}$	$\frac{-5}{2\lambda+1}$
x_2	$\frac{2\lambda}{2\lambda+1}$	$\frac{-2\lambda}{2\lambda+1}$	$\frac{1}{2\lambda+1}$
	$-\frac{14\lambda+4}{2\lambda+1}$	$-\frac{6\lambda+6}{2\lambda+1}$	$-\frac{2\lambda+4}{2\lambda+1}$

3. táblázat

		x_1	x_4
x_3	$\frac{2}{2\lambda-1}$	$\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}$	$\frac{-2}{2\lambda-1}$
y_2	$\frac{12\lambda-8}{2\lambda-1}$	$\frac{6\lambda-5}{2\lambda-1}$	$\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}$
y_3	$\frac{2\lambda-8}{2\lambda-1}$	$\frac{-8\lambda-3}{2\lambda-1}$	$\frac{7}{2\lambda-1}$
x_2	$\frac{2\lambda}{2\lambda-1}$	$\frac{2\lambda}{2\lambda-1}$	$\frac{-1}{2\lambda-1}$
	$-\frac{14\lambda-16}{2\lambda-1}$	$\frac{2\lambda+8}{2\lambda-1}$	$-\frac{2\lambda+8}{2\lambda-1}$

4. táblázat

$$\lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{6\lambda+6}{2\lambda+1} = -3 < \lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{2\lambda+4}{2\lambda+1} = -1$$

alapján most x_3 bevonásával próbálkozva, minthogy

$$\min\left[\frac{2}{2\lambda-1}, \frac{2\lambda+6}{12\lambda+1}\right] = \frac{2}{2\lambda-1},$$

ha $4 \leqq \lambda < +\infty$, $\lambda_{13} = 4$, és a következő vizsgálandó táblázat a 4. táblázat lesz.

Itt az x_4-hez tartozó oszlopban a legalsó pozícióban szereplő kifejezés $\lambda = +\infty$-nél vett határértéke $-1 (< 0)$, a generáló elem, a

$$\min\left[\frac{12\lambda-8}{2\lambda+1}, \frac{2\lambda-8}{7}\right] = \frac{12\lambda-8}{2\lambda+1}$$

ha $24 \leqq \lambda < +\infty$ összefüggés alapján, $\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}$ lesz és $\lambda_{14} = 24$, a transzformációt elvégezve kapjuk az 5. *táblázatot.*

		x_1
x_3	$\frac{14}{2\lambda + 1}$	$\frac{2\lambda + 9}{2\lambda + 1}$
x_4	$\frac{12\lambda - 8}{2\lambda + 1}$	$\frac{6\lambda - 5}{2\lambda + 1}$
y_3	$\frac{2\lambda - 48}{2\lambda + 1}$	$-\frac{12\lambda + 34}{2\lambda + 1}$
x_2	$\frac{2\lambda + 8}{2\lambda + 1}$	$\frac{2\lambda + 5}{2\lambda + 1}$
	$-\frac{2\lambda - 48}{2\lambda + 1}$	$\frac{12\lambda + 34}{2\lambda + 1}$

5. táblázat

		x_1
x_3	$\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{7}$
y_2	$\frac{48 - 2\lambda}{7}$	$\frac{12\lambda + 34}{7}$
x_4	$\frac{2\lambda - 8}{7}$	$-\frac{12\lambda + 1}{7}$
x_2	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$
	$-\frac{48 - 2\lambda}{7}$	$-\frac{12\lambda + 34}{7}$

6. táblázat

Ezen táblázatból, az utolsó oszlop alapján a $\lambda_{10} = -\frac{34}{12}$ érték adódik.

Ilymódon

$$\lambda_2 = \max\left(-\frac{34}{12}, 0, \frac{1}{6}, 4, 24\right)$$

és

$$\{\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}\} = \left\{0, \frac{1}{6}, 4\right\}$$

lesz.

Visszatérve a 4. táblázathoz $\frac{7}{2\lambda - 1}$-et választva a generáló elemnek, a szimplex transzformáció után adódik a 6. táblázat, és egy további lépés után az

$$x_1 = \frac{-2\lambda + 48}{7}, \quad x_2 = \frac{98\lambda + 224}{84\lambda + 238}, \quad x_3 = \frac{14\lambda + 308}{84\lambda + 238}, \quad x_4 = \frac{546\lambda - 224}{84\lambda + 238}$$

értékek, tehát az optimális megoldás

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = \frac{8}{7}, \quad x_3 = \frac{2}{7}, \quad x_4 = \frac{40}{7}$$

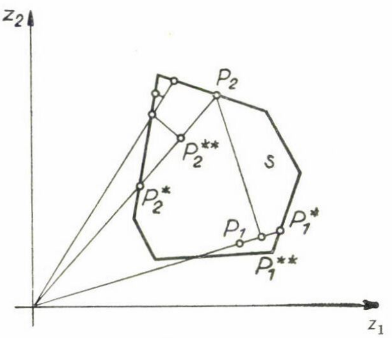
és az optimum értéke 24.

(Vegyük észre, hogy ezen megoldás már az 5. táblázatból is leolvasható. Azonban a különféle lehetséges esetek egységes kezelése az algoritmusnak a tárgyalt formában való leírását követelte meg és számpéldánk is ezen formának felelt meg.)

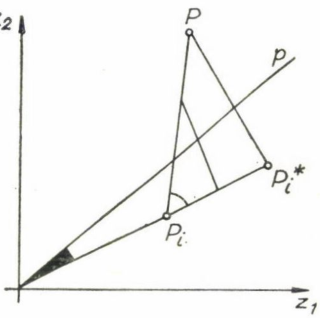
II. A közelítő eljárás

Ezt a módszert csak azon praktikus szempontból leginkább szóbajövő esetre írjuk le, amikor K korlátos és K-n $\mathbf{d}'\mathbf{x} > 0$, amely esetben nyilván véges az optimum értéke, létezik optimális program. Az I-ben definiált leképezésnél adódó S képhalmazról, mely ekkor egy konvex sokszög, feltesszük még, hogy nem egyenesszakasz. A további esetekre a kiterjesztés elvi problémát az alábbiakban leírtak alapján nem okoz, pusztán egy hosszabb esetszétválasztásra vezetne.

Definiáljuk S-beli pontok egy sorozatát a következőképpen (4. ábra).



4. ábra



5. ábra

Legyen P_1 S-nek egy tetszőleges pontja. Ha P_i-t már definiáltuk, legyen P_i^* S határának és az OP_i félegyenesnek P_i-től különböző pontja, ha ilyen létezik, egyébként pedig P_i. Legyen továbbá P_i^{**} a $P_i^*P_i$ szakasz felezőpontja. Akkor P_{i+1} legyen S határának és az OP_i^{**}-ra merőleges egyenes azon közös pontja, melynek z_2-koordinátája nagyobb, mint P_i^* z_2-koordinátája, ha ilyen létezik, egyébként pedig P_i^*.

Tétel. *Az ilymódon definiált pontsorozat S egy olyan pontjához konvergál, mely képe egy optimális programnak.*

Ugyanis az OP_i félegyenesek iránytangensei egy monoton növő korlátos, tehát konvergens sorozatot alkotnak. Az állítás igazolásaként elegendő annyit belátni, hogy az origón átmenő, ezen határértékkel megegyező iránytangensű p egyenes felett nincs S-beli pont.

Ennek ellenkezőjét feltéve, legyen P S-nek egy p feletti pontja (5. ábra). Legyen továbbá $(OP_i, p)\sphericalangle = \alpha_i$, $\min [P_i^* P_i P \sphericalangle, PP_i^* P_i \sphericalangle] = \beta_i$, $OP_i = d_i$, $P_iP_i^* = 2a_i$. (Ha P_i^* van O és P_i között, P_i és P_i^* szerepet cserél.)

Minthogy a $\{P_i\}$ sorozat minden tagja p alatt van, azért

$$a_i \operatorname{tg} \beta_i \leqq (a_i + d_i) \operatorname{tg} \alpha_i ,$$

amiből

$$\mathrm{tg}\,\alpha_i \geqq \frac{a_i}{a_i + d_i}\,\mathrm{tg}\,\beta_i.$$

A jobboldalon szereplő kifejezésben viszont egy elég nagy i esetén az indirekt feltevés, valamint annak folytán, hogy S nem egyenesszakasz, $a_i \geqq a > 0$, $\mathrm{tg}\,\beta_i \geqq \mathrm{tg}\,\beta > 0$ ami ellentmond az $\alpha_i \to 0$ relációnak.

A fenti tétel alapján az 1. feladat megoldására a következő eljárás adódik.

Legyen $\mathbf{x}_1$ tetszőleges lehetséges program, $\dfrac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_1}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_1} = \lambda_1$.

Ha már meghatároztunk egy $\mathbf{x}_i$ programot, legyen $\dfrac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_i}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_i} = \lambda_i$, és tekintsük a következő lineáris programozási feladatokat:

$$\text{(4a)}\qquad \left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\ (\mathbf{c}' - \lambda_i\mathbf{d}')\,\mathbf{x} &= 0\\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}\end{aligned}\right\}\mathbf{d}'\mathbf{x} \to \max,$$

ill.

$$\text{(4b)}\qquad \left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\ (\mathbf{c}' - \lambda_i\mathbf{d}')\,\mathbf{x} &= 0\\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}\end{aligned}\right\}\mathbf{d}'\mathbf{x} \to \min.$$

Jelöljük $\mathbf{x}_i^*$-gal (4a)-nak vagy (4b)-nek egy olyan optimális megoldását, melyre $\mathbf{d}'\mathbf{x}_i^* \neq \mathbf{d}'\mathbf{x}_i$. Legyen $\mathbf{x}_i^{**} = \dfrac{\mathbf{x}_i^* + \mathbf{x}_i}{2}$. Akkor $\mathbf{x}_{i+1}$ az

$$\text{(5)}\qquad \left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\ (\lambda_i\mathbf{c}' + \mathbf{d}')\,\mathbf{x} &= (\lambda_i\mathbf{c}' + \mathbf{d}')\,\mathbf{x}_i^{**}\\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}\end{aligned}\right\}\mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max$$

lineáris programozási feladat megoldása.

A nyert λ_i értékek monoton növően konvergálnak az (1) feladat optimumához.

Minthogy $\mathbf{x}_{i+1}$ mindig optimális megoldása (4a)-nak vagy (4b)-nek, azért (4a) és (4b) közül minden lépés során csak az egyik feladatot kell megoldanunk. (Ha egy program mindkét feladatnak optimális megoldása, akkor az nyilván optimális megoldása (1)-nek.) Továbbá az is látható, hogy nem szükséges minden lépésben újra kezdeni (4), illetve (5) alatti feladatok megoldását; mindig fel tudjuk használni az előző lépések során nyert táblázatokat, valamint az is, hogy $\mathbf{x}_1$ ismerete nem szükséges, hanem csak egy alkalmas λ_1-érték.

Ha az eljárás során valamely lépésnél $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, akkor $\mathbf{x}_i$ optimális, vagy — amely lehetőséget II. elején kizártunk — az S képhalmaz egyenesszakasz. A két eset az

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}\end{aligned}\right\}\mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max,$$

ill.

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \mathbf{d}'\mathbf{x} \to \max$$

lineáris programozási feladatok vizsgálatával — melyek ismét az előzőleg nyert táblázatok alapján végrehajthatók — szétválasztható, ill. — a második alternatíva teljesülése esetén — az optimális program(ok) meghatározható(k).

Befejezésül — ismét csak illusztrációképpen — tekintsük a következő egyszerű számpélda első lépéseit. A feladat:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}\right\} \frac{3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4}{x_1 + 2x_2 + x_4} \to \max .$$

(A feladat optimális megoldása az $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{7}{3}$, $x_4 = 0$ program, az optimum értéke $\frac{26}{4} = 6{,}5$.) Induljunk ki az $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1)'$ programból. $\lambda_1 = \frac{8}{4} = 2$. Az első megoldandó lineáris programozási feladat:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}\right\} x_1 + 2x_2 + x_4 \to \max .$$

Innen $\mathbf{x}_1^* = \left(\frac{33}{14}, \frac{11}{14}, 0, \frac{29}{14}\right)'$ és $\mathbf{x}_1^{**} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^*}{2} = \left(\frac{47}{28}, \frac{25}{28}, \frac{14}{28}, \frac{43}{28}\right)'$. $\mathbf{x}_2$-t a

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ 7x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}\right\} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max$$

lineáris programozási feladat megoldása adja: $\mathbf{x}_2 = \left(\frac{51}{24}, 0, \frac{37}{24}, \frac{19}{24}\right)'$ és $\lambda_2 = \frac{53}{14} = 3{,}78$.

A következő megoldandó feladat

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ -11x_1 - 92x_2 + 28x_3 - 25x_4 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}\right\} x_1 + 2x_2 + x_4 \to \max$$

lesz. (Ugyanis $\mathbf{x}_2$ ugyanezen feltételrendszerű és minimalizálást előíró célfüggvényű feladat megoldása.) Ebből $\mathbf{x}_2^* = \left(\frac{144}{260}, \frac{152}{260}, \frac{556}{260}, 0\right)$, $\mathbf{x}_2^{**} = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^*}{2} = \left(\frac{4179}{3120}, \frac{912}{3120}, \frac{5741}{3120}, \frac{1235}{3120}\right)$.

Vizsgálnunk kell most a

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ 173x_1 + 81x_2 + 106x_3 + 120x_4 &= 498 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}\right| \; 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max$$

feladatot, ennek megoldásaként kapjuk $\mathbf{x}_3$-at: $\mathbf{x}_3 = \left(\frac{808}{561}, 0, \frac{1249}{561}, \frac{60}{561}\right)$ és $\lambda_3 = \frac{5042}{868} = 5{,}81$ stb.

A módszerrel kapcsolatban nyitott az iteráció befejezésének kérdése: egyszerű olyan példát konstruálni, amelyben a $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ különbségek nem monoton csökkenőek.

(Beérkezett: 1964. november 23.)

IRODALOM

[1] MARTOS B.: „Hiperbolikus programozás". *MTA Matematikai Kutatóintézet Közleményei* **5** (1960), 383—406.

ДВА НОВЫХ ПРИЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

J. STAHL

Резюме

Статья изложит два метода, как решить задачи гиперболического программирования ([1]).

Первый метод дает еполномочия о верхней грани λ^* таких стоимостей λ, где стоимость оптимума равна нулю в задаче линейного программирования (3).

Стоимость λ^* и соответствующего ортималнего $\mathbf{x}^*$ получаются благодаря ограниченному применению симплексного пространства. Элементы возникающих таблиц являются линейны-целыми или линейны-ломачными функциями λ.

Другой метод является приблизительным способом и требует рещение последовательной простой линейных программирований.

Пусть $\mathbf{x}_1$ какой угодно решение задачи (1) и $\lambda_1 = \frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_1}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_1}$. Если $\mathbf{x}_i$ является известным и $\lambda_i = \frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_i}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_i}$ тогда смотрим задачи линейного программирования (4a) и (4b).

Пусть $\mathbf{x}_i^*$ такое решение какой-нибудь задачи, где действительно $\mathbf{d}'\mathbf{x}_i^* \neq \mathbf{d}'\mathbf{x}_i$ и пусть $\mathbf{x}_i^{**} = \frac{\mathbf{x}_i^* + \mathbf{x}_i}{2}$.

Тогда $\mathbf{x}_{i+1}$ будет решение задачи линейного программирования (5). Стоимости λ_i которые можно получить с этим методом, в таких случаях, которые можно применять на практике, сходятся к оптималной стоимости задачи (1). В общем случае к этому нужно небольшое изменение.

TWO NEW METHODS FOR SOLUTION OF HYPERBOLIC PROGRAMING

by

J. STAHL

Summary

In our paper we deal with two procedures for solving the problem the s. c. hyperbolic programming problem ([1]).

The first method is to determine the upper bound λ^* of that λ values, for which in the linear programming problem (3) the optimal value is equal to zero.

The value of λ^* and the corresponding optimal $\mathbf{x}^*$ may be obtained by transformations of simplex tableaus in a finite number of steps. The elements of these tableaus are linear or linear quotient functions of λ.

The other method is an approximative one. In the course of it one has to solve a sequence of common linear programming problems.

Let $\mathbf{x}_1$ be an arbitrary feasible solution of (1) and $\lambda_1 = \frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_1}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_1}$. If $\mathbf{x}_i$ is already known, let $\lambda_i = \frac{\mathbf{c}'\mathbf{x}_i}{\mathbf{d}'\mathbf{x}_i}$ be and let us consider the linear programming problems (4a) and (4b).

Let $\mathbf{x}_i^*$ be such a solution of one of these problems, for which $\mathbf{d}'\mathbf{x}_i^* \neq \mathbf{d}'\mathbf{x}_i$ and let us define $\mathbf{x}_i^{**} = \frac{\mathbf{x}_i^* + \mathbf{x}_i}{2}$.

Then $\mathbf{x}_{i+1}$ is the solution of the linear programming problem (5).

In the cases of practical interests the obtained λ_i values monoton increasingly converge to the optimal value of problem (1). In the general case a slight modification is necessary.

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS A SZINGULÁRIS DIFFERENCIÁL-EGYENLETEK NUMERIKUS MEGOLDÁSÁHOZ

FRIVALDSZKY SÁNDOR*

Műszaki feladatok gyakran vezetnek szinguláris differenciálegyenlet-rendszer megoldásához. Ezeknél — ha egzisztencia és unicitás probléma nem is lép fel — nehézséget okoz a megfelelő numerikus módszer kiválasztása. Ehhez a problémához kívánunk néhány gondolatot adni. Ezek nem elméleti jellegű megállapítások, hanem inkább praktikus tanácsok lesznek, amelyek jól alkalmazhatók a numerikus megoldásoknál, főként elektronikus számológépre való programozás esetén. Egy speciális differenciálegyenlet rendszerből indulunk ki, azonban a tett észrevételek sokkal tágabb körben alkalmazhatók. Legyen a differenciálegyenletrendszer a következő alakú:

$$A(t) = B(x)x'(t) + \varepsilon C(p)\sqrt{|p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}|}\,D(x) + E(t;x;p_{\mathrm{I}})\,p_{\mathrm{I}}'(t)\,, \tag{1}$$

$$F(p_{\mathrm{II}}) + G(x;p_{\mathrm{II}})\,p_{\mathrm{II}}'(t) = B(x)\,x'(t) + \varepsilon C(p)\sqrt{|p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}|}\,D(x)\,, \tag{2}$$

$$[p_{\mathrm{I}}(t) - p_{\mathrm{II}}(t)]B(x) = ax''(t) + bx'(t) + cx(t) + d\,, \tag{3}$$

ahol

$$p = \max(p_{\mathrm{I}};p_{\mathrm{II}}) \quad \text{és} \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}(p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}})\,.$$

Keresendő $p_{\mathrm{I}}, p_{\mathrm{II}}, x$ mint t függvénye.

Az $A(t), B(x), C(p), D(x), E(t;x;p_{\mathrm{I}}), F(p_{\mathrm{II}}); G(x;p_{\mathrm{II}})$ függvények és az a, b, c, d számok ismertek. Továbbá

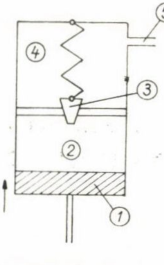
$$E(t;x;p_{\mathrm{I}}) \neq 0\,,$$
$$G(x;p_{\mathrm{II}}) \neq 0\,,$$
$$a \neq 0\,.$$

A kezdeti feltételek

$$x(0) = 0\,; \quad x'(0) = 0\,,$$
$$p_{\mathrm{I}}(0) = p_{\mathrm{I}0}\,,$$
$$p_{\mathrm{II}}(0) = p_{\mathrm{II}0}\,.$$

* KGM Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézet

A modell a következő műszaki feladatot írja le (lásd 1. ábra):



1. ábra

Az ① dugattyú $A(t)$ cm³/sec sebességgel folyadékot nyom össze a ② térben, amelyet a ③ szelep zár le egy összenyomott rugó segítségével. A szelep p_{I0} nyomásnál kinyit, és a folyadék átáramolhat a p_{II0} nyomású ④ térbe, ahol részben összenyomódik, részben a ④ térben uralkodó nyomástól függően $F(p_{II})$ cm³/sec sebességgel az ⑤ csövön eláramlik. Keresendő a ②, illetve ④ térben a nyomás (p_I, illetve p_{II}) és a szelep kiemelkedése (x) mint az idő függvénye. Az (1), illetve (2) egyenlet a ②, illetve ④ tér kontinuitási egyenlete, a (3) egyenlet pedig a szelep mozgásegyenlete. A problémát a megoldásnál az adja, hogy a szelep kinyitásakor a nyomások majdnem kiegyenlítődnek, ezáltal az (1) és (2) egyenlet explicit alakban nemfolytonosan differenciálható jobboldalú lesz, vagy legalábbis a jobb oldal differenciálhányadosának felső korlátja igen nagy lesz. Ekkor $p_I \approx p_{II}$ bekövetkezése után a szeleprugó visszanyomja a szelepet, aminek következtében az átáramlás a ② és ④ tér között megszűnik vagy erősen lecsökken és ismét $p_I > p_{II}$ lesz. Ezután a szelep ismét kinyit stb. Az (1), (2), (3) rendszer tehát ,,ritmikusan szinguláris'' lesz. A fenti műszaki feladatra és az egyenletrendszer részletes felírására csak azért van szükségünk, hogy ennek a ,,ritmikus szingularitásnak'' feltételezése ne tűnjön mesterkéltnek.

A műszaki interpretáció azt sugallja, hogy mivel a folyadék mindig a ② térből áramlik a cső felé, ezért $p_I > p_{II}$ lesz mindig. Ebben az esetben az egyenletrendszer ismert módon megoldható lenne, ha a megoldási lépésközt elég kicsire választanánk.

Azonban ilyen kis lépésköz választása nem jó módszer, mert ez még elektronikus számológépen is igen sok számítást igényelne és mert a $p_I \gg p_{II}$-nek megfelelő intervallumban erre nincs is szükség. Végül a $p_I > p_{II}$ nem feltétlenül áll fenn, főként akkor nem, ha bizonyos időtől kezdve $A(t) < 0$ lesz. (A dugattyú visszafelé mozog vagy megnyit egy visszafolyót.)

Induljunk ki egy szokásos numerikus módszerből. A lépésköz változtatás miatt alkalmas az egyik Runge—Kutta-módszert választani. Mi a harmadrendben pontos változatot választottuk, mivel a pontosság és az elektronikus számológépi gépidő szempontjából ez mutatkozott a legalkalmasabbnak. A vizsgálatok természetesen elvégezhetők a többi Runge—Kutta-módszernél is. Nem jelent megszorítást az, ha a rendszer helyett csupán differenciálegyenletre korlátozzuk a vizsgálatot, amely legyen

$$y' = f(x; y) = g(x; y) - h(x; y)\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{|y|} < 0\,, \tag{4}$$

ahol $g(x; y)$ és $h(x; y)$ kétszer folytonosan differenciálható és $h(x; y) \neq 0$. A választott Runge—Kutta-módszer

$$k_1 = hf(x_n; y_n)\,,$$

$$k_2 = hf(x_n + h; y_n + k_1)\,, \qquad \text{(A módszer)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

lesz, ahol $h = x_{n+1} - x_n$ és $y_n = y(x_n)$.

A megoldásra h_0 lépésközönként van szükség. (Példánkban a megoldási intervallum 120-ad része volt.) Mivel ez nagyságrendekkel lehet nagyobb az elméletileg megengedett lépésköznél, ezért a szokott Runge—Kutta-alakot használva a számolás eredményeképpen az (1), (2), (3) rendszernél azt kapnánk, hogy a szelep nyitása után p_{I} és p_{II} nem egyenlítődik ki, hanem $p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}$ minden határon túl nő. Az alkalmas lépésköz kiválasztása az elmélet alapján azért nem praktikus, mert

1. a lépésköz számítása sok időt vesz igénybe,
2. ez a számolás a becslési elhanyagolások miatt a ténylegesnél sokkal kisebb lépésközt adna,
3. ilyen kis lépésközzel gyakorlatilag nem tudnánk számolni, a számítási idő megnövekedése miatt,
4. felléphet a $p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}$ előjel váltása és vele együtt a rendszer szingularitása is.

Legyen adott a (4) egyenlet számára x_n, $y_n > 0$ és keresendő a megoldás $x_{n+1} = x_n + h$-ban. A választandó h lépésköz nyilván csak akkora lehet, hogy

$$y_n + k_1 \geqq 0$$

maradjon. Legyen $h^{(0)}$ olyan, hogy

$$y_n + h^{(0)}f(x_n; y_n) = 0\,.$$

Az ezekből számított y_{n+1} érték még elég pontos szokott lenni. Ha $h_0 \leq h^{(0)}$, akkor természetesen $h = h_0$-t választjuk, ha $h_0 > h^{(0)}$, akkor pedig a $h = h^{(0)}$-ra vett számítást elvégezve az eljárást folytatjuk h_0 helyett $h_0 - h^{(0)}$-ra.

A pontosság növelése és a lépések számának csökkentése érdekében ajánlatos nem elmenni a $h^{(0)}$ szingularitási határig, hanem válasszuk

$$h = \vartheta h^{(0)}$$

-t lépésköznek, ahol $0 < \vartheta < 1$ rögzített szám. Nyilván ϑ minél kisebb, a számítás annál pontosabb. Azonban egy ϑ-tól lefelé ez a pontosság biztosan a számolási idő növekedéséhez vezet. Értékét, adott feladat esetén érdemes elektronikus számológéppel kikísérletezni.

Ha a h_0 intervallumban $p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}$ előjelet vált, akkor a fenti eljárás nem feltétlenül ér véget. Ezért a programba be kell építenünk azt, hogy bizonyos számú (pl. 50, 100) iteráció után, ha a pillanatnyi $h^{(0)} < h_0$ még, akkor is $h^{(0)}$ helyett h_0-lal végezze el a következő lépést. Azonban most az Euler eljárás ($k_2 = k_1$) szerint ez az egy lépés nem térít el lényegesen a megoldástól, és ez az eset viszonylag ritkán következik be. (A fenti példában legfeljebb kétszer.)

Vannak egyéb harmadrendben pontos Runge—Kutta-módszerek is. A legnevezetesebbek az alábbiak:

$$k_1 = hf(x_n; y_n)\,,$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{2}{3}h;\, y_n + \frac{2}{3}k_1\right), \qquad \textbf{(B módszer)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2\,.$$

$$k_1 = hf(x_n; y_n)\,,$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2};\, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \qquad \textbf{(C módszer)}$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2\,.$$

Mindkét módszernél alkalmazható a fenti módosítás. Itt $h^{(0)}$-ra

$$y_n + \frac{2}{3}k_1 = 0, \quad \text{illetve} \quad y_n + \frac{k_1}{2} = 0$$

áll fenn. A legalkalmasabb módszer és a legalkalmasabb ϑ kiválasztása kísérleti úton is történhet. Hasonlítsuk össze a három módszert az

$$(5) \qquad y' = A - B\sqrt{y} \qquad A, B > 0$$

egyenlet esetén. Tekintsünk el az analitikus megoldástól, amely megoldás

$$y_0 > \frac{A^2}{B^2}$$

esetén monoton csökken és amely az $y = A^2/B^2$ aszimptotával rendelkezik. Ha

$$\frac{B\sqrt{y_n}}{A} = \delta > 1\,,$$

akkor a kritikus $h^{(0)}$-ra azt kapjuk az

A módszer	**B** módszer
esetén:	
$y_n + h^{(0)}(A - B\sqrt{y_n}) = 0\,;$	$y_n + \frac{2h^{(0)}}{3}(A - B\sqrt{y_n}) = 0\,;$
$h^{(0)} = -\frac{y_n}{A - B\sqrt{y_n}}\,;$	$h^{(0)} = -\frac{3}{2}\,\frac{y_n}{A - B\sqrt{y_n}}\,;$
Továbbá	
	$k_1 = \vartheta h^{(0)}(A - B\sqrt{y_n})\,,$
$k_1 = -\vartheta y_n\,;$	$k_2 = -\frac{3}{2}\vartheta y_n\,;$
$k_2 = \vartheta h^{(0)}(A - B\sqrt{y_n + k_1})\,;$	$k_2 = \vartheta h^{(0)}(A - B\sqrt{y_n + 2k_1/3})\,;$
$k_2 = \vartheta\frac{y_n}{\delta - 1}(1 - \delta\sqrt{1 - \vartheta})\,;$	$k_2 = \frac{3}{2}\vartheta\frac{y_n}{\delta - 1}(1 - \delta\sqrt{1 - \vartheta})\,;$

C módszer

$$y_n + \frac{h^{(0)}}{2}(A - B\sqrt{y_n}) = 0\,,$$

$$h^{(0)} = -2\frac{y_n}{A - B\sqrt{y_n}}\,.$$

Továbbá

$$k_1 = -2\vartheta y_n\,,$$

$$k_2 = \vartheta h^{(0)}(A - B\sqrt{y_n + k_1/2})\,,$$

$$k_2 = 2\vartheta\frac{y_n}{\delta - 1}(1 - \delta\sqrt{1 - \vartheta})\,.$$

Mivel szükséges, hogy

$$y_{n+1} \leqq y_n$$

legyen, ezért ϑ-ra fennáll, hogy

$$\frac{1}{2}(k_1 + k_2) \leqq 0\,; \quad \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 \leqq 0\,; \quad k_2 \leqq 0\,,$$

vagyis

$$\vartheta \leqq \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{2 - \delta}{\delta}\right)^2, & \text{ha } \delta \leqq 2 \\ 1\,, & \text{ha } \delta > 2 \end{cases}; \quad \vartheta \leqq \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{4 - \delta}{3\delta}\right)^2, & \text{ha } \delta \leqq 4 \\ 1\,, & \text{ha } \delta > 4 \end{cases}; \quad \vartheta \leqq 1 - \frac{1}{\delta^2}\,.$$

A legnagyobb megengedett ϑ-t adott δ esetén a jobb oldal jelöli ki. Ha a megfelelő egyenlőtlenség nem áll fenn, akkor $y_{n+1} > y_n$ lesz és a következő lépésben δ növekszik. Vagyis rögzített ϑ-nál

$$\delta \geqq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \vartheta}}\,; \quad \delta \geqq \frac{4}{1 + 3\sqrt{1 - \vartheta}}\,; \quad \delta \geqq \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta}}\,.$$

(Természetesen kisebb-nagyobb eltérések lehetségesek.) Azonban a pontos megoldásnál $\delta \to 1$, itt pedig megközelítően δ határértéke a jobboldal értékével egyenlő. Ezért ezek a jobb oldalak a módszer pontosságának mértékét adják meg a megfelelő ϑ esetén, amelyet ezentúl röviden $\delta_{\min}$-nak jelölünk.

Azonos ϑ-ra

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \vartheta}} \leqq \frac{4}{1 + 3\sqrt{1 - \vartheta}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta}}\,,$$

tehát a legpontosabb az **A**, a legkevésbé pontos a **C** módszer. A h lépéstávolságra fordított irányú becslés mondható ki. Ha a

$$-y_n/(A - B\sqrt{y_n})$$

számot egységnek vesszük, akkor a lépéstávolság

$$\vartheta\,; \qquad \frac{3}{2}\vartheta\,; \qquad 2\vartheta\,,$$

vagy

$$1-\left(\frac{2-\delta}{\delta}\right)^2; \quad \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{4-\delta}{3\delta}\right)^2\right]; \quad 2\left[1-\frac{1}{\delta^2}\right].$$

Rögzített $\delta_{\min}$ pontossági tényező esetén rendre a megfelelő ϑ-val számolva

$$1-\left(\frac{2-\delta}{\delta}\right)^2 \leqq \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{4-\delta}{3\delta}\right)^2\right] \leqq 2\left[1-\frac{1}{\delta^2}\right]$$

miatt a **C** módszer adja a legnagyobb, az **A** módszer adja a legkisebb lépésközt.

Összefoglalva tehát adott ϑ érték mellett a legpontosabb módszer rendre az **A**, **B**, illetve a **C** módszer. Adott $\delta_{\min}$ pontossági tényező esetén pedig a legnagyobb lépésközt rendre a **C**, **B**, illetve az **A** módszer adja. Bár az utóbbiból még nem következik, mégis feltesszük, hogy adott $\delta_{\min}$ esetén (rendre a megfelelő ϑ-val számolva) a legrövidebb gépi időt rendre a **C**, **B**, illetve az **A** módszer esetén kapunk.

A pontosság és a számolási sebesség tehát itt két ellentétes követelményt jelent.

Mivel az (5) egyenletrendszer megoldásának aszimptotája az $y = A^2/B^2$ egyenes, ezért egy abszcisszától kezdve az $y_n = A^2/B^2$ érték már jó közelítést ad. Ezzel sok felesleges számolás kerülhető majd el.

A fenti megállapítások jól alkalmazhatók a (4) alakú feladatra is. A pontosság és a számítási sebesség feltehetően itt is ellentétes követelés lesz. A megfelelő módszert (az **A**, **B**, **C** közül) és a megfelelő ϑ-t a programozónak kell kiválasztani általában kísérletezés útján. Ez a módszer általában a gépi időt a sokszorosára emeli, azonban a megoldás így is sokkal gyorsabb lesz, mint az elméletileg számított lépésköz használata esetén.

Végül a „ritmikusan szinguláris" egyenleteknél azokban az abszcissza intervallumokban, ahol az egyenlet közel szinguláris és ahol sűrű felosztású abszcisszára volna szükség, alkalmazhatjuk az aszimptota közelítés fenti módszerét. Azaz ha y' elég kicsi, akkor y-t kifejezve (4)-ből

$$(6) \qquad y = \operatorname{sgn}\left(\frac{g(x;y)}{h(x;y)}\right)\cdot\left(\frac{g(x;y)}{h(x;y)}\right)^2$$

adódik. Természetesen egy (4) alakú egyenletnél általános esetben az $y' \approx 0$ feltétel nem szokott bekövetkezni.

Az y közelítését a teljes h_0 lépésközzel elvégzett Runge—Kutta-számítás vagy számítási ciklus y_{n+1} eredménye adja. Ez behelyettesítve a (6) jobb oldalába adódik a kívánt korrekció. Ez általában olyan jó közelítést szokott adni, hogy a következő lépésben $y_n + k_1$ illetve $y_n + 2k_1/3$, illetve $y_n + k_1/2$ még pozitív marad, a teljes h_0 intervallumon, s így a h_0 intervallum sűrített felosztására nincs is szükség.

Ezek a gondolatok alkalmazhatók az (1), (2), (3) rendszerre is, csupán itt a (6) összefüggést egy más összefüggés helyettesíti. Osszuk végig az (1), illetve a (2) egyenletet az E, illetve a G függvénnyel és vonjuk ki az utóbbi egyenletet az előbbiből:

$$(p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}})' = \frac{A}{E} + \frac{F}{G} - \left(\frac{B}{E} + \frac{B}{G}\right)x' - \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{G}\right)\varepsilon CD\sqrt{|p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}|}\,.$$

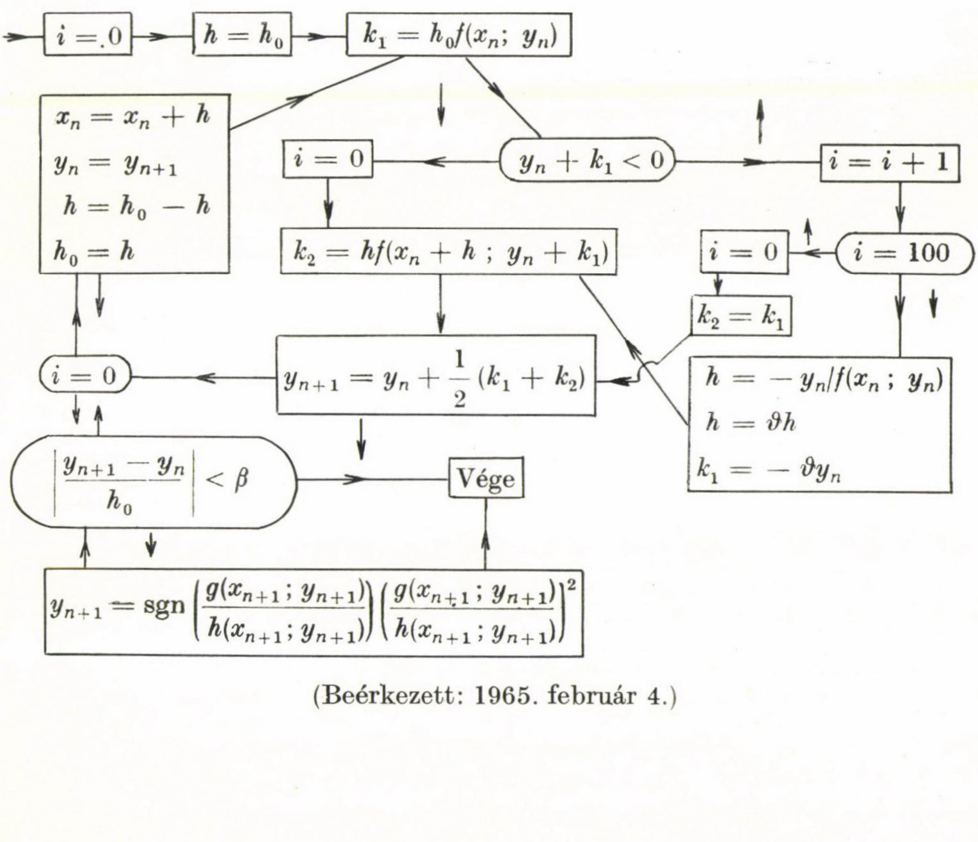
A szelep szélső állásainak környezetében valóban $(p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}})' = 0$ vehető, a nyomások kiegyenlítődésének lehetősége miatt. Ekkor

$$p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}} = a\left[\frac{\dfrac{A}{E} + \dfrac{F}{G} - \left(\dfrac{1}{E} + \dfrac{1}{G}\right)Bx'}{\left(\dfrac{1}{E} + \dfrac{1}{G}\right)CD}\right]^2, \tag{7}$$

ahol a a szögletes zárójelben levő hányados előjele.

A közelítő $p_{\mathrm{I}}, p_{\mathrm{II}}$ értékeket az egy teljes h_0 lépésközzel vett Runge—Kutta számítás vagy számítási ciklus eredményéből kapjuk. Ebből számítható a (7) segítségével a különbségük pontos értéke. Ezután p_{I} és p_{II} úgy korrigálható, hogy pl. számtani közepük azonos maradjon a korrigálatlan értékpáréval. Ez általában olyan jó korrekciót szokott adni, hogy a következő lépésben nincs is szükség a h_0 intervallum felosztására. (Ha kerekítési hiba nincsen, akkor ennek valóban így is kell lennie, amiről könnyen meggyőződhetünk.) Ez a korrekció a számítási időt lényegesen csökkenti.

Végül közöljük az összetett eljárás blokkdiagrammját az **A** módszer esetén:



(Beérkezett: 1965. február 4.)

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЯ ПО ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ш. ФРИВАЛДСКИ

Резюме

В настоящей статье автор занимается численным решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемой из технической проблемы. Эта система является сингулярной или почти-сингулярной. Автор исходит из модифицирования метода Рунге и Кутта и попытается найти достаточно точный и быстродействующий метод решения. Полученные при этом опыты имеют сравнительно общее значение.

SOME REMARKS ON SOLVING SYSTEMS OF SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS NUMERICALLY

by

S. FRIVALDSZKY

Summary

This paper deals with the problem of numerical computing a system of singular differential equations arising in the engineer's practice. The method is an appropriate modification of the well-known Runge—Kutta procedure and it is accurate and quick enough for the present purposes. The results obtained have a fairly general validity.

KÖNYVISMERTETÉS

G. Hadley: *Linear Programming*. Addison-Wesley, Reading Massachusetts. 520 lap.

Világszerte igen sok cikket és könyvet írtak már erről a témáról. Az eddig megjelentek azonban vagy terjedelmük vagy feldolgozásmódjuk (pl. közgazdászok vagy ipari szakemberek stb. számára írt könyvek) miatt megközelítően sem nevezhetők teljesnek.

Hadley könyve a szokásos anyagon kívül (szimplex módszer, duál-algoritmus, szállítási probléma) igen sok eddig még könyvben meg nem jelent módszert is tartalmaz, mint például primal-dual algoritmus, a dekompozíciós elv, általánosított hozzárendelési probléma stb.

A könyv olyanok számára is használható, akik most ismerkednek a lineáris programozással, mivel ennek lényege a bevezetésben konkrét példákon keresztül megérthető. Ugyanitt a szerző a grafikus megoldást is bemutatja.

A következő fejezet a szükséges matematikai alapokat tartalmazza: a mátrixokra vonatkozó tudnivalókat, lineáris egyenletrendszereket és a konvex halmazokra vonatkozó legfontosabb ismereteket.

A szimplex módszernek a szokásosnál alaposabb és tagoltabb bevezetése és kimélyítése, a javított szimplex módszer, valamint a dualitás elmélete található a 3—8. fejezetben. Az 5. fejezetben a feltétel-tér és megoldás-tér vizsgálatával szemléletes képet is kapunk a módszerről.

A szállítási problémáról szóló 3. fejezet a szokásos algoritmusokon kívül az általánosított szállítási feladat megoldását is közli.

A 10. fejezetben a hálózati folyamokkal ismerkedhetünk meg, amelynek a cimkézési eljárással való megoldását közli a szerző. A fejezet további részében a folyamproblémának a szállítási feladat megoldására való alkalmazását olvashatjuk. Itt találjuk a hozzárendelési problémát —, ahol a „magyar módszer"-t a szerző sajnos nem közli, csak hivatkozik rá — valamint a tetszőleges hálózaton való általános szállítási probléma (transshipment problem) megoldását.

A következő részben egy kissé tömören, de igen sok problémáról és megoldásról számol be a szerző. Ezek között a legfontosabbak: kapacitásos szállítási feladat, parametrikus programozás, dekompozíciós elv, játékelmélet és lineáris programozás kapcsolatok.

Az utolsó két fejezet bőségesen mutat ipari ill. gazdasági alkalmazásokat. A 13. fejezetben például többek között megtalálható röviden az input-output analízis, a zárt és a dinamikus Leontyev modell a duális program gazdasági értelmezése stb.

Érdeme a könyvnek, hogy minden fejezet végén nagyszámú gyakorló feladat és probléma segíti a megértést és az anyag elmélyítését.

Összefoglalva: A könyv igen alkalmas a lineáris programozás elsajátítására és elmélyítésére azok számára, akik bizonyos matematikai alapismeretekkel rendelkeznek. A témában jártasak számára is hoz újat. Végül, de nem utolsósorban az oktatóknak igen nagy hasznára lehet az anyaguk összeállítása és feladatok keresése szempontjából, valamint a diákság is jól használhatná mint egyetemi segédkönyv, mivel a könyv felépítése didaktikailag is igen jó.

Nagyon hasznos volna a könyvet magyarra is lefordítani.

(Kovács László Béla)

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET SZEMINÁRIUMAIBAN 1964-BEN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK

Intézeti szeminárium

1. Schmidt Tamás: *Univerzális algebrák.* (Március 3.)

2. P. R. Halmos (Michigan): *Current problems in Hilbert space.* (Március 27.)

3. Kalmár László: *Matematikai módszerek alkalmazásairól a nyelvtudományban.* (Április 10.)

4. Erdős Pál: *A kombinatorikus halmazelmélet újabb fejlődése.* (Október 22.)

5. Gr. C. Moisil (Bukarest): *Univerzális algebrák és véges automaták.* (November 27.)

6. Császár Ákos: *A topologikus tér fogalmának újabb fejlődése.* (December 3.)

Osztályszemináriumok

A valószínűségszámítási osztály szemináriuma

1. Rényi Alfréd: *Az iterált logaritmus tétel élesítése.* (Október 12.)

Az előadó V. Strassen eredményeit ismertette. Lásd V. Strassen „An Invariance Principle for the Law of the Iterated Logarithm" c. cikkét, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **3** (1964) 211—226.

2. Erdős Pál: *Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása trigonometrikus sorok konvergenciájával kapcsolatos problémákra.* (Október 19.)

3—4. Csiszár Imre: *Határeloszlástételek topologikus csoportokon.* (Október 26., november 2.)

Lásd az előadó „On limiting distributions on topological groups" c. dolgozatát, e Közlemények **9** (1964) A.

5. Bártfai Pál: *Egyenletes eloszláshoz való konvergencia a körön.* (November 9.)

Lásd az előadó „Grenzverteilungssätze auf der Kreisperipherie und auf kompakten Abelschen Gruppen" c. dolgozatát, e Közlemények **10** (1965) A 1—2. füzetében, sajtó alatt.

6. Révész Pál: *Ekvivalens valószínűségi változókról.* (November 17.)

Lásd az előadó „A central limit theorem for equivalent random variables" c. cikkét. (Sajtó alatt.)

Bánkövi György és Békéssy András: *Véletlen számok generálása.*

Lásd Bánkövi Gy.: „A note on the generation of beta distributed and gamma distributed random variables" és „A decomposition-rejection technique for generating exponential random variables", továbbá BÉKÉSSY A.: „Further notes on beta distributed random numbers" c. dolgozatát, e Közlemények **9** (1964) A.

7. ALBERT PEREZ (Prága): *The concept of ε-sufficiency in statistical decision problems.* (November 30.)

A matematikai statisztikai osztály szemináriuma

1. KULKARNI, S. R. (Az UNESCO-tanfolyam résztvevője): *Optimal asymptotic test.* (Június 4.)

2. ZBYNEK SIDÁK (Prága): *On different definitions of test efficiency.* (Szeptember 11.)

3. BÁNKÖVI GYÖRGY: *Véletlen számok transzformálásáról.* (November 17.)

A közgazdasági alkalmazások csoport és a valószínűségszámítási osztály közös szemináriuma: sztochasztikus folyamatok

1. W. SZWARC (Varsó): *Transportation problem with stochastic demand.* (Január 24.)

2—4. PRÉKOPA ANDRÁS: *Sztochasztikus programozás.* (Január 31., február 7.)

Előadó új eredményeit ismertette.

5—6. KONDOR GYÖRGY: *Az egészértékű programozás.* (Március 6., 13.)

GOMORY módszerének ismertetése.

7. PRÉKOPA ANDRÁS: *Stochasztikus programozás.* (Április 3.)

8. KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA: *A konvex programozás metszősík módszerének ismertetése.* (Április 10.)

(KELLEY: Cutting Plane Method for Solving Convex Programs) SIAM Journal 8:4, 1960.

9. FERENTZY EÖRS: *A Dantzig—Wolfe dekompozíciós eljárás.* (Április 17.)

10. MAROSI ISTVÁN: *Nemlineáris költségfüggvényű szállítási feladat.* (Május 8.)

Szakdolgozatának ismertetése.

11. MARTOS BÉLA: *A szimplex módszer alkalmazási körének maximális kiterjesztéséről.* (Május 15.)

A szerző önálló eredményeinek bemutatása.

12—13. MOGYORÓDI JÓZSEF: *Forgalmi problémák.* (Október 16., 23.)

14. KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA: *Többfokozatú szállítási probléma.* (Október 30.)

Az előadó új megoldását ismertette.

15. LAJOS SÁNDOR: *Vorobjov extremális mátrixszámításának ismertetése.* (November 20.)

16. BOD PÉTER: *A Vorobjov-féle extremális mátrixszámítás egy Wintgentől származó alkalmazása.* (November 27.)

FERENTZY EÖRS: *Dantzig árnyékár értelmezése.* (Lásd G. B. DANTZIG: Linear programming and Extensions.)

17—18. SZÉKELY GÁBOR: *Faktoranalízis.* (December 11.)

A valós függvénytani osztály topológiai szemináriuma

1—10. CSÁSZÁR ÁKOS: *G. Köthe: Topologische lineare Räume c. könyvének folytatólagos ismertetése.* (Február 21., március 6., március 20., április 3., április 17., október 2., október 23., november 13., 28., december 11.)

11—13. DEÁK ERVIN: *Az iránystruktúra fogalma, az ezen alapuló dimenziófogalom, a vele kapcsolatos beágyazási tételek. A konvex halmaz fogalmának általánosítására vonatkozó kísérletek vázolása.*

A differenciálegyenletek osztályának szemináriuma

1. MÁLYUSZ KÁROLY: *Mikusinski egy sejtésének bizonyítása.* (Január 2.)

Legyenek $f(t)$ és $g(t)$ a $[0, 1]$ intervallumban definiált folytonos függvények, amelyek a 0 pontnak egyetlen környezetében sem tűnnek el identikusan, akkor a $q = \dfrac{\{g(t)\}}{\{f(t)\}}$ operátorhoz található olyan $a_1, a_2, \ldots$ számsorozat, hogy a $\sum_{=1}^{\infty} a_\nu q^\nu$ hatványsor (operátoros értelemben) konvergens.

2. BIHARI IMRE: *Nemlineáris differenciálegyenletrendszer megoldásainak aszimptotikus viselkedéséről.* (Január 9.)

Lásd az előadó dolgozatát e Közlemények 1964. VIII. A. sorozat 3. sz.-ban, 475—488. old.

3—6. MAKAI ENDRE: *Membránok alapfrekvenciáinak és rudak torziószilárdságának becslése a variációszámítás direkt módszereivel.* (Január 16., 23., 30., február 6.)

Az előadó ismertette mind a saját, mind PÓLYA GY. és SZEGŐ G. eredményeit. Lásd: G. PÓLYA, G. SZEGŐ: Isoperimetric inequalities in mathematical physics, és az előadó cikkét a „Studies in mathematical analysis and related topics" (Stanford Univ. Press, 1962) c. könyvben.

7—15. és **18—19.** FENYŐ ISTVÁN: *Disztribuciók magasabb dimenziójú terekben.* (Február 13., 20., március 5., 12., 19., 26., április 10., 17., május 15., 22)

Az előadó ismertette HÖRMANDER „Linear partial differential operators" (Berlin—Göttingen, 1963) c. könyve tartalmának egy részét.

16—17. BALATONI FERENC: *Kvadratikus alakok egy majoráns problémájáról.* (Április 24., május 8.)

Lásd az előadó „Ein matrizentheoretisches Problem und sein Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Reihen" c. dolgozatát az Intézeti Közleményekben, sajtó alatt.

20—24. MAKAI ENDRE: *L^2-integrálható függvények Fourier-sorának konvergenciájáról.* (Július 8., 10., 13., 15., 20.)

Feltéve, hogy létezik olyan L^2-integrálható függvény, melynek Fourier-sora pozitív mértékű halmazon divergens, akkor ebből a feltevésből egymással ekvivalens állítások sorozatát vezette le az előadó, melyek közül az utolsó állítás egy végtelen számsorozat divergenciáját mondja ki, amely számsorozat minden egyes eleme véges lépésben meghatározható. E számsorozat mintegy félszáz kezdő eleméről kimutatta, hogy értéke 1. — Lásd az előadó „On the summability of the Fourier-series of L^2 integrable functions I—II" c. dolgozatait a Publ. Math. Debr.-ben (sajtó alatt).

25—29. MÁLYUSZ KÁROLY: *Néhány kérdés az operátorszámítás területéről* (Augusztus 13., 17., 19., 24., 27.)

Az előadó ismertette a témakörben elért eredményeit, melyek részben az alábbi dolgozatokban vannak publikálva, részben hozzájuk kapcsolódnak.

„On a problem of Mikusinski, Monatshefte für Math" sajtó alatt.

„On power-series of Mikusinski operators" Int. Közlemények, sajtó alatt.

A. PEYERIMHOFF: Über das Anwachsen der C_k-Mittel von Laplace-Integralen auf vertikalen Geraden, Math. Ann. 128 (1954) 138–142.

30–33. BIHARI IMRE: *Lineáris autonóm differenciálegyenletrendszerek perturbációjáról.* (Október 7., 14., 21., 28.)

Lásd az előadó „Perturbation Theory of Three-dimensional Real Linear Autonom Systems" c. cikkét az Int. Közleményekben, sajtó alatt.

34–37. MAKAI ENDRE: *A kétdimenziós, egyszeresen összefüggő (nem feltétlenül konvex peremű) membrán alaphangjának egy alsó becslése és a konvex peremű háromdimenziós membrán alaphangjának egy felső becslése.* (November 4., 11., 18., 25.)

Lásd az előadó „A lower estimation of the principiel frequencies of simply connected membranes", Acta Math. (Budapest) folyóiratban sajtó alatt és „On the fundamental frequencies of two and three dimensional membranes" az Int. Közleményekben (1963. VIII. A. 1–2.)

38. TÓTH KÁROLY: *Analóg számológépek és alkalmazásaik a differenciálegyenletek megoldására.* (December 2.)

Az előadó ismertette az analóg számológépek működési elvét és alkalmazását differenciálegyenletek és -rendszerek megoldására. Felhasználta az alábbi könyveket:

B. IA. KOGAN, Analóg számológépek és alkalmazásuk, Budapest, 1962.

H. ADLER, Elektronische Analogrechner, Berlin, 1962.

A komplex függvénytani osztály szemináriuma

1–2. SZILÁRD KÁROLY: *Az extremális hosszúságról.* (Január 24., 31.)

Korábbi előadások befejező része. Az előadó A. PFLUGER: „Extremallängen und Kapazität" (Comment. Math. Helv. **29** (1955) 120–131.) c. művét ismerteti.

3–4. SZÜSZ PÉTER: *Hartogs egy, a két komplex változós hatványsorokra vonatkozó tételének ismertetése.* (Február 7., 13.)

C. K. CARATHÉODORY: Funktionentheorie c. műve alapján.

5–11. és **19–22.** DANCS ISTVÁN: *Egy- és többrétű leképezések.* (Február 20., március 5., 12., 19., 26., április 3., 9., június 4., 11., 18., 25.)

Az előadó a kérdést W. K. HAYMAN: Multivalent functions c. műve és több dolgozat alapján ismertette.

12–18. BALÁZS JÁNOS: *Extremális polinomok vizsgálata a funkcionálanalízis módszereivel.* (Április 15., 21., 30., május 7., 14., 19., 28.)

L. irodalmat (cirillbetűs szöveggel) Intézeti Közlemények **8** (1963) 671. o.

20. HALÁSZ GÁBOR: *A Wiener-tétel általánosítása Dirichlet sorokra.* (Szeptember 29.)

A. E. INGHAM: On absolutly convergent Dirichlet series Essays on homor of George Pólya c. kötet (1962) 156–165. o. műve alapján.

21–24. HALÁSZ GÁBOR: *Normált gyűrűk Gelfand-féle elmélete és alkalmazása Wiener-típusú tételek bizonyítására.* (Október 6., 13., 20., 26.)

I. GELFAND: Normierte Ringe, Mat. Sbornyik 9 (1949) 3–24.

I. GELFAND: Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale. Mat. Sbornyik. 9 (1941) 51—66.

25—27. ALPÁR LÁSZLÓ: *Konvergencia és konform leképezés.* (November 3., 10., 17.)

Lásd az előadó „Convergence et représentation conformé c. dolgozatát," e Közleményekben sajtó alatt.

28—36. DANCS ISTVÁN: *Tartomány és függvény szimmetrizáció.* (November 24., 28., december 1., 6., 8., 12., 15., 19., 22.)

Az előadó a témát W. K. HAYMAN: Multivalent functions c. műve és több dolgozat alapján ismertette.

A differenciálgeometriai csoport szemináriuma

1. SOÓS GYULA: *A differenciálható sokaság fogalma.* (Február 18.)

2. SOÓS GYULA: *A fibrált tér fogalma.* (Március 3.)

3. SOÓS GYULA: *Az összefüggés Ehresmann-féle fogalma a principális fibrált tér felett.* (Március 17.)

4. SOÓS GYULA: *A görbület és torzió fogalma.* (Április 28.)

5. SZENTHE JÁNOS: *A görbületi mérték, konstans görbületű terek.* (Május 12)

6. SZENTHE JÁNOS: *Schur tételének globális bizonyítása.*

SÁNDOR ISTVÁN: *Riemann és Finsler terek felbontása.* (Május 26.)

7. MERZA JÓZSEF: *Lineáris tér fogalma, lineáris formák, duális tér.* (Október 10.)

8. MERZA JÓZSEF: *A duális tér szerkezete, lineáris forma előállítása skaláris szorzat segítségével.* (Október 24.)

9. VARGA OTTÓ: *Beszámoló a francia műegyetemi oktatásról.* (November 28.)

10. VARGA OTTÓ: *A tenzoriális szorzat.* (December 4.)

A konstruktív függvénytani csoport szemináriuma

1—2. DZSAFAROV (Baku): *Konstruktív függvénytani beágyazási tételek I—II.* (Június 7—26.)

A szerzőnek az Izvesztija Ak. Nauk Azerbaidzsánszkoj SzSzR.-ben megjelent dolgozatainak ismertetése.

3. J. KNAPOVSKY (Posnan) : *On linear processes of approximation.* (Július 10.)

Lásd FREUD—KNAPOVSKY: On linear processes of approximation II. Studia Mathematica (sajtó alatt) dolgozat ismertetése.

A funkcionálanalízis osztály szemináriuma

1—12. TANDORI KÁROLY — GEHÉR LÁSZLÓ — SZÜCS JÓZSEF — DURSZT ENDRE—KOVÁCS ISTVÁN: *Analitikus függvények Banach terei.* (Február 15., 22., március 7., 14., 21., 28., április 11., 25., május 9., 16., 23. és 30.)

Az előadók a következő könyvet ismertették: HOFFMANN, K., „Banach spaces of analytic functions" (Prentice-Hall International, London (1962)).

13. DINCULEANU, N. (Bukarest): *Vector measure defined by densities.* (Április 7.)

Az előadó a Radon—Nikodym tételhez hasonló tételeket bizonyított vektormértékek esetében.

14. Cooper, J. B. L.: *The representation of functions as Fourier and Laplace transforms.* (Április 15.)

Az előadó a Fourier sorok klasszikus elméletéből ismert tételeket vitt át Fourier, ill. Laplace transzformációk esetére. Azt a problémát vizsgálta, hogy az inverz transzformált tulajdonságaiból hogy lehet következtetni az eredeti függvény tulajdonságaira (bizonyos osztályba tartozás).

15. Наймарк, М. А. (Moszkva): *Kommutative symmetrische Algebren und unitäre Darstellungen lokal-kompakter Gruppen.* (Szeptember 26.)

Az előadó lokálisan kompakt, megszámlálható bázisú csoportok olyan előállításait vizsgálta Π_k terekben, melyek unitérek Π_k-ban, de nem unitérek a szokásos értelemben.

16. Rolewicz, S. (Varsó): *Operators with finite dimensional characteristic.* (Október 1.)

Az előadó a teljesen folytonos operátorokat általánosította olyan lineáris terekre, amelyekben nincs topológia, és ezekre algebrai jellegű tételeket nyert, amelyek általánosításai bizonyos a teljesen folytonos operátorokra vonatkozó tételeknek.

17. Foias, G. (Bukarest): *On ergodic measures.* (Október 10.)

Az előadó általános modellt adott az ergodikus mértékekre, azaz megadott egy általános eljárást, amelynek segítségével az összes X mértéktér, μ mérték és T ergodikus transzformáció esetén az (X, μ, T) struktúrával izomorf struktúrát tud konstruálni.

18. Szőkefalvi-Nagy Béla: *Operátorok véletlen szorzatairól I.* (November.)

Az előadó egy Hilbert-térbeli T kontrakció hatványainak konvergenciájára vonatkozó eredményeket ismertetett.

Gehér László: Az l^p és L^p terek teljesen folytonos, egyenletesen korlátos operátorairól. (November 14.)

Az előadó egy új bizonyítást adott arra, hogy az l^p tér teljesen folytonos, egyenletesen korlátos operátorai hasonlók az l^p tér egy alterének valamely kontrakciójához. Ezzel az új módszerrel sikerült élesíteni előbbi eredményét, nevezetesen bebizonyította, hogy az előbb említett altér véges kodimenziósnak is választható.

19. Szőkefalvi-Nagy Béla: *Példa olyan Hilbert-térbeli operátorra, amelynek iteráltjai közös korlát alatt maradnak, s amely mégsem hasonló kontrakcióhoz.* (December 5.)

Foguel példájának Halmos és az előadó által való pontosítása. (Levelezés alapján.)

20. Vasilache, S. (Bukarest): *Operátorszámítás több változóra.* (December 11.)

A geometriai osztály szemináriuma

1—5. Kovács László—Prékopa András: *A lineáris programozás geometriai háttere és problémái.* (Február 19., 26., március 11., 18., 25.)

6—8. Kovács László: *A hálózatok maximális folyama — minimális vágás tétele (lineáris programozási, ill. gráfelméleti tárgyalásban).* (Április 22., 29., május 6.)

9. Heppes Aladár: *Hálózatok átlagos oldalszámáról.* (Április 15.)

Ha a hiperbolikus sík egy hálózatában szereplő tartományok beírt körére közös alsó, átmérőjére közös felső korlát ismeretes, megbecsülhető a tartományok átlagos oldalszáma.

10—11. Böröczky Károly—Molnár József: *Kör és gömb kitöltési problémák.* (Május 13., 20.)

Kör és konvex síkidom kongruens körökkel való kitöltésének vizsgálata. Gömb és henger kitöltése kongruens gömbökkel.

12—15. Bognár Mátyás: *Kategóriák és gráfok.* (Szeptember 30., október 7., 21., 28.)

A kategóriák és alkalmazásai köréből jónéhány kérdés bizonyításánál lényeges rövidítést érhetünk el, ha a rajzot nemcsak gondolatok szemléltetésére, hanem bizonyítási eszközként is használjuk. Az eljárás egy, a sík gráfokra vonatkozó tételen alapul.

16. O. H. Keller (Halle): *Zum Noetherselon Fundamentalsatz.* (Az algebrai osztállyal közös ülés.) (Október 19.)

17—19. Corrádi Keresztély: *Egy kérdés síkbarajzolható gráfok színezéséről.* (November 18., 25., december 2.)

Ha G $5n$ szögpontú síkbarajzolható gráf, s minden szögpontjának foka $n - 1$, úgy G felbontható n független (páronként közös pont nélküli) pontötös-re oly módon, hogy ezen felbontásban szereplő ötösök egy kivételével nem tartalmaznak G-beli élet, s a kivételes ötösben legfeljebb egy csillag lehet. (Az összes benne foglalt élek egy szögpontból indulnak ki.)

A matematikai logika és alkalmazásai osztály szemináriuma

1—2. Gécseg Ferenc: *Referáló előadások.* (Február 25., március 3.)

Lásd M. O. Rabin és D. Scott, Finite automata and their decision problems, IBM Journal of Research and Development, **3** (1959) 114—125.

3—9. Pollák György: *Referáló előadások.* (Március 10., 17., 24., április 7., 14., 21., május 12.)

Lásd В. М. Глушков, Синтез цифровых автоматов (Москва. 1962) a 3. fejezet 1—6. és 8. paragrafusait.

10. Makkai Mihály: *E. W. Beth egy tételéről.* (Március 20.)

11. Ádám András: *Referáló előadás.* (Május 5.)

Lásd В. М. Глушков, Синтез цифровых автоматов (Москва 1962), a 3. fejezet 7. paragrafusát.

12. Constantinescu, P.: *About an algorithm of absolute minimal form of Boolean functions.* (Június 17.)

Az idevágó román eredmények ismertetése.

13. Пархоменко, П.П. (Moszkva): О синтезе логических схем на различных функционально польных системах элементов. (Június 18.)

Az Automatikai és Telemechanikai Intézetben kidolgozott szintézismódszer általánosítása.

14—15. Moisil, Gr. C. (Bukarest): *Aléas de continuité dans les circuits de commutation.* (November 23., 25.)

Egy konkrét feladat kidolgozása kapcsán annak megmutatása, hogyan lehet a háromértékű logikát alkalmazni jelfogós áramkörök esetén a jelfogók, érintkezők és nyomógombok két szélső állapota közötti átmeneti állapot figyelembevételére.

Az algebrai osztály szemináriuma

1—4. Pollák György: *A kategóriák elméletéről. II—V.* (Január 7., 14., 21., 28.)

Referáló előadás.

5. Edward Sasiada (Torun): *Die existenz einer O-Gruppe, die keine O*-Gruppe ist.* (Január 29.)

6. Fuchs László: *Beszámoló a Nyugat-Németországban tett utazásról* (Január 29.)

7. Steinfeld Ottó: *Ismertetés Fuchs László Partially Ordered Algebraic Systems könyve III. fej. 4., 5., 6. pontjairól.* (Február 5.)

Szász Ferenc: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve IV. fej. 1. pontjáról.*

8. Makkai Mihály: *Néhány modell-elméleti eredményről, I.* (Február 11.) (Az ELTE Matematikai Logikai szemináriumával közösen.)

9. Szász Ferenc: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve IV. fej. 1., 2. és 3. pontjairól.*

Fried Ervin: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve IV. fej. 4. pontjáról.* (Február 12.)

10. Makkai Mihály: *Néhány modell-elméleti eredményről, II.* (Február 18.)

11. Fried Ervin: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve IV. fej. 4., 5. pontjairól.* (Február 19.)

12. Makkai Mihály: *Néhány modell-elméleti eredményről, III.* (Február 25.)

13. Kurt Neumann: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve V. fej. 1., 2., 3. pontjairól* (Február 26.)

14. Makkai Mihály: *Néhány modell-elméleti eredményről, IV.* (Március 3.)

15. Kurt Neumann: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve V. fej. 4. pontjáról.* (Március 4.)

16. Makkai Mihály: *Néhány modell-elméleti eredményről, V.* (Március 10.)

17. Kurt Neumann: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve V. fej. 5. pontjáról.* (Március 11.)

18. Makkai Mihály: *Néhány modell-elméleti eredményről. VI.* (Március 17.)

19. Kurt Neumann: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve V. fej. 6. pontjáról.* (Március 18.)

Fuchs László: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve V. fej. 7. pontjáról és kiegészítő megjegyzések.* (Március 18.)

20. Fried Ervin: *Általános izomorfia-tételek kategóriákban, I.* (Március 24.)

21. Fuchs László: *Újabb eredmények a hálószerűen rendezett csoportok elméletében, a radikál.* (Március 25.)

22. Fried Ervin: *Általános izomorfia-tételek kategóriákban, II.* (Április 7.)

23. Fuchs László: *Teljes disztributív hálószerűen rendezett csoportok. Újabb eredmények Riesz-féle féligrendezett csoportok elméletében.* (Április 8.)

24. Wiegandt Richárd: *Lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrűkről, I.* (Április 14.)

25. Fried Ervin: *Charles Holland egy tételének általánosítása részben rendezett csoportokra.* (Április 15.)

26. G. Pazderski (Halle): *Über die maximalen Untergruppen einen endlichen Gruppe.* (Április 21.)

27. V. D. BELOUSOV (Kisinev): *Topics in the theory of quasigroups.* (Április 22.)

28. STEINFELD OTTÓ: *Izomorf kép kivetítése olyan részben rendezett félcsoportokban, amelyekben érvényes az egyértelmű primfaktorizáció, I.* (Április 28.)

29. FRIED ERVIN: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve V. fej. 10., 11. és 12. pontjairól.* (Április 29.)

30. STEINFELD OTTÓ: *Izomorf kép kivetítése olyan részben rendezett félcsoportokban, amelyekben érvényes az egyértelmű primfaktorizáció, II.* (Május 5.)

31. WIEGANDT RICHÁRD: *Lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrűkről, II.*

SZÁSZ FERENC: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve VI. fej. 1., 2., 3. pontjairól.* (Május 6.)

32. SZÁSZ FERENC: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve VI. fej. 4. és VII. fej. 1., 2. pontjairól.* (Május 27.)

33. SZÁSZ FERENC: *Ismertetés Fuchs László P.O.A.S. könyve VII. fej. 3., 4. és 5. pontjairól* (Június 3.)

34. DÉNES JÓZSEF: *Az algebra alkalmazásai a gyakorlati életben, I.* (Június 9.)

35. DÉNES JÓZSEF: *Az algebra alkalmazásai a gyakorlati életben, II.* (Június 16.)

36. FUCHS LÁSZLÓ: *Újabb eredmények a Riesz-csoportok és antihálók vizsgálata terén.* (Június 17.)

37. DÉNES JÓZSEF: *Az algebra alkalmazásai a gyakorlati életben, III.* (Június 23.)

38. H. J. WEINERT (Potsdam): *Nicht notwendig assoziative Monomiale Ringe und Algebren über einem assoziativen Ring.* (Július 3.)

39. FRIED ERVIN: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve VIII. fej. 1., 2., 3. pontjairól.* (Október 2.)

40. MÁTÉ LÁSZLÓ: *A hányados algebra fogalmának egy általánosítása.* (Október 6.)

41. FRIED ERVIN: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve VIII. fej. 4., 5., 6. pontjairól.* (Október 9.)

SCHMIDT TAMÁS: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve* (Október 9.)

42. FUCHS LÁSZLÓ: *Beszámoló a Skandináv Matematikai Kongresszusról és a varsói Univerzális Algebrai Kollokviumról* (Október 13).

STEINFELD OTTÓ: *Beszámoló az Osztrák Matematikai Kongresszusról.* (Október 13.)

43. SCHMIDT TAMÁS: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve IX. fejezetéről.* (Október 16.)

44. O. H. KELLER (Halle): *Über den Noetherschen Fundamentalsatz* (A Geometriai Osztállyal közösen) (Október 19.)

45. CLIMESCU (Iasi): *Multiplication on an abelian group.* (Október 20.)

46. FUCHS LÁSZLÓ: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve X. és XI. fejezetéről.* (Október 23.)

47. JAN IVAN (Pozsony): *Über das direkte Produkt von Halbgruppen.* (Október 27.)

48. STEINFELD OTTÓ: *Ismertetés Fuchs László P. O. A. S. könyve XII. fejezetéről.* (Október 30.)

49. SZÁSZ FERENC: *Beszámoló a franciaországi tanulmányútról.* (November 3.)

50. FUCHS LÁSZLÓ: *Részben rendezett univerzális algebrák, I.* (November 6.)

51. H. GRELL (Berlin): *Ringe mit eingeschränkter Minimalbedingung.* (November 9.)

52. SCHMIDT TAMÁS: *Ismertetés P. R. Halmos „Injective and projective Boolean algebras" cikkéről.* (November 17.)
Proc. Symposia in Pure Math. 2. Lattice Theory 1961.

53. FUCHS LÁSZLÓ: *Részben rendezett univerzális algebrák, II.*
Kollektív megbeszélés egy optimális kódolási eljárásról az algebrai információelméletben. (November 20.)

54. FRIED ERVIN: *Végesen generált modulusokról.* (December 1.)

55. FUCHS LÁSZLÓ: *Részben rendezett univerzális algebrák, III.* (December 4.)

A Didaktikai csoport szemináriuma

1. REMÉNYI GUSZTÁVNÉ: *A geometria tanításának kezdeteire vonatkozó kísérletek.* (Február 27.)

2. CZAPÁRY ENDRE: *A sík- és térmértan együttes tanításáról.* (Április 29.)

3. PÁLMAY LÓRÁNT: *Beszámoló a készülő I. gimn. tankönyvéről.* (Október 27.)

4. VARGA TAMÁS: *A matematika kisgyermek-kortól kezdődő tanítása.* (November 10.)

5. IMRECZE ZOLTÁNNÉ: *Beszámoló „A matematika megszerettetése az általános iskolában" kísérleteiről.* (December 8.)

AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN MÉG FEL NEM TÜNTETETT, MÁSUTT MEGJELENT VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ MAGYAR NYELVŰ TUDOMÁNYOS MUNKÁINAK JEGYZÉKE[1]

[1] ALPÁR L.: „Adott háromszögbe írható állandó területű háromszögekről." *Matematikai Lapok* **15** (1964) 163—168.

[2] ÁDÁM A.: *Vizsgálatok logikai műveletek szuperpozícióiról kétpólusú gráfok általi ismétlés nélküli realizálhatóságánál.* Kandidátusi disszertáció (kéziratban).

[3] BÁNKÖVI GY.—HUNKÁR D.: „A forgalmi helyzet felmérésére szolgáló egyszerűsített módszer városi tömegközlekedési eszközöknél." *Autóközlekedési kutatások* (1963).*

[4] BÉKÉSSY A.: „Egy a lottójátékkal kapcsolatos cellabetöltési problémáról I—II." *Matematikai Lapok.**

[5] BÉKÉSSY A.: „Program közönséges differenciálegyenletrendszer megoldására URAL 2 elektronikus számológépen." *Gépek és Programok* **8** (1964) 104—116.

[6] BOD P.: *A matematikai programozás a gazdasági döntések előkészítésének az eszköze.* TIT.*

[7] BOD P.: *Bevezetés a gazdasági programozásba.* Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem jegyzete. Tankönyvkiadó, Budapest, 1963. 205. oldal.

[8] BOGNÁR J.: „A Bolyai János Matematikai Társulat „*Lineáris terek és lineáris operátorok*" kollokviuma." *Magyar Tudomány.**

[9] CSÁKI E.—BALOGH A.—SARKADI K.: „Megbízhatósági vizsgálatok matematikai módszerei." *Híradástechnika* **15** (1964) 332—339.

[10] CSÁSZÁR Á.: „Szőkefalvi-Nagy Béla tudományos munkásságának ismertetése." *Matematikai Lapok* **15** (1964) 1—22.

[11] CSISZÁR I.: „10 példa a matematika alkalmazására" c. könyv információelméleti fejezete. Gondolat Kiadó.*

[12] FÉNYES T.: „Az optimumszámítás elméleti és gyakorlati kérdései." *Húsipar* 1964, május.

[13] FREUD G.: „Egy Jackson-féle interpolációs eljárásról." *Matematikai Lapok.**

[14] FREUD G.: „Valós és folytonos függvények kompakt halmazon értelmezett pozitív lineáris approximációs eljárásairól." *Matematikai Lapok.**

[15] FREUD G.: „Megemlékezés Czipszer Jánosról." *Matematikai Lapok.**

[16] FREUD G.: J. Mikusinski „Operátorszámítás" c. könyve magyar fordításának előszava és szerkesztése. Műszaki Kiadó. Budapest, 1964.

[17] GALLAI T.: „Kőnig Dénes (1884—1944)." *Matematikai Lapok.**

[18] HAJÓS GY.: „Az 1963. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása." *Középiskolai Matematikai Lapok* **28** (1964) 146—153.

[19] HEPPES A.—MOLNÁR J.: „Újabb eredmények a diszkrét geometriában III." *Matematikai Lapok.**

[20] JUVANCZ I.: „A klasszikus alkattan védelmében." *Orvosi Hetilap.* 1964.

]21] JUVANCZ I.: *Index tulajdonság az orvosi és biometriai kutatásban.* Akadémiai Kiadó. 1965.

[22] JUVANCZ I.: *Klinikai gyógyszerkipróbálások quantitativ szempontjai.* Medicina.*

[23] KALMÁR L.: „Néhány filozófiai problémáról a kibernetikával kapcsolatban." *Tájékoztató* 1963. 6—75.

[1] A csillaggal jelölt dolgozatok sajtó alatt vannak.

[24] KALMÁR L.: „A kibernetika néhány filozófiai problémája." *Tájékoztató* 1964. 83—98.
[25] KALMÁR L.: „Sejts és bizonyítsál!?" *Magyar Tudomány* 1963. 816—823.
[26] KALMÁR L.: „Matematikai és nyelvi struktúrák." *Általános Nyelvészeti Tanulmányok II.* 1964. 11—74, 166—172, 295—304.
[27] KIS O.: *Számítási módszerek I—II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1963—64.
[28] KOVÁCS L. B.: Két fejezet a „Tíz példa a matematika alkalmazására" c. könyvből (hozzárendelési probléma, raktározás). Gondolat Kiadó.*
[29] MEDGYESSY P.: „Megjegyzések Turán Pál egy feladatához." *Matematikai Lapok.**
[30] MEDGYESSY P.: „Eloszlás- és sűrűségfüggvény grafikonok alakjának jellemzéséről I." *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **14** (1964) 279—292.
[31] MEDGYESSY P.: Öt fejezet a „Tíz példa a matematika alkalmazására" c. könyvből. Gondolat Kiadó.*
[32] PRÉKOPA A.: „Ankét a matematika gazdasági alkalmazásairól." *Magyar Tudomány.**
[33] PRÉKOPA A.—SCHARNITZKI V.: *Bevezetés a valószínűségelméletbe és matematikai statisztikába.* Mérnöki Továbbképző Intézet.
[34] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó. (A szerző német nyelvű tankönyvének fordítása (fordították: BÁRTFAI PÁL és CSISZÁR IMRE) kiegészítésekkel.)*
[35] RÉNYI A.: „A természet könyvének nyelve". *Fizikai Szemle.**
[36] RÉNYI A.: *Dialógusok a matematikáról.* Akadémiai Kiadó.*
[37] RÉNYI A.: „Információelmélet és nyelvészet." *Általános nyelvészeti tanulmányok II.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964. 245—251.
[38] RÉVÉSZ P.: *Matematikai statisztikai jegyzet középiskolák matematikai osztályai számára.* Tankönyvkiadó.*
[39] SOÓS GY.: *Matematika jegyzet mérnököknek* (egyes fejezetek).
[40] STEINFELD O.: „A kváziideálokról." *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **14** (1964) 301—315.
[41] SURÁNYI J.—KÜRSCHÁK J.—HAJÓS GY.—NEUKOMM GY.: *Matematikai versenytételek I—II.* (Átdolgozott és bővített kiadás). Szakköri füzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965. 135—163.
[42] SZABÓ Á.: „A négyzetérték és az ún. geometriai közép." *Matematikai Lapok* **14** (1963) 277—306.
[43] SZÁSZ F.: V. M. Gluskov: Az automaták absztrakt elmélete I—II. (Fordítás). *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **13** (1963) 287—309.
[44] TOLNAI J.: „Ellenőrző dolgozatok az NDK iskoláiban." *Matematika Tanítása.**
[45] VARGA O.: *Matematika I/2.* Tankönyvkiadó. Budapest, 1964. 158 oldal.
[46] VARGA O.: *Matematika II/1.* Tankönyvkiadó. Budapest, 1964. 246 oldal.
[47] VEKERDI L.: „A newtoni infinitézimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténetírás tükrében." *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **14** (1964) 35—70.
[48] VEKERDI L.: „A Principia születése." *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **14** (1964) 161—182.
[49] VEKERDI L.: „Végtelen sorok és fluxiok." *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **14** (1964) 423—441.
[50] VEKERDI L.: „Descartes ciklois-módszere." *Matematikai Lapok* **15** (1964) 196—203.
[51] VINCZE I.: „Az első magyarországi UNESCO tanfolyamról." *Magyar Tudomány.**
[52] VINCZE I.: „A matematikai statisztika ipari alkalmazásairól." *Magyar Tudomány.**
[53] VINCZE I.: „A Kolmogorov—Szmirnov-féle próba erőfüggvényéről." *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei.**
[54] VINCZE I.: *Matematikai statisztika.* Egyetemi jegyzet. Jegyzetkiadó. Budapest, 1964. 210 oldal.
[55] L. ZIERMANN M.: A „Matematika a vállalatvezetés szolgálatában" c. könyv „Készletgazdálkodási modellek" c. fejezete. TIT.*
[56] L. ZIERMANN M.: „Az anyagkészlet normák és finanszírozásuk kérdéséről." *Bankszemle* **8** (1964) 12—20.
[57] L. ZIERMANN M.: „Készletgazdálkodással kapcsolatos néhány kérdés valószínűségszámítási tárgyalása". GÉTE és Közgazd. Egy. Anyaggazd. Koll. ea. 1963. II. 549—557.

A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN HIÁNYOS BIBLIOGRÁFIAI ADATOKKAL SZEREPLŐ MAGYAR NYELVŰ DOLGOZATOK PONTOS ADATAI[2]

VIII.: [6] CSISZÁR I.: „A matematika egy új ága — az információ elmélet." *Magyar Tudomány* **9** (1964) 290—303.

VIII.: [9] FREUD G.: „M. H. Stone approximációs tételeiről." *Matematikai Lapok* **15** (1964) 169—178.

VIII.: [15] MUSZKA D.: „Kibernetikai módszerek alkalmazása a fonóiparban." *MTESZ Szegedi Intéző Bizottságának Évkönyve.* 1964. 39—43.

VIII.: [20] SZÜSZ P.: „A lánctörtek metrikus elméletéről." *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei* **14** (1964) 361—400.

[2] A sorszám előtt a megfelelő dolgozatjegyzéket tartalmazó évfolyamra utalunk.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Dáloki János
A kézirat nyomdába érkezett: 1965. VI. 30. — Példányszám: 800 — Terjedelem: 13,65 A/5 ív

65.61013 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

СОДЕРЖАНИЕ

Ára: 15,— Ft

INDEX: 25.

INDEX